О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННЫМИ ТОЧКАМИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА-РИМАНА В ЦЕЛЫХ ТОЧКАХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Александр Нодарович Ахвледиани

5 ноября 2011 г.

Энциклопедический

Фонд Russika

Санкт-Петербург, Россия

Международное научно-техническое общество

«INCOL»

Кармиэль, Израиль

О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННЫМИ ТОЧКАМИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА-РИМАНА В ЦЕЛЫХ ТОЧКАХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

А.Н. Ахвледиани

Научно-техническое общество «INCOL» (Israel – Georgia)

E-mail – alexanderakhvlediany@yandex.ru

Аннотация

В настоящей статье рассматриваются некоторые свойства исходной комплексной дзета-функции Эйлера-Римана $z(s)$, в той части действительной оси комплексной плоскости, где значения функции $z(s)$ стремятся к бесконечности. Установлено наличие функциональной связи между бесконечно удаленными точками дзета-функции Эйлера-Римана в целых точках действительной оси комплексной плоскости.

Как известно, комплексная дзета-функция Эйлера-Римана имеет следующий вид:

$$z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots\ldots, \qquad (1)$$

где $s \in C$, C - множество всех комплексных чисел. При этом имеется в виду, что рассматривается полная комплексная плоскость.

Известно следующее аналитическое свойство дзета-функции Эйлера-Римана $z(s)$ в области $\{s \,|Res > 1\}$ комплексной плоскости.

<u>Свойство 1</u>

В области $\{s \,|Res > 1\}$ дзета-функция $z(s)$ является аналитической, а ряд $z(s_0)$, соответствующий каждому фиксированному комплексному значению $s = s_0$, является сходящимся.

Следующий результат принадлежит авторам - Whittaker, Watson (1990 г.) - /1/, и описывает свойство $z(s)$ при стремлении аргумента функции вдоль действительной оси к точке $s = 1\,(s > 1)$.

Свойство 2

При изменении аргумента s ***функции*** $z(s)$ ***вдоль действительной оси комплексной области, в бесконечно малой окрестности*** $e > 0$ ***числа*** 1, - ***дзета-функция*** $z(s)$ ***удовлетворяет следующему соотношению:***

$$\lim_{s \to 1}\left[\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right] = \gamma, \qquad (2)$$

где g ***- константа Эйлера-Маскерони,*** $g = 0.5772156649015328606065\mathbf{12....}$

Перейдем к рассмотрению некоторых свойств исходной функции Эйлера-Римана (1) на действительной оси полной комплексной области в интервале $-\infty < r \le 1, r \in R$, где R - все множество действительных чисел. При этом необходимо подчеркнуть, что мы рассматриваем свойства именно исходной функции Эйлера-Римана (1), без применения функционального уравнения Римана.

Имеет место следующее свойство дзета-функции Эйлера-Римана, непосредственно вытекающее из соотношения (1).

Свойство 3

При изменении действительного аргумента r ***функции*** $z(r)$ ***в интервале***

$$-\infty < r \le 1, r \in R, \qquad (3)$$

в каждой точке упомянутого интервала, функция $z(r)$ ***имеет бесконечно удаленную точку*** $+\infty$ **.**

Здесь необходимо отметить, что в рамках комплексного анализа, при рассмотрении комплексной функции в полной комплексной области, в том числе рассматриваются бесконечно удаленные значения аргумента и бесконечно удаленные значения функции.

В работе /2/, был рассмотрен дзета-класс - Z_r, определенный на множестве всех действительных чисел, следующим образом:

$$Z_r = \{z(r_0) \mid \forall r_0 \in R : z(r_0) = z(r_0)\} \qquad (4)$$

В отношении Z_r класса была доказана следующая теорема о его границах /2/.

Теорема о границах дзета-класса

Нижней и верхней границей Z_r***-класса, определенного на множестве действительных чисел, являются соответственно*** 1 ***и*** $+\infty$.

Сравнивая (1) и (4) при условиях $z(s) = z(r), s = r(-\infty < r < \infty)$, нетрудно видеть, что границы Z_r класса являются одновременно границами дзета-функции $z(r)$ Эйлера-Римана, определенной на действительной оси полной комплексной плоскости. Это является одним из свойств дзета-функции Эйлера-Римана $z(r)$.

Свойство 4

Нижней и верхней границами дзета-функции Эйлера-Римана $z(r)$***, при изменении ее на множестве действительных чисел, являются соответственно*** 1 ***и*** $+\infty$.

Следующее утверждение описывает свойство функции $z(r)$ при $r = 0$.

Свойство 5

В центральной нулевой точке комплексной плоскости, значение дзета-функции Эйлера-Римана в бесконечно удаленной точке равно кардинальному числу $\aleph_0$ ***множества всех натуральных чисел.***

Действительно, в соответствии с /3/, кардинальное число $\aleph_0$ множества всех натуральных чисел определяется следующим образом:

$$\aleph_0 = 1+1+1+\ldots+1+\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5)$$

С другой стороны, из соотношения (1) в частном случае следует:

$$z(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} = 1+1+1+\ldots+1+\ldots\ldots \qquad (6)$$

Из сопоставления (5) и (6) следует:

$$z(0) = \aleph_0 \qquad (7)$$

Свойство 6

В точке $r = -1$ ***действительной оси комплексной плоскости бесконечно большое значение дзета-функции Эйлера-Римана*** $z(-1)$ ***является бесконечно большой величиной большего порядка по сравнению с*** $z(0)$ ***и кардинальным числом*** $\aleph_0$ ***.***

Действительно, исходя из соотношений (1), (6) и (7) следует:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{0.5 \cdot (1+n) \cdot n}{n} \to \infty \tag{8}$$

Из соотношения (8) следует, что порядок бесконечно большой величина $z(-1)$ превышает порядок бесконечно большой величины $z(0)$.

Следующее свойство выражает функциональную связь между двумя бесконечно удаленными точками дзета-функции Эйлера-Римана, лежащими в бесконечной области действительной оси, при условии, что аргумент одной из них равен действительному нулю. Это свойство подтверждается логико-аналитической программой вычислительного математического пакета **MATCAD**.

Свойство 7 (Существование локальной предельной функциональной связи между двумя бесконечно удаленными точками дзета-функции Эйлера-Римана $z(r)$– А.Н.Ахвледиани, 2011).

Для двух бесконечно удаленных точек дзета-функции Эйлера-Римана, аргумент одной из которых равен неположительному целому действительному числу, а аргумент другой равен действительному 0, выполняются следующие соотношения:

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{A\zeta(-m,n)}{(A\zeta(0,n))^{m+1}} \right] = \frac{1}{m+1} \tag{9}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{-m}}}{n^{m+1}} \right) = \frac{1}{m+1} \tag{10}$$

где, $Az(-m,n)$ - сумма частичного ряда дзета-функции стремящаяся к бесконечности при фиксированном неотрицательном целом m, и $n \to \infty$; $Az(0,n)$- сумма частичного ряда дзета-функции $z(0)$, стремящаяся к бесконечности при $n \to \infty$.

Необходимо подчеркнуть, что соотношения (9) и (10) рассматриваются нами с точки зрения концепции «потенциальной бесконечности». Согласно этому понятию, «потенциально бесконечной» признается например бесконечно большая величина, на единицу большая, сколь угодно большего наперед заданного натурального числа N_0. В этом случае свойство «потенциальной бесконечности» такой переменной величины n, т.е. процесс ее стремления к бесконечности, формально может быть выражен следующими образом:

$$(\forall n, N_0 : \forall N_0 \in N \wedge n = N_0 + 1) \Rightarrow (n \to +\infty) \quad (11)$$

где, N - все множество натуральных чисел.

Для переменной величины $A(n), n \to +\infty$, процесс ее стремления к «потенциальной бесконечности» формально может быть выражен следующим образом:

$$(n \to +\infty, A(n), (N_0, M_0 \in N), \forall M_0 \exists N_0 : n > N_0 \Rightarrow | A(n) | > M_0) \Rightarrow (A(n) \to \infty) \quad (12)$$

Непосредственно из соотношений (9) и (10) вытекает следующее свойство дзета-функции Эйлера-Римана.

<u>Свойство 8 (Существование функциональных связей между элементами множества бесконечно удаленных точек дзета-функции Эйлера-Римана</u> $z(r)$ – А.Н.Ахвледиани, 2011).

Для бесконечно удаленных точек дзета-функции Эйлера-Римана $z(r)$ ***, аргумент каждой из которых равен целому действительному числу, а аргументы всех бесконечно удаленных точек отличны друг от друга, имеют место следующие соотношения:***

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[\lim_{n \to \infty} \left[\frac{A\zeta(-m, n)}{(A\zeta(0, n))^{m+1}} \right] \right] = \zeta(1) \quad (13)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{-m}}}{n^{m+1}} \right) \right] = \zeta(1) \quad (14)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(A\zeta(0,n))^{m+1}}{A\zeta(-m,n)}\right]\right]=\zeta(-1) \qquad (15)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{m+1}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{-m}}}\right)\right]=\zeta(-1) \qquad (16)$$

Таким образом мы видим, что существует функциональная связь в виде равенств (13) - (16), между бесконечно удаленными точками дзета-функции Эйлера-Римана, аргументы которых расположены в целых точках действительной оси комплексной плоскости.

Используемые источники:

1. **Дзета-функция Римана -** http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html

2. **Ахвледиани А.Н. О границах дзета-класса. Энциклопедический Фонд Russika. 2011.**

3. **Ф.Хаусдорф. Теория множеств. URSS. Москва. 2007.**