Физический смысл уравнений Дирака

Е.Г. Якубовский

НМСУГ e-mail yakubovski@rambler.ru

Аннотация

Уравнение Дирака получено из уравнения Клейна – Гордона путем извлечения квадратного корня из правой и левой части и образование двух уравнений Дирака с четырьмя компонентами спинора. При этом возникают 4 компоненты спинора, которые описывают 4 колеблющиеся по каждой из четырех осей сгустки частиц вакуума. При этом колебание по пространственным осям можно свести к вращению вокруг оси. Причем, объясняется, почему проекция спина на каждую ось одинакова. Кроме того, решение уравнения Дирака описывает образование дискретных объемов. Причем описано образование, как элементарных частиц, так и планет и звезд. При этом внутри таких тел имеется источник энергии, имеющий мощность, варьируемую в зависимости от условий от малой величины до бесконечности.

Уравнение Дирака, в случае наличия электромагнитного поля, выглядит таким образом см. [1]

$$\gamma_{ik}^{\mu}(i\hbar\partial_{\mu} - \frac{e}{c}A_{\mu})\psi_k = mc\psi_i$$

Запишем это уравнение в виде

$$[\gamma_{ik}^{\mu}(i\hbar\partial_{\mu}\ln\psi_k - \frac{e}{c}A_{\mu}) - mc\delta_{ik}]\psi_k = 0$$

Представим его в виде нелинейного уравнения для детерминированного движения частиц вакуума

$$\{\gamma_{ik}^{\mu}[p_{k\mu}(\Omega_k)+\frac{e}{c}A_{\mu}(\Omega_k)]+mc\delta_{ik}\}\exp[-i\int_{s_0}^{s} p_{k\nu}(\Omega_k)p_{k\mu}(\Omega_k)g^{\nu\mu}ds/(m\hbar)]=0$$ Допол

$$\Omega_k=(x_{k0},x_{k1},x_{k2},x_{k3}), p_{k\mu}(\Omega_k)=-i\hbar\partial_{\mu}\ln\psi_k(\Omega_k)$$

ним это уравнение $m\frac{dx_{k\mu}}{ds}=p_{k\mu}(\Omega_k)$, где величина k означает описание компоненты спинора, а величина μ означает компоненту пространства Минковского.

Т.е. вероятностное уравнение Дирака с помощью подстановки $p_{k\mu}(\Omega_k)=-i\hbar\partial_{\mu}\ln\psi_k$ свели к детерминированному уравнению относительно четырех тел. Дополнительные уравнения $\frac{\partial p_{k\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial p_{k\nu}}{\partial x^{\mu}}=0$. Итого имеется 4 уравнение Дирака и $3\cdot 3=9$ уравнений, являющихся условием вычисления потенциала ψ_k. Этим 9 условиям вычисления потенциалов удовлетворяют функции $p_{k\mu}=p_k(x_1+x_2+x_3)$. Осталось 4 уравнения с 4 неизвестными с энергией и тремя импульсами.

Представим $\psi_k=\exp(-iEt/\hbar-i\int\mathbf{p}_k d\mathbf{x}/\hbar), k=1,2,3, \psi_0=\exp(-iEt/\hbar)$. Решим это уравнение в случае отсутствия переменного векторного и скалярного потенциала электромагнитного поля. В случае наличия статического поля, вращение происходит при постоянном радиусе, т.е. потенциальная энергия константа и ее можно учесть, включая в массу частицы

$$\sum_{k=1}^{4}\sum_{\mu=0}^{3}(\gamma_{ik}^{0}\frac{E}{c}++mc\delta_{ik})\exp[-i\int_{s_0}^{s} p_k^2(s)g^{\mu\mu}ds/(m\hbar)]+$$
$$+\sum_{\mu=1}^{3}\gamma_{ik}^{\mu}p_k(s)\exp[-i\int_{s_0}^{s} p_k^2(s)g^{\mu\mu}ds/(m\hbar)]=0; \quad .$$
$$s=x_1+x_2+x_3; p_{k\mu}=p_k(s)$$

Уравнение с $i=1$ служит для вычисления энергии состояния.

Для решения этого уравнения применим метод итераций, и будем решать уравнение

$$\sum_{k=1}^{4}[(\gamma_{ik}^{0}\frac{E_0}{c}++mc\delta_{ik})+\sum_{\mu=1}^{3}\gamma_{ik}^{\mu}p_k^0(s)]=0;$$
$$s=x_1+x_2+x_3;\, p_{k\mu}=p_k(s)$$

Вычислим начальное приближение $p_k^0=-\sum_{i=0}^{3}\sum_{\mu=1}^{4}(\gamma_{ki}^{\mu})^{-1}\sum_{m=1}^{4}\{\gamma_{im}^{0}\frac{E_0}{c}+mc\delta_{im}\}$. Эту итерацию подставляем в первое уравнение и определяем E_0.

Следующая итерация уточнит значение импульса и энергии

$$\sum_{k=1}^{4}\{\sum_{\mu=0}^{3}(\gamma_{ik}^{0}\frac{\Delta E_1}{c}+mc\delta_{ik})\exp[-i\int_{s_0}^{s}[p_k^0(s)]^2 g^{\mu\mu}ds/(m\hbar)]+$$
$$+\sum_{\mu=1}^{3}\gamma_{ik}^{\mu}\Delta p_{k1}(s)\exp[-i\int_{s_0}^{s}[p_k^0(s)]^2 g^{\mu\mu}ds/(m\hbar)]\}=0;$$

Получим итерационное соотношение

$$\Delta p_k^{n+1}(s)=-\Gamma_{ki}^{-1}\sum_{k=1}^{4}\sum_{\mu=0}^{3}(\gamma_{ik}^{0}\frac{\Delta E_n}{c}+mc\delta_{ik})\exp[-i\int_{s_0}^{s}[p_k^n(s)]^2 g^{\mu\mu}ds/(m\hbar)]$$
.
$$\Gamma_{ik}=\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_{ik}^{\mu}\exp\{-i\int_{s_0}^{s}[p_k^n(s)]^2 g^{\mu\mu}ds/(m\hbar)\},$$

Система уравнений Вольтера сводится в системе нелинейных уравнений, задача Коши которых имеет решение. Имеем нелинейную систему уравнений

$$p_k(s)=F_k\{\int_{s_0}^{s}[p_1(s)]^2ds,\int_{s_0}^{s}[p_2(s)]^2ds,\int_{s_0}^{s}[p_3(s)]^2ds\},$$

разрешая которое относительно

$$\int_{s_0}^{s} [p_k(s)]^2 ds = G_k[p_1(s), p_2(s), p_3(s)] \qquad (1.3.1)$$

и дифференцируя по величине s, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $[p_k(s)]^2 = \sum_{n=0}^{3} \frac{\partial G_k}{\partial p_n}\frac{dp_n}{ds}, k = 1,...,4$, которая имеет единственное решение при условии $|\frac{\partial G_k}{\partial p_n}| \neq 0$.

Приближенное решение этого уравнения, получается при условии $G_k = G_k[s, p_k(s)]$, что следует из уравнения (1.3.1). Получается линейное уравнение по определению энергии состояния.

Из нулевого приближения следует, что величина импульса электрона равна константе. Тогда величина $G_n = p_n^2(s - s_0)$, что следует из (1.3.1), а величина s_0 соответствует произвольной конфигурации системы. Имеем $p_n^2 - \frac{\partial G_n}{\partial s} = \frac{\partial G_n}{\partial p_n}\frac{dp_n}{ds} = \frac{\partial p_n^2(s - s_0)}{\partial p_n}\frac{dp_n}{ds} = 2p_n(s - s_0)\frac{dp_n}{ds}$. Причем значение импульса, равное константе, удовлетворяет этому уравнению. Откуда имеем для начального момента времени $\frac{dp_n}{ds} = H_n^{-1} = \frac{p_n}{2(s - s_0)}$. Возможны другие конфигурации системы, при которых $G_n = p_n^2(s - s_0)$ с другим s_0

$$\frac{dp_n}{ds} = H_n^{-1}(s)(\frac{1}{s - s_0 + i0} - \frac{1}{s - s_0 - i0}) = -i\pi p_n \delta(s - s_0)$$

Где величина $H_n^{-1}(s)$ конечна. Интегрируя это уравнение, получим скачок импульса и энергии на величину

$$p_n(s_0 + i0) - p_n(s_0 - i0) = -i\pi p_n$$

Энергия частицы после многократных скачков изменяется по формуле $p_{nq} = (1 - i\pi q) p_{n0}$, где величина q произвольное целое, p_{n0} энергия образовавшейся частицы в нулевом приближении. Причем, импульс частицы в нулевом приближении равен $p_k^0 = p_{k0} = -\sum_{i=0}^{3} \sum_{\mu=1}^{4} (\gamma_{ki}^{\mu})^{-1} \sum_{m=1}^{4} \{\gamma_{im}^{0} \frac{E_0}{c} + mc\delta_{im}\}$. Причем знак фазы экспоненты определяется $\mp i p_{nq}(s - s_0)/\hbar$, так что экспоненциального возрастания амплитуды не бывает, бывает только затухание. Причем мнимая часть энергии частицы означает колебание энергии, с амплитудой, равной мнимой части. В связи с большой амплитудой колебания импульса, и большой мнимой частью волнового числа, равного $k = p_{nq}/\hbar$, частица имеет экспоненциально убывающую вероятность состояния, по мере удаления от начального положения частицы. Т.е. частица локализована.

Всегда имеется точка пространства, в которой импульс и энергия системы изменяется скачком. Это точка описывает размытое состояние другой частицы.

Причем для данной точки существует величина $s_0 = x_1 + x_2 + x_3$. Совершая ортогональное преобразование системы координат, получим новую совокупность точек $s_0 = x_1' + x_2' + x_3'$, связанная ортогональным преобразованием $x_l' = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{lk} x_k$, т.е. поворотом системы координат. Причем величина s_0 это расстояние до плоскости $s_0 = x_1 + x_2 + x_3$. Образуется сфера, радиуса s_0, причем плоскости $s_0 = x_1 + x_2 + x_3$ касаются с этой сферой. Причем на сфере происходит определяемый скачок импульса. В другой точке происходит такое же образование сферы, но с другим радиусом. В результате пересечения этих множества сфер и образуются элементарные частицы. Для генерации тел справедлив принцип Гюйгенса с тем отличием, что генерируются волны из произвольного количества точек, с постоянным радиусом и одинаковыми для каждой точке энергии и импульсе, образуется система стоящих волн.

Причем в случае $|s_0|<<1$ происходит суммирование импульсов разных направлений, что приводит к нулевому суммарному импульсу. Энергия же складывается, причем волновая функция является периодической функцией времени с периодом $T=\frac{2\pi\hbar}{E_\gamma}=\frac{2\pi\hbar}{m_\gamma c^2}=\frac{2\pi 10^{-27}}{10^{-50+21}}=200\pi,[s]$. При этом энергия постоянно генерируется, и в зависимости от малости значения s_0 образуются либо планеты, либо звезды с выделением энергии внутри тела. Характерное время процесса между выделениями энергии равно минимальному размеру s_0, деленному на скорость света $\tau=\frac{s_0}{c}$. Масса частицы вакуума, определяющая среднюю энергию частиц вакуума равна $m_\gamma=10^{-50}g$. Определение массы частиц вакуума см. [2]. Значит выделяемая мощность энергии $N=\frac{m_\gamma c^2}{\tau}=\frac{m_\gamma c^3}{s_0}$. При энергии выделения Солнца $N=3.9\cdot 10^{26}W$ величина s_0 должна равняться $s_0=\frac{m_\gamma c^3}{N}=\frac{10^{-50}27\cdot 10^{30}}{4\cdot 10^{33}}=6.9\cdot 10^{-53}cm$. Это гораздо меньше размера Планка. Чем меньше значение $|s_0|$, тем образующееся тело будет выделять больше энергии и, следовательно, образовывать тело с большой массой. Элементарные частицы образуются при взаимодействии с большим значением s_0, суммарный импульс у них не нулевой и энергия конечна. Пусть частица вакуума приобрела определенный импульс. Она сместится с положения приобретения импульса и на ее месте другая частица приобретет тот же импульс. Т.е. создастся картина ламинарного течения, в случае если импульс действительный. В случае комплексной добавки к импульсу создастся турбулентное течение. Описание комплексного, турбулентного решения см. [3].

Всегда имеется точка пространства, в которой импульс и энергия системы изменяется скачком. Это точка описывает размытое состояние другой частицы.

В результате получим изменение комплексного импульса, разное, для разных частиц $p_{k\mu} = p_k(x_1 + x_2 + x_3)$, в котором все три оси равноправны и происходит колебание с большим количеством периодов, одинаковое вдоль разных осей. Причем эти колебания таковы, что проекция полного момента импульса на пространственную ось имеют постоянное значение. Причем пространственные колебания сводятся к одинаковым вращениям вокруг произвольной оси. Причем решение в другой декартовой инерциальной системе координат будет иметь тот же вид при отсутствии выделенного направления внешнего поля.

Но на самом деле необходимо решать уравнение $[p_k(s)]^2 = \sum_{n=0}^{3} \frac{\partial G_k(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_n} \frac{dp_n}{ds}, k = 2,...,4$ и тогда импульс является функцией s и скачки обусловлены равенством нулю определителя не диагональной матрицы $\frac{\partial G_k(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_n}$ при фиксированном значении энергии E. При этом задача является нелинейной и сложно считаемой.

В случае наличия статического потенциала, зависящего от радиуса, тоже наблюдается сохранение энергии и полного момента импульса системы, так как радиус вращения в детерминированной задаче постоянен, и значение статического потенциала электрического поля постоянно, его можно включить в тензор массы покоя частицы.

Таким образом, уравнение для стандартной модели можно свести к детерминированным уравнениям относительно частиц вакуума. Свойства частиц вакуума см. [2].

Уравнение Дирака учитывает спин электрона за счет вращения четырех частиц. Каждая частица, это сгусток частиц вакуума см. [2]. Происходит вращение вокруг трех пространственных осей, или колебание вдоль четырех осей. Пространственные оси можно повернуть с помощью ортогонального преобразования пространства, при этом возникнут те же оси с тем же вращением. Вокруг этих трех осей происходит вращение четырех частиц с одинаковой проекцией спина, причем каждая частица вращается вокруг всех осей. Это объясняет, почему проекция спина на любую ось одинакова. Если одно из направлений выделено, то вращение вокруг трех осей, переходит во вращение вокруг одной оси. Вращение вокруг каждой оси описывается моментом $\frac{mVr}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = mcr = \hbar/2$, где скорость равна $\frac{V}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = c; \frac{V}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. При этом вращение вокруг оси x_3 сводится к вращению в плоскости $x_1 0 x_2$ с радиусом вращения $r = \frac{\hbar}{2mc}$. Или вращение трех частиц можно описать комплексными координатами. Мнимая часть координаты означает колебание вокруг действительной координаты. При этом формулы выглядят, таким образом $mcir = i\hbar/2$, так как мнимая часть координаты, ответственная за колебание равна $ir = i\hbar/(2mc)$. Эти колебания частиц можно объяснить их вращением, что эквивалентно. Вращение вокруг временной оси сводится к пульсациям во времени четвертой частицы с амплитудой $it = i\hbar/(2mc^2)$.

Вычислим, какова скорость собственного вращения квантовой частицы и каков ее размер, или какова скорость вращения частиц вакуума, описывающих квантовые частицы. Для этого подсчитаем момент инерции электрона при его волновой функции $\psi = \exp(-\alpha w \cdot \sqrt{x^2+y^2}/c + iw\sqrt{x^2+y^2}/c + iEt/\hbar)$ и механический момент импульса определяет оператор спина элементарной массы сферического объема частицы $d\hat{\mathbf{J}} = (\frac{\mathbf{w}\hat{r}^2 dm}{\sqrt{1-\frac{w^2 r^2 \sin^2\theta}{c^2}}})$ с собственным значением $d\hat{\mathbf{J}}\psi = \frac{\mathbf{w}r^2 dm}{\sqrt{1-\frac{w^2 r^2 \sin^2\theta}{c^2}}}\psi$. При этом при суммировании по объему частицы, получим $\hbar\hat{s}\psi = \pm\frac{\hbar}{2}\psi$, равным $mcr = \hbar/2$, что докажем в дальнейшем, где r радиус сферической частицы. При этом при изменении направления импульса частицы спин сохраняется вдоль импульса частицы. Это свойство называется спиральностью. Поэтому оператор спина не равен $\mathbf{J} = [\mathbf{r}, [\mathbf{w}, \mathbf{r}]] = \mathbf{w} r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{w}, \mathbf{r})$, а предполагается $\mathbf{r}(\mathbf{w}, \mathbf{r}) = 0$, что справедливо так как

$$r^2 < \mathbf{e}_l (\mathbf{w}_k, \mathbf{e}_k) >= r^2 w < \mathbf{e}_l \cos(\mathbf{w}_k \hat{,} \mathbf{e}_k) > = r^2 w < \mathbf{e}_l > const = 0 .$$

Согласно свойству спина частицы проекция спина на произвольную ось имеет постоянное полу целое значение, т.е. имеем $\cos(\mathbf{w}_k \hat{,} \mathbf{e}_k) = const$, значит, усреднение второго члена векторного произведения сводится к усреднению радиуса частицы по углам и равно нулю. Когда спин на определенной оси определен и, допустим, равен $1/2$, вероятность проекции спина на расположенную под углом ось равна $w_+ = \cos^2 \theta / 2, w_- = \sin^2 \theta / 2$ см. [1], но в данном случае спин не определен.

Определим потенциал, соответствующий данной волновой функции. Для этого воспользуемся уравнением Клейна-Гордона.

$$(-i \frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{e\varphi_e}{c})(-i \frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{e\varphi_e}{c}) \psi + \hbar^2 \Delta \psi = m^2 c^2 \psi .$$

Подстановка волновой функции приводит к уравнению по определению потенциала и собственной энергии частицы (причем в результате вычислений получим $\alpha = 0$).

$$\begin{aligned} &\hbar^2 \frac{\Delta \psi}{\psi} = \hbar^2 (\frac{3iw}{cr} - \frac{w^2}{c^2}) = \\ &= m^2 c^2 - \frac{(E + e\varphi_e)^2}{c^2} = m^2 c^2 - \frac{(E + U)^2}{c^2} \end{aligned} .$$

Т.е. потенциальную энергию, которая определится из уравнения $\frac{U^2 + 2UE}{c^2} = \frac{3iw}{c} \frac{\hbar^2}{r}$ и собственное значение энергии $E^2 = m^2 c^4 - \hbar^2 w^2 \alpha^2 + \hbar^2 w^2$, причем в результате вычислений получено значение $\alpha = 0$, т.е. поле внутри частиц определяется из квадратного уравнения

$$U = -E + \sqrt{E^2 + 3i\hbar^2 wc/r} = \frac{3i\hbar^2 wc}{2Er}$$

Собственное значение энергии частицы равно $E = \sqrt{m^2c^4 + \hbar^2 w^2}$.

Спин электрона равен $\hbar/2$. Волновая функция равна $\psi = \exp(-\alpha wr/c + iwr/c + iEt/\hbar)$. При этом радиальная скорость частиц вакуума равна нулю, частицы вакуума вращаются с угловой скоростью вокруг каждой из трех осей $w\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sin\theta = wr = w\sqrt{x^2 + y^2}$

$$\hbar/2 = J = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{c/w} \rho r^2 |\psi|^2 \frac{w \cdot r^2}{\sqrt{1 - \frac{w^2 r^2 \sin^2\theta}{c^2}}} \sin\theta dr d\theta d\varphi =$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi}\int_0^{1} \rho x^2 |\psi|^2 \frac{c^5}{\omega^4}\frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2\sin^2\theta}} \sin\theta dx d\theta = \qquad .$$

$$= 2\pi\int_0^{1} \rho \cdot \frac{c^5}{w^4}\frac{x^4}{\sqrt{1 - x^2\sin^2\theta}} \exp(-2\alpha x)\sin\theta d\theta dx = 2\pi\rho \cdot \frac{c^5}{w^4} f(\alpha)$$

$$m = \int_0^{c/w} \rho 4\pi r^2 |\psi|^2 dr = \int_0^{1} \rho 4\pi r^2 \exp(-2\alpha wr/c) dr =$$

$$= 4\pi\rho(w/c)^{-3}\int_0^{1} x^2 \exp(-2\alpha x)dx = \delta(\alpha)4\pi\rho(w/c)^{-3}$$

Где функция $1/\sqrt{1-x^2}$ имеет интегрируемую особенность. Величины $\delta(\alpha)$, $f(\alpha)$ в случае действительного аргумента убывающие положительные функции. Подставляя вычисленную плотность электрона, получим

$$\hbar = 4\pi\frac{c^5}{w^4} f(\alpha)\frac{m(w/c)^3}{4\pi\delta(\alpha)} = \frac{c^2 m}{w} f(\alpha)/\delta(\alpha)$$

Получаем уравнение

$$\frac{f(\alpha)}{\delta(\alpha)} = \frac{\hbar w}{mc^2}.$$

Так как $f(\alpha)$ убывающая положительная функция положительного аргумента, а величина $\delta(\alpha)$ убывающая функция, имеется максимум отношения этих функций. Откуда определим частоту вращения электрона.

$$f(\alpha_{\max})/\delta(\alpha_{\max}) = \frac{\hbar w}{mc^2}.$$

В результате вычисления интеграла на алгоритмическом языке MathCAD получено максимальное значение при условии $\alpha_{\max} = 0$, а для отношения получено значение $\frac{\hbar w}{mc^2} = 2 \pm 10^{-14}$, т.е. энергия частицы определяется по формуле $E = mc^2 = \hbar w/2$, при размере электрона, равном

$$r_e = \frac{c}{w} = \frac{\hbar}{2mc} = 1.931 \cdot 10^{-11} cm, \qquad (2)$$

при определении электромагнитного радиуса электрона, равного величине $r_{ge} = 2e^2/mc^2 = 5.63 \cdot 10^{-13}$. Угловая скорость собственного вращения частиц вдвое больше их комптоновской частоты.

Зная величину частоты вращения частиц вакуума, описывающих электрон, можно определить его максимальный радиус $c/w = \hbar/(2mc)$. Так как сгусток частиц вакуума рассматривается как сферический, максимальный радиус совпадает с радиусом сферы. Справедлива формула для собственного значения оператора спина частицы $\hbar/2 = mcr$, где определен радиус частицы, равный $r = c/w$.

Выводы

Подтверждается, что вероятностное уравнение Дирака сводится к детерминированному уравнению, описывающему частицы вакуума. Описан физический смысл спинора, как колебание четырех частиц, по количеству компонент спинора. Объяснен факт равной проекции спина на любое направление.

Литература

1. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика, т.IV, М.,- «Наука»,1989 г., 727

2. Якубовский Е.Г. Физический смысл уравнений квантовой механики, электродинамики и уравнения ОТО. «Энциклопедический фонд России». 2014г., 65с., http://russika.ru/sa.php?s=890

3. *Якубовский Е.Г.* Исследование решений уравнения Навье – Стокса, "Энциклопедический фонд России", 2014, 60с., http://russika.ru/sa.php?s=868