О риске аппроксимации распределённых структур сосредоточенными

Леонид М. Пустыльников

Германия

Сентябрь 13. 2020

Аннотация. Система с сосредоточенными параметрами (ССП), аппроксимирующая систему с распределенными параметрами (СРП), даже обладая в том или ином смысле свойствами сходимости к СРП, может, тем не менее, по некоторым другим, но существенным признакам качественно и неустранимо отличаться от аппроксимируемой СРП. Поэтому, к аппроксимациям СРП путём приближения их подходящими ССП следует подходить с осмотрительностью.

Теория систем или структур с сосредоточенными параметрами (ССП) исторически возникла и оформилась на десятилетия раньше первых шагов её переноса и обобщения на системы (структуры) с распределёнными параметрами (СРП)[*)]. Описание ССП качественно проще описания СРП. Соответственно, теория ССП во многих чертах проще теории СРП.

Наконец, теория ССП в сравнении с её (далеко нетривиальным!) обобщением на СРП значительно дальше продвинулась на пути к завершению. Возникает естественный соблазн: не выделять СРП в самостоятельный класс систем, аппроксимировать заданную СРП сходящейся к ней ССП, решить соответствующую задачу относительно ССП и, наконец, результаты с любой наперёд заданной точностью проинтерпретировать в терминах первоначальной (исходной) СРП. Тем

[*)] Мы исходим из предложения о том, что если задана система, то есть - уравнения с граничными и начальными условиями, то тем самым определена (задана) и структура – соответствующий этим соотношениям оператор.

самым мы упростили бы исследование и расширили классы реально решаемых задач.

И, в самом деле, что препятствует нам всегда поступать именно таким образом? Конечно, на такой вопрос можно ответить и так, что если бы всё обстояло так просто и приведённая схема рассуждений являлась бы абсолютно непогрешимой, то тогда аналогичными аргументами доказывалась бы ненужность, например, теории сплошных сред, ненужность вообще теории любых физических полей, ненужность уравнений в частных производных, ряда интегральных уравнений и т.д. Но подобный ответ является формальным, не объясняющим в чём тут дело и не отвечающим напрямик на вопрос «почему нельзя?» Конечно, стремление сделать новую задачу нагляднее, свести её к более простой и, одновременно, хорошо разработанной, «проверенной», задаче – такое стремление совершенно естественно и часто на этом пути извлекаются полезные результаты. Однако, необходимо (особенно в задачах управления) принимать во внимание и явления, про которые можно сказать, что они не лежат на поверхности: ССП, аппроксимирующая СРП, даже обладая в том или ином смысле свойствами сходимости к СРП, может, тем не менее, по некоторым другим, но существенным признакам качественно и неустранимо отличаться от аппроксимируемой СРП. Поэтому, к аппроксимациям СРП путём приближения их подходящими ССП следует подходить с осмотрительностью.

Рассмотрим конкретные примеры.

1. Распределённый одномерный колебательный объект, описываемый соотношениями

$$\frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} = 0 \ , \qquad (1)$$

$$Q(0,t) = u(t) \ , \quad Q(l,t) = 0 \ , \qquad (2)$$

где $Q(x,t)$ - отклонение от состояния равновесия, v_0 – скорость распространения возмущения, требуется успокоить за время T с помощью входящего в краевое условие управляющего воздействия $u(t)$, т.е. требуется найти такое управление $u(t)$ на интервале времени $[0,T]$, чтобы система (1), (2) перешла из начального возмущённого (неравновесного) состояния

$$Q(x,o) = Q_0(x)\ ,\quad \frac{\partial Q}{\partial t}(x,o) = Q_1(x) \tag{3}$$

в состояние покоя (равновесия) в момент времени $t = T$, т.е.

$$Q(x,T) = 0\ ,\quad \frac{\partial Q}{\partial t}(x,T) = 0\ . \tag{4}$$

Из физических соображений ясно, что для этого время T, вообще говоря, не может быть меньше чем $T_0 = \frac{2l}{v_0}$. В самом деле, указанное время как раз является временем, чтобы сигнал, распространяющийся со скоростью v_0, успел пробежать объект хотя бы раз из одного его конца в другой и обратно. В противном случае, какие-то участки этого протяжённого объекта вообще могут оказаться не затронутыми управлением (за меньшее время управляющий сигнал просто не успеет куда-то добежать). Иными словами, эта система за меньшее, чем T_0, время, вообще говоря, неуправляема.

Пусть теперь, имея ввиду упростить исследование, мы аппроксимировали распределённую структуру в (1), (2) сосредоточенной, применив для этого метод прямых. Тогда распределённое состояние $\left(Q(x,t),\dot{Q}(x,t)\right)$ приближённо заменится сосредоточенным состоянием $\left(q_0(t), q_1(t), \dots, q_N(t), \dot{q}_1(t),\ \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_N(t)\right)$, где $q_i(t) = Q(ih,t),\ h$ - шаг по пространственной координате, N - общее число шагов. А после аппроксимации второй пространственной производной разностным отношением описание (1), (2) заменится описанием

$$s^2\frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} + 2q_i(t) - q_{i-1}(t) - q_{i+1}(t) = 0\ , \tag{5}$$

$$q_0(t) = u(t) \ , \quad q_N(t) = 0 \ , \tag{6}$$

где $s^2 = \frac{h^2}{v_0^2}$, $i = 1,2,\ldots,$ $N-1$. Теперь вопрос заключается уже в управлении системой (5), (6). На первый взгляд может показаться, что чем большим мы выберем N, тем лучше приблизимся к точному результату.

Однако, это не так.

В [1] показано, что систему (5), (6), в отличие от (1), (2), можно успокоить за сколь угодно малое время, причём при любом, даже очень большом N. Произошло это потому, что платой за данную аппроксимацию выступило устранение пространственного континуума. Проще говоря, в (5), в отличие от (1), нет непрерывной пространственной координаты, вдоль которой могла бы с какой-то конечной скоростью идти волна.

Уже приведённый пример показывает, что **распределённые структуры могут иметь особенности, которыми сосредоточенные их приближения любого конечного порядка не обладают**.

2. Как известно [2], для устойчивости системы, описание которой «опирается» на описание сосредоточенной структуры и только на неё, в широком классе случаев **достаточно**, чтобы все собственные временные комплексные частоты данной структуры лежали в левой z - полуплоскости.

При переходе же к СРП, мы наталкиваемся на **неожиданный** факт: указанное расположение всех названных частот **может оказаться недостаточным для устойчивости СРП**. Развёрнутое изложение и доказательство этого интересного явления содержится в замечательной книге [3]. Там же даны и достаточные признаки устойчивости СРП.

Таким образом, и по условиям устойчивости аппроксимация СРП путём её замены на «близкую» ССП может также таить в себе опасность – утрату важного качества.

3. В соотношении [4]

$$\tilde{E}(x,p) = \left[\delta(x-\xi) + W_0(x,\xi,p) \otimes W_y(x,\xi,p)\right]^{-1} \otimes \otimes \left(\tilde{Q}_0(x,p) - \tilde{Q}_{\text{в}}(x,p)\right) \qquad (7)$$

относящемся к замкнутой системе автоматического управления распределёнными структурами, выражение

$$\left[\delta(x-\xi) + W_0(x,\xi,p) \otimes W_y(x,\xi,p)\right]^{-1} \qquad (8)$$

представляет собой передаточную функцию по каналу от $\left(\tilde{Q}_0(x,p) - -\tilde{Q}_{\text{в}}(x,p)\right)$ к $\tilde{E}(x,p)$.

Допустим, по каким-то причинам нас не устраивает такая передаточная функция. Требуется заменить её на другую так, чтобы реализовалось равенство

$$\left[\delta(x-\xi) + W_0(x,\xi,p) \otimes W_y(x,\xi,p)\right]^{-1} = W^{-1}(x,\xi,p) \ , \qquad (9)$$

в котором $W(x,\xi,p)$ - задаваемая нами функция. Отысканию подлежит передаточная функция $W_y(x,\xi,p)$ управляющей структуры.

В развёрнутом виде уравнение (9) имеет вид

$$\int_D W_0(x,\eta,p) W_y(\eta,\xi,p) d\eta = W(x,\xi,p) - \delta(x-\xi) \ , \qquad (10)$$

т.е. представляет интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода относительно $W_y(x,\xi,p)$.

Анализ и решение такого уравнения относится к классу **некорректных** задач. Обсуждение особенностей этого уравнения содержится в [5,6].

Допустим теперь, что, желая упростить исследование, мы аппроксимируем распределённые структуры в системе авторегулирования близкими, в том или ином смысле, но сосредоточенными структурами.

Место соотношения (7), займёт тогда соотношение [4]:

$$\tilde{E}(p) = \left[1 + W_0(p) \cdot W_y(p)\right]^{-1} \cdot \left(\tilde{Q}_0(p) - \tilde{Q}_{\text{в}}(p)\right) . \qquad (11)$$

Вновь поставим задачу отыскания такой передаточной функции $W_y(p)$ управляющего блока (звена), под действием которой реализуется равенство

$$\left[1 + W_0(p) \cdot W_y(p)\right]^{-1} = W^{-1}(p) \ , \tag{12}$$

где $W(p)$ - заранее заданная функция.

Преобразуем (12) к виду

$$W_0(p) \cdot W_y(p) = W(p) - 1 \tag{13}$$

− аналогу уравнения (10).

Но теперь мы имеем дело уже не с интегральным, а с алгебраическим уравнением относительно искомой передаточной функции $W_y(p)$. Решение уравнения (13) элементарно.

Казалось бы, что действительно достигнуто существенное упрощение. **Однако, уравнение (10) представляет собой некорректную задачу, в то время как уравнение (13) никакой некорректности не содержит.**

Следовательно, при аппроксимации уравнения (10) уравнением (13) утрачивается дихотомия, изложенная в [4]. Это – потеря качественных особенностей замкнутой системы автоматического управления именно распределёнными структурами, а не ССП.

Поэтому, и **здесь замена СРП на ССП, строго говоря, также непозволительна.**

Существуют и другие интересные примеры неожиданной (т.е., как правило, не предполагаемой интуитивно) и неустранимой потери качества при приближённой замене СРП на ССП.

Но, конечно, такого рода примеры не должны пониматься таким образом, что при исследовании распределённых структур мы вообще не вправе аппроксимировать последние сосредоточенными. Однако, мы должны знать, что при аппроксимациях может возникать множество сопутствующих эффектов, нередко требующих отдельного рассмотрения. Речь, следовательно, идёт о том, что всякий раз, выбирая аппроксимацию, мы должны стремиться к ясному и полному пониманию того, какие качественные и количественные стороны в решениях рассматриваемых задач могут быть в итоге утрачены, и можем ли мы эти утраты принять или нет. В ряде случаев аппроксимация вовсе может оказаться нецелесообразной, так как более полный, а иногда и исчерпывающий, результат может быть, и причём более простым путём, установлен в терминах распределённой структуры.

Примечания:

1. А.Г.Бутковский. Структурная теория распределенных систем. – М.: Наука, 1977
2. А.Г.Бутковский. Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1979
3. Т.К.Сиразетдинов. Устойчивость систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1987
4. О.О.Фейгин, О.И.Золотов, Л.М.Пустыльников. Кибернетика физики. – СПб.: СПбГУТ, 2014
5. М.Л.Краснов. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1976
6. А.Б.Васильева, Н.А.Тихонов. Интегральные уравнения. – М.: МГУ, 1989