Решение систем обыкновенных нелинейных уравнений Р порядка с учетом дискретного излучения

Е.Г. Якубовский.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Аннотация

Системы нелинейных уравнений в частных производных сводятся к системе нелинейных уравнений с счетным количеством неизвестных и уравнений. С помощью редукции удается свести их к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В статье исследуются уравнения с частной производной Р порядка как по времени, так и по координате. Удалось построить общую формулу решения относительно функции времени с помощью координат положения равновесия. Получены условия, когда происходит излучение энергии, как непрерывное, так и дискретное.

1. Сведение системы квазилинейных уравнений в частных производных к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

Решение систем уравнений в частных производных с первой производной по времени исследовано в [1]. Системы уравнений с частной производной по времени второго порядка исследованы в [2].

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2} + \sum_{l,n=1}^{L} [a_{0nl}(x_1,...,x_3) + \sum_{s=1}^{L} a_{1nls}(x_1,...,x_3)U_s + ...]\frac{\partial^2 U_k}{\partial x_l\,\partial x_n} +$$

$$+\sum_{l=1}^{L} [b_{0l}(x_1,...,x_3) + \sum_{s=1}^{L} b_{1ls}(x_1,...,x_3)U_s + ...]\frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \quad .$$

$$+[c_0(x_1,...,x_3) + \sum_{s=1}^{L} c_{1s}(x_1,...,x_3)U_s + ...]U_k = d_k(x_1,...,x_3), k = 1,...,L$$

Решение ищем с помощью подстановки в дифференциальное уравнение функции $\mathbf{U}(t,x_1,...,x_3)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{b}_n(t)\varphi_n(x_1,...,x_3)$. При этом величина $d_k(x_1,...,x_3)$, это внешнее воздействие. Для решения этого уравнения подставляем разложение функции решения в уравнение в частных производных, умножаем на величину $\varphi_s(x_1,...,x_3)$ и интегрируем по пространству. Получим дифференциальное уравнение (1). Функции $\varphi_n(x_1,...,x_3)$ выберем синусоидальными, тогда если решение непрерывная функция, то коэффициенты ряда убывают как величина $1/n^2$, и процесс редукции возможен.

Исследуем нелинейное обыкновенное уравнение со второй производной по времени, где при действительных аргументах $b_1,...,b_N$ уравнение имеет однозначную правую часть

$$\frac{d^2b_s}{dt^2}=F_s(b_1,...,b_N),s=1,...,N\,. \qquad (1)$$

Системы уравнений, содержащие первую производную по времени в правой части, приводятся к виду (1). Допустим, имеем уравнение

$$\frac{d^2b_s}{dt^2}=F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt}),s=1,...,N\,. \qquad (2)$$

Если величина $F_s(b_1,...,b_N,0,...,0)=0,s=1,...,N$ допускает конечное количество совокупностей корней, то систему можно представить в виде

$$\begin{gathered}\frac{dy_{s+N}}{dt}=F_s(y_1,...,y_N,y_{N+1},...,y_{2N}),s=1,...,N\\ \frac{dy_s}{dt}=y_{s+N};y_s=b_s,y_{s+N}=\frac{db_s}{dt}\end{gathered}\,.$$

С координатами положения равновесия

$$\begin{gathered}F_s(\beta_1^k,...,\beta_N^k,0,...,0)=0,k=1,...,K\\ y_{s+N}=\beta_{s+N}^1=0;s=1,...,N\end{gathered}\,.$$

Тогда система дифференциальных уравнений приводится к виду

$$\frac{dy_s}{dt} = \frac{dh_s}{dt}\prod_{k=1}^{K}(y_s - \beta_s^k), \frac{dy_s}{dh_s} = \prod_{k=1}^{K}(y_s - \beta_s^k); s = 1,...,N;$$

$$\frac{dh_s}{dt} = \frac{F_s[y_1(h_1),...,y_N(h_N), y_{N+1}(h_{N+1}),...,y_{2N}(h_{2N})]}{\prod_{k=1}^{K}[y_s(h_s) - \beta_s^k]}, s = 1,...,N;$$

$$\frac{dy_{s+N}}{dh_{s+N}} = y_{s+N}; \frac{dh_{s+N}}{dt} = \frac{y_{s+N}(h_{s+N})}{y_s(h_s)}, s = 1,...,N$$

Величина $y_{s+N} = y_{s+N}^0 \exp(h_{s+N})$. Откуда имеем $\frac{dh_{s+N}}{dt} = \frac{y_{s+N}^0 \exp(h_{s+N})}{y_s(h_s)}$. При условии $y_s(h_s) \to \beta_s^k, \mathrm{Re}\, y_{s+N}^0 / \beta_s^k < 0, s = 1,...,N$ для фиксированного k, имеем $h_{s+N} \to -\infty$, т.е. $y_{s+N} \to 0$ и стремление к положению равновесия $\beta_s^k, s = 1,...,N$.

Продифференцируем дифференциальное уравнение (2) по времени, получим

$$\frac{d^3 b_s}{dt^3} = \frac{\partial F_s(b_1,...,b_N, \frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt})}{\partial b_k}\frac{db_k}{dt} + \frac{\partial F_s(b_1,...,b_N, \frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt})}{\partial b_k} \times$$

$$\times F_s(b_1,...,b_N, \frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt})$$

Введя новые переменные $y_n = b_n, y_{n+N} = \frac{db_n}{dt}, n = 1,...,N;$, получим систему уравнений с новыми координатами равновесия

$$\frac{d^2 y_s}{dt^2} = F_s(y_1,...,y_{2N}), s = 1,...,2N.$$

Совершенно аналогично из общего уравнения P порядка можно получить уравнение

$$\frac{d^P y_s}{dt^P} = F_s(y_1,...,y_{PN}), s = 1,...,PN$$

2. Решение системы нелинейных уравнений

Теорема 1. Рассматривается задача Коши при произвольных действительных начальных условиях для системы нормальных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (1). Она имеет конечное число не кратных положений равновесия. Случай вырожденного решения задачи Коши – положения равновесия, не рассматривается. В случае если у системы (1) имеются комплексно-сопряженные положения равновесия с действительной частью, то при конечном аргументе t действительное решение задачи Коши системы (1) при действительных начальных условиях стремится к бесконечности, при этом комплексное решение конечно.

Доказательство.

Приведем правую часть этого уравнение к уравнению в собственных значениях, воспользовавшись преобразованием $b_s(t) = \sum_l g_{sl} c_l(t)$, где величина собственных векторов g_{sl} и собственных чисел Λ_l определяется из уравнений $|\frac{\partial F_s}{\partial b_s} - \Lambda_k^P \delta_{sn}| = 0, (\frac{\partial F_s}{\partial b_s} - \Lambda_k^P \delta_{sn}) g_{nk} = 0$.

Где величина $\frac{\partial F_s}{\partial b_n}$ определена в координатах положения равновесия системы дифференциальных уравнений. В новых переменных $c_l(t)$ дифференциальное уравнение запишется в виде

$$\frac{d^2 c_l}{dt^2} = (\Lambda_l^s)^P (c_l - \alpha_l^s) + (c_l - \alpha_l^s)^2 P_l(c_1,...,c_N) = \Phi_l(c_1,...,c_N). \quad (2)$$

Находим координаты положения равновесия этой системы нелинейных дифференциальных уравнений α_l^s, которые определятся из уравнений $\Phi_l(\alpha_1^s,...,\alpha_N^s) = 0, l = 1,..., N$. Тогда уравнение запишется в виде

$$\frac{d^P c_l}{dt^P} = \exp[H_l(t)] \frac{d^P c_l}{dh(t)^P} = \exp[H_l(t)] \prod_{s=1}^{S} (c_l - \alpha_l^s). \quad (3)$$

Вычислим величину $h(t)$ для частной производной по времени второго порядка. Для произвольного порядка она считается аналогично.

$$\frac{d^2c_l[h_l(t)]}{(dt)^2}=\frac{d}{dt}[\frac{dc_l[h_l(t)]}{dh(t)}\frac{dh(t)}{dt}]=\frac{dc_l[h_l(t)]}{dh_l(t)}\frac{d^2h_l(t)}{dt^2}+\frac{d^2c_l[h_l(t)]}{[dh_l(t)]^2}[\frac{dh_l(t)}{dt}]^2=$$

$$=2\frac{dc_l[h_l(t)]}{dh_l(t)}[\frac{d\sqrt{h_l(t)}}{dt}]^2+\frac{d^2c_l[h_l(t)]}{[dh_l(t)]^2}[\frac{dh_l(t)}{dt}]^2= \qquad (4)$$

$$=\frac{dc_l[h_l(t)]}{dh_l(t)}\frac{[dh_l(t)]^2}{2h_l(t)dt^2}+\frac{d^2c_l[h_l(t)]}{[dh_l(t)]^2}[\frac{dh_l(t)}{dt}]^2$$

Тождество (4) получается с помощью равенства $\frac{d^2h_l(t)\}}{2[d\sqrt{h_l(t)}]^2}=1$. Откуда получим уравнение (5).

$$\exp\{-H_l[c_1(h_l),...,c_N(h_l)]\}\{\frac{dc_l[h_l(t)]}{2h_l(t)dh_l(t)}+\frac{d^2c_l[h_l(t)]}{[dh_l(t)]^2}\}[\frac{dh_l(t)}{dt}]^2=\frac{d^2c_l[h_l(t)]}{[dh_l(t)]^2} \qquad (5)$$

При этом, зная из решения дифференциального уравнения зависимость $c_l(h_l)$ определим зависимость $h_l(t)$ из уравнения (5).

Откуда зная из уравнения (8) функцию $c_l(h_l)$, получим $c_l(t)$. Имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^Pc_l}{dh_l^P}=\prod_{s=1}^{S}(c_l-\alpha_l^s)=D(c_l). \qquad (8)$$

Разделим дифференциальное уравнение (8) на правую часть и полученную дробь разложим на сумму простых дробей. Получим

$$\sum_{s=1}^{S}\frac{\lambda_l^s d^Pc_l}{c_l-\alpha_l^s}=dh_l^P \qquad (9)$$

$$\lambda_l^s=\frac{1}{\prod_{k=1}^{s-1}(\alpha_l^s-\alpha_l^k)\prod_{k=s+1}^{S}(\alpha_l^s-\alpha_l^k)}.$$

Лемма 1. Сумма коэффициентов $\lambda_l^s=\frac{Q_{S-1}(a_l^s)}{\prod_{k=1}^{s-1}(a_l^s-a_l^k)\prod_{k=s+1}^{S}(a_l^s-a_l^k)}$ по индексу s равна нулю, т.е. $\sum_{s=1}^{S}\lambda_l^s=0$. Где $Q_{S-1}(y)$ полином степени $S-1$. В случае полинома более высокой степени, условие $\sum_{s=1}^{S}\lambda_l^s=0$ не выполняется.

Дробь разлагается на простые дроби

$$\frac{Q_{S-1}(y)}{(y-a_l^1)...(y-a_l^{s-1})(y-a_l^{s+1})...(y-a_l^S)}=\sum_{s=1}^{S}\frac{\lambda_l^s}{y-a_l^s}.$$

Докажем, что выполняется $\sum_{s=1}^{S}\lambda_l^s=0$, причем как не трудно убедиться коэффициенты λ_l^s определяются по формуле $\lambda_l^s=\dfrac{Q_{s-1}(a_l^s)}{(a_l^s-a_l^1)...(a_l^s-a_l^{s-1})(a_l^s-a_l^{s+1})...(a_l^s-a_l^S)}$. Для чего рассмотрим сумму

$$P(y)=\sum_{s=1}^{S}\frac{Q_{S-1}(a_l^s)(y-a_l^1)...(y-a_l^{s-1})(y-a_l^{s+1})...(y-a_l^S)}{(a_l^s-a_l^1)...(a_l^s-a_l^{s-1})(a_l^s-a_l^{s+1})...(a_l^s-a_l^S)}.$$

Эта сумма равна $P(y)=Q_{S-1}(y)$, так как в S точках выполняется $P(a_l^s)=Q_{S-1}(a_l^s), s=1,...,S$. Распишем формулу для полинома, равного $Q_{S-1}(y)$, разделив его на произведение $(y-a_l^1)...(y-a_l^S)$, получим

$$\begin{gathered}\sum_{s=1}^{S}\frac{Q_{S-1}(a_l^s)}{(a_l^s-a_l^1)...(a_l^s-a_l^{s-1})(a_l^s-a_l^{s+1})...(a_l^s-a_l^S)(a_l^s-y)}+\\+\frac{Q_{S-1}(y)}{(y-a_l^1)...(y-a_l^{s-1})(y-a_l^s)(y-a_l^{s+1})...(y-a_l^S)}=0\end{gathered}.$$

полагая, $y=a_l^{S+1}$ получим тождество $\sum_{s=1}^{S+1}\lambda_l^s=0$, в случае, если имеется $S+1$ положение равновесия. Полученная формула в тексте статьи используется в двух случаях $Q_{S-1}(y)=1, Q_{S-1}(y)=y^{p-1}, p=1,...,S$.

Следует различать величину $d^2c_l=c_l(h_l+\Delta h_l)+c_l(h_l-\Delta h_l)-2c_l(h_l)$ и величину $dh_l^2=(\Delta h_l)^2$ при условии $\Delta h_l\to 0$.

При этом имеем $\int\limits_{h_l^0}^{h_l} dx_P ... \int\limits_{h_l^0}^{x_1} dx_1 = (h_l - h_l^0)^P / P! = p_l(h_l)$. $\frac{d^P p_l(h_l)}{dh_l^P} = 1$. Или $d^P p_l(h_l) = dh_l^P$. Причем имеем $\frac{d^P (c_l)^P / P!}{dc_l^P} = 1$, запишем это равенство по-другому

$$\frac{d^P c_l}{d(\sqrt[P]{P! c_l})^P} = 1 \qquad (10)$$

Получим с помощью этого равенства первые интегралы этого уравнения

$$\frac{d^p c_l}{dh_l} = (\frac{d^{2} \sqrt[P/2]{P! c_l}}{dh_l^2})^{p/2} = D_l(\sqrt[P]{c_l})$$

/

$$\frac{d^{2} \sqrt[P/2]{P! c_l}}{dh_l^2} = [D_l(\sqrt[P/2]{c_l})]^{2/P}$$

Умножаем это равенство на величину $\frac{d \sqrt[P/2]{P! c_l}}{dh_l}$, получим

$$\frac{d}{dh_l}(\frac{dy}{dh_l})^2/2 = \frac{d}{dh_l}\int_0^y [D_l(z)]^{2/p} dz \,; y = \sqrt[P/2]{P!\, c_l}.$$

Откуда получаем интеграл энергии

$$(\frac{dy}{dh_l})^2/2 = \int_0^y [D_l(z)]^{2/p} dz + H_l \qquad (11)$$

Т.е. используя, равенство (9) и (10), получим

$$d^P g_l = \sum_{s=1}^{S} \frac{\lambda_l^s d(\sqrt[P]{P! c_l})^P}{c_l - \alpha_l^s} = dh_l^P = d^P p_l(h_l) \qquad (12)$$

Значение $g_l = g_l(\sqrt[P]{c_l})$, можно представить в виде интеграла $g_l(\sqrt[P]{c_l}) = \int\limits_{\sqrt[P]{c_l^0}}^{\sqrt[P]{c_l}} ... \int\limits_{\sqrt[P]{c_l^0}}^{x_1} f(x_1) dx_1 ... dx_P$

$$\frac{d^P g_l(\sqrt[P]{c_l})}{d(\sqrt[P]{c_l})^P} = f(\sqrt[P]{c_l}) = \frac{P! \lambda_l^s}{\prod\limits_{p=1}^{P} [\sqrt[P]{c_l} - (\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p]} =$$

$$= \sum_{p=1}^{P} \frac{\lambda_l^s \Lambda_l^{ps}}{\sqrt[P]{c_l} - (\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p}, \Lambda_l^{ps} = \frac{1}{\prod\limits_{q=1}^{p-1} [\sqrt[P]{(\alpha_l^s)^q} - (\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p] \prod\limits_{q=p+1}^{P} [\sqrt[P]{(\alpha_l^s)^q} - (\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p]} .(13)$$

Проверяется это равенство путем подстановки $g_l(\sqrt[P]{c_l}) = \int\limits_{\sqrt[P]{c_l^0}}^{\sqrt[P]{c_l}} \ldots \int\limits_{\sqrt[P]{c_l^0}}^{x_1} f(x_1)dx_1 \ldots dx_P$

в дифференциальное уравнение (12). Имеем интеграл

$$\int\limits_b^x \int\limits_b^{x_{P-1}} \ldots \int\limits_b^{x_1} \frac{dx_1 \ldots dx_P}{x_1 - a} = \sum_{k=1}^{P-1} (-1)^{k+1}(x-a)^{P-k}/(P-k)![\ln(x-a) - P + 1] -$$

$$-\sum_{k=1}^{P} \frac{(x-a)^{P-k}}{(P-k)!}\frac{(b-a)^k}{k!}[\ln(b-a) + 2\pi i \Delta n - 1] =$$

$$= \sum_{k=1}^{P-1} (-1)^{k+1}(x-a)^{P-k}/(P-k)![\ln(x-a) - P + 1] -$$

$$-[\frac{(x-b)^P}{P!} - \frac{(b-a)^P}{P!}][\ln(b-a) + 2\pi i \Delta n - 1]$$

Из равенства (12), получим $d^P g_l(c_l) = d^P p_l(h_l)$, откуда имеем $g_l(c_l) = p_l(h_l), g_l(c_l^0) = p_l(h_l^0) = 0$,

$$\frac{d^q g_l}{dh_l^q}|_{h_l = h_l^0} = \sum_{k=0}^{q} C_q^k \frac{d^k g_l}{d(\sqrt[P]{c_l})^k}\frac{d^{q-k}\sqrt[P]{c_l}}{dh_l^{p-k}}|_{h_l = h_l^0} = \frac{d^q p_l}{dh_l^q}|_{h_l = h_l^0} = a_l^q, q = 1, \ldots, P-1.$$

Откуда следует начальное условие для величины $\frac{d^q p_l}{dh_l^q}|_{h_l}$. Из этого равенства взятого в момент времени h_l можно определить производные из линейного уравнения

$$\frac{d^q g_l}{dh_l^q}|_{h_l} = \sum_{k=0}^{q} C_q^k \frac{d^k g_l}{d(\sqrt[P]{c_l})^k}\frac{d^{q-k}\sqrt[P]{c_l}}{dh_l^{p-k}}|_{h_l} = \sum_{k=0}^{q} C_q^k \frac{d^k g_l}{d(\sqrt[P]{c_l})^k}\frac{d^{q-k} c_l}{Pc_l^{1-1/P} dh_l^{p-k}}|_{h_l} =$$
$$= \frac{d^q p_l}{dh_l^q}|_{h_l}, q = 1, \ldots, P-1 \qquad (14)$$

Интегрируя (12), получим

$$g(c_l)=\sum_{s=1}^{S}\sum_{p=1}^{P}\ \{\lambda_l^s\Lambda_l^{ps}\sum_{k=1}^{P-1}\ [(\sqrt[P]{c_l}-(\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p)^{P-k}/(P-k)!]\times$$

$$\times[\ln(\sqrt[P]{c_l}-(\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p)-P+1]-$$

$$-\frac{[\sqrt[P]{c_l}-\sqrt[P]{c_l^0}]^P-[\sqrt[P]{c_l^0}-(\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p]^P}{P!}[\ln[\sqrt[P]{c_l^0}-(\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p]+2\pi i\Delta n_l^s-P+1]\}=$$

$$=(h_l-h_l^0)^P/P!+\sum_{q=1}^{P-1}\ a_l^q(h_l-h_l^0)^q=p_l(h_l)$$

Так как согласно лемме 1

$$\sum_{p=1}^{P}\ \Lambda_l^{ps}=0;\sum_{p=1}^{P}\ \Lambda_l^{ps}(\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p=0,\sum_{p=1}^{P}\ \Lambda_l^{ps}[(\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p]^q=0,q=1,...,P-1,,$$

имеем сумму коэффициентов при $\sqrt[P]{c_l},\sqrt[P]{c_l^0}$ и при $-P$, равную нулю. Где имеющие разные значения координаты положения равновесия имеют разную мнимую часть. Произведя элементарные преобразования по суммированию коэффициентов при целых числах, получим

$$g(c_l)=\sum_{s=1}^{S}\ \sum_{p=1}^{P}\ \{\lambda_l^s\Lambda_l^{ps}\sum_{k=1}^{P-1}\ \{(-1)^{k+1}[\sqrt[P]{c_l}-(\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p]^{P-k}/(P-k)!\times$$

$$\times\ln[\sqrt[P]{c_l}-(\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p]+$$

$$+\frac{[\sqrt[P]{c_l^0}-(\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p]^P}{P!}\ln[\sqrt[P]{c_l^0}-(\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p]+2\pi i[\sqrt[P]{c_l^0}-(\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p]^P\Delta n_l^{ps}/P!\}= \quad .(15)$$

$$=(h_l-h_l^0)^P/P!+\sum_{q=1}^{P-1}\ a_l^q(h_l-h_l^0)^q=p_l(h_l);$$

При этом имеем первые интегралы, полученные из уравнения (15)

$$\sum_{s=1}^{S}\ \sum_{p=1}^{P}\ \{\lambda_l^s\Lambda_l^{ps}\sum_{k=1}^{P-1}\ \{(-1)^{k+1}(\sqrt[P]{c_l}-(\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p)^{P-k}/(P-k)!\times$$

$$\times\ln[\sqrt[P]{c_l}-(\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p]+\frac{(\sqrt[P]{\mathrm{H}_l}-(\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p)^P}{P!}$$

$$\times\ln(\sqrt[P]{\mathrm{H}_l}-(\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p)+2\pi i(\sqrt[P]{\mathrm{H}_l}-(\sqrt[P]{\alpha_l^s})_p)^P\Delta n_l^{ps}/P!\}=$$

$$=(h_l-h_l^0)^P/P!+\sum_{q=1}^{P-1}\ a_l^q(h_l-h_l^0)^q$$

Разрешая это уравнение относительно H_l получим первый интеграл энергии

$\mathrm{H}_l = P_l(c_l, h_l, a_l^1, ..., a_l^{P-1})$.

Эта формула получена в предположении, что состояния в начальный и текущий момент времени не одинаковы, и поэтому может быть разная мнимая ветвь логарифма. Это происходит в случае, если система может излучить энергию и тогда, начальное и конечное состояние имеют разную ветвь логарифма и решение зависит от целого числа.

Выведем формулу для решения в действительной плоскости. Опуская индексы, преобразуем формулу, суммируя с комплексно сопряженным членом формулы

$$2\,\mathrm{Re}\,\lambda(\sqrt[P]{c}/\sqrt[P]{\alpha}-1)[\ln(\sqrt[P]{c}-\sqrt[P]{\alpha})-1] = \mathrm{Re}\,2(\lambda_r + i\lambda_i)[\sqrt[P]{c}(\alpha_r + i\alpha_i)-1]\times$$
$$\times\{\ln[(\sqrt[P]{c}-\beta_r)^2 + \beta_i^2]^{1/2} + i\frac{\pi}{2} + i\arctan\frac{\sqrt[P]{c}-\beta_r}{\beta_i}\} =$$
$$= 2[\lambda_r(\sqrt[P]{c}\alpha_r - 1) + \lambda_i\sqrt[P]{c}\alpha_i]\ln[(\sqrt[P]{c}-\beta_r)^2 + \beta_i^2] - 2[\lambda_i(\sqrt[P]{c}\alpha_r - 1) - \lambda_r\sqrt{c}\alpha_i]\times$$
$$\times[\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{\sqrt[P]{c}-\beta_r}{\beta_i}],$$

Разрешая это уравнение относительно величины аргумента $\arctan\dfrac{\sqrt[P]{c}-\beta_r}{\beta_i}$,

получим

$$\frac{\sqrt[P]{c}-\beta_{lr}^s}{\beta_{li}^s} = \tan[-\frac{(h_l - h_l^0)^P/P! + \sum_{q=1}^{P-1} a_l^q(h_l - h_l^0)}{2[\lambda_{li}^s(\sqrt[P]{c}\gamma_r - 1) - \lambda_{lr}^s\sqrt[P]{c}\gamma_i]} + \delta_l] \quad (16)$$

Эта функция при наличии комплексных координат положения равновесия стремится к бесконечности при решении в действительной плоскости. При этом комплексное решение конечно.

Отметим, что для нечетной степени системы дифференциальных уравнений возможно стремление к положению равновесия. При четной степени старшей производной положение равновесия не достижимо, так как наравне с решением $c_l = g_{l\alpha}[\exp(\sqrt{\lambda_\alpha}t)c_l + \exp(-\sqrt{\lambda_\alpha}t)d_l$ с отрицательной действительной частью, имеется решение с положительной действительной части собственного числа. У систем нелинейных уравнений с нечетной производной это не так и возможно стремление к координате положения равновесия. Зато уравнение четной степени не имеет материального первого интеграла, а уравнение четной степени имеет.

Теорема 2. Решение системы уравнений (1) в комплексной плоскости конечно. Допустим $c_l \to \infty$. Тогда имеем значение левой части выражения, стремящееся к константе, а справа изменяющаяся величина h_l, значит, величина c_l не стремится к бесконечности, и является конечной величиной. В случае фиксированного значения аргумента h_l, имеющего конечное число значений, зависящих от начальных данных, решение может стремиться к бесконечности.

Потенцируя данное выражение, получим

$$\prod_{s=1}^{S}\prod_{p=1}^{P} \frac{\left(\sqrt[P]{c_l} - \left(\sqrt[P]{\alpha_l^s}\right)_p\right)^{\lambda_l^s \Lambda_l^{ps} \sum\limits_{k=1}^{P-1} \left(\sqrt[P]{c_l} - \left(\sqrt[P]{\alpha_l^s}\right)_p\right)^{P-k} /(P-k)!}}{\left(\sqrt[P]{c_l^0} - \left(\sqrt[P]{\alpha_l^s}\right)_p\right)^{\lambda_l^s \Lambda_l^{ps} \frac{\left(\sqrt[P]{c_l^0} - \left(\sqrt[P]{\alpha_l^s}\right)_p\right)^P}{P!}}} \times$$
$$\times \exp\left(2\pi i \lambda_l^s \Lambda_l^{ps} \left(\sqrt[P]{c_l^0} - \left(\sqrt[P]{\alpha_l^s}\right)_p\right)^P \Delta n_l^{ps} / P!\right) = \qquad (17)$$
$$= \exp\left[(h_l - h_l^0)^P / P! + \sum_{q=1}^{P-1} a_l^q (h_l - h_l^0)^q\right]$$

Это уравнение может иметь для одного из уравнений нуль функции $\Phi_l[c_1(\tau),...,c_N(\tau)]$, что приведет к изменению монотонности у функции $h_l(t)$, вместо возрастания будет убывание функции $h_l(t)$ или наоборот. Величина $h_l(t)$ может быть периодической функцией времени.

Действие для каждого дифференциального уравнения определяется по формуле

$$S_l = \int_{h_l^0}^{h_l} (-\mathrm{H}_l dh_l + p_l dq_l);$$

При этом приращение действия в случае комплексного решения равно $dS_l = d\arg c_l$. Значит, в случае ламинарного действительного решения функция Гамильтона H_l, вычисленная по этим безразмерным формулам, где вместо времени используется $h_l(t)$, равна нулю, что и является первыми интегралами. Из этих формул имеем $\mathrm{H}_l = -\dfrac{\partial S_l}{\partial h_l}, p_l = \dfrac{\partial S_l}{\partial c_l}$. Действие для каждого дифференциального уравнения определяется по формуле

$$S_l = \int\limits_{h_l^0}^{h_l} (-\mathrm{H}_l dh_l + p_l dq_l);$$

При этом приращение действия в случае комплексного решения равно $dS_l = d\arg c_l$. Значит, в случае ламинарного действительного решения функция Гамильтона H_l, вычисленная по этим безразмерным формулам, где вместо времени используется $h_l(t)$, равна нулю, что и является первыми интегралами. Из этих формул имеем $\mathrm{H}_l = -\dfrac{\partial S_l}{\partial h_l}, p_l = \dfrac{\partial S_l}{\partial c_l}$.

$$\mathrm{H}_l = -\frac{\partial \arg c_l}{\partial h_l} = -\frac{\partial \arctan \dfrac{\operatorname{Im} c_l}{\operatorname{Re} c_l}}{\partial h_l} = \frac{\operatorname{Im} c_l \dfrac{\partial \operatorname{Re} c_l}{\partial h_l} - \operatorname{Re} c_l \dfrac{\partial \operatorname{Im} c_l}{\partial h_l}}{(\operatorname{Re} c_l)^2 + (\operatorname{Im} c_l)^2}.$$

$$p_l = \frac{\partial \arg c_l}{\partial c_l} = \frac{\partial \arctan \dfrac{\operatorname{Im} c_l}{\operatorname{Re} c_l}}{\partial c_l} = \frac{1}{2[1 + (\dfrac{\operatorname{Im} c_l}{\operatorname{Re} c_l})^2]} (\frac{\partial \dfrac{\operatorname{Im} c_l}{\operatorname{Re} c_l}}{\partial \operatorname{Re} c_l} + \frac{\partial \dfrac{\operatorname{Im} c_l}{\operatorname{Re} c_l}}{\partial i \operatorname{Im} c_l}) =$$

$$= \frac{-\operatorname{Im} c_l - i \operatorname{Re} c_l}{2[(\operatorname{Re} c_l)^2 + (\operatorname{Im} c_l)^2}$$

Откуда получим значение импульса

$$p_l = \frac{-\operatorname{Im} c_l - i \operatorname{Re} c_l}{2[(\operatorname{Re} c_l)^2 + (\operatorname{Im} c_l)^2}$$

Где воспользовались формулой $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial}{\partial \operatorname{Re} z} + \dfrac{\partial}{\partial i \operatorname{Im} z})$, см. [5] раздел 2.1. Т.е. имеется N первых интегралов, зависящих от h_l.

Разрешая относительно $h_l - h_l^0$ уравнение (17), продифференцируем полученное значение по величине h_l, получим $F_l(c_l)\dfrac{dc_l}{dh_l} = 1$, откуда имеем N первых интегралов, содержащий функцию Гамильтона

$$H_l(c_l,h_l,a_l)+H_l=\frac{-Im\,c_l\,Re\frac{1}{F_l(c_l)}+Re\,c_l\,Im\frac{1}{F_l(c_l)}}{(Re\,c_l)^2+(Im\,c_l)^2}+\frac{(\frac{dy}{dh_l})^2}{2}-\int_0^y[D_l(z)]^{2/p}dz=P_l$$

$$p_l=\frac{Im\,c_l+i\,Re\,c_l}{2[(Re\,c_l)^2+(Im\,c_l)^2}=\frac{i}{2c_l};,\ (18)$$

Т.е. имеется N первых интегралов, зависящих от h_l.

Из второго уравнения (18) определим импульс p_l. Второй член левой части первого уравнения (18) назовем материальным значением энергии (так как она равна значениям суммы кинетической и потенциальной энергии), а первый член левой части полевым значением энергии, так как она определяется мнимой фазой решения. При этом первый интеграл зависит от 2 констант $P_l\ ,a_l$. В случае действительного положительного значения $c_l,P_l\ ,\alpha_l^s$ имеем первый интеграл - функцию Гамильтона

$$\mathrm{H}_l=0;H_l=P_l;l=1,...,N\ .$$

Первая формула (18) это закон сохранения энергии с учетом излучения.

При этом правая и левая часть первого уравнения (18) может быть комплексной. Но при скачкообразном изменении первого члена левой части (18), скачком изменится и второй член, причем величины $P_l\ ,a_l$ останутся неизменными, т.е. константы первого интеграла останутся неизменными.

Эта формула получена в предположении, что начальное и конечное состояние решения не одинаковы. Если между ними произошло излучение, то распределение энергии системы изменится в соответствии со значением логарифма и появится зависимость от целого числа n_l^s, соответствующая разным ветвям логарифма. При этом определится значение c_l как функция квантового числа n_l^s из уравнений (17). Определение решения по формуле (17) может содержать точки ветвления решения. Но при этом вторая производная от решения стремится к бесконечности в силу наличия точки ветвления, и значит, нарушаются условия единственности и существования решения задачи Коши этого обыкновенного дифференциального уравнения. При этом сходящийся ряд, описывающий решения в точке ветвления не существует, значит, решение задачи Коши в комплексной плоскости в точке ветвления не существует, а происходит скачок решения. Но первый интеграл энергии продолжает существовать, и сумма энергии поля и материи неизменна.

Переход с одного значения целого числа на другое связан с изменением фазы аргумента

$$\{(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})]-$$
$$-(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})]\}/(4\pi\sqrt{\alpha_l^s}i)\}=n_l^s \quad (19)$$
$$\sqrt{c_l}[\ln(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})]/(4\pi i)\}=n_l^s-i\eta;$$

При условии $c_l \to \infty$ получаем асимптотическую формулу

$$\sqrt{c_l}=\frac{\pm 4\pi i n_l^s+4\pi\eta}{\ln(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})}=ib(n_l^s-i\eta)$$

Значение координаты, при котором образуется скачок. Причем нужно учитывать разные листы римановой поверхности.

При этом безразмерный импульс и энергия излучения равны

$$\frac{Im(N^2)\,Re\frac{1}{F_l(-N^2)}-Re\,N^2\,Im\frac{1}{F_l(-N^2)}}{N^4}+\frac{(\frac{dy}{dh_l})^2}{2}-\int_0^y[D_l(z)]^{\frac{2}{p}}dz=P$$
$$p_{n_l^s}=\frac{i}{2c_l}=-\frac{i}{2N^2};N^2=b^2(n_l^s-i\eta)^2.$$

Импульс у электрона в атоме водорода является мнимым $p_l=-i\hbar\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^l}$, где волновая функция является действительной.

Сумма материальной энергии и полевой энергии, описываемой дифференциальным уравнением, P_l является константой. Как только происходит изменение полевой энергии, происходит перестройка целого числа, изменение на единицу, и как следствие скачок решения задачи при неизменном значении a_l и связанных значениях c_l, h_l в первом интеграле (18) и проявится зависимость $c_l=c_l(n_l^s)$. Скачок решения определяется зависимостью $c_l=c_l(n_l^s)$ при неизменных константах a_l в первом интеграле (18). При этом скачкообразное изменение материальной части энергии H_l компенсируется изменением излучения H_l. Но излучение энергии может произойти и при неизменном значении P_l за счет изменения квантового числа n_l^s. При этом изменится как материальная, так и полевая часть энергии, причем их сумма останется неизменной. При наличии кинетической энергии, происходит рост потенциальной энергии, что вызывает убывание материальной энергии и рост полевой энергии. Квантовое число уменьшается и происходит рост кинетической энергии. Это вызывает усиленный рост потенциальной энергии. Возникает баланс между кинетической и потенциальной энергией, и материальная энергия равняется константе, как и полевая энергия. Но полевая энергия дискретная и материальная энергия тоже становится дискретной, как дополнение к полной энергии. Но между кинетической и потенциальной энергией возможны колебания, при постоянной материальной энергии. Уменьшение кинетической энергии вызывает уменьшение потенциальной энергии и увеличение кинетической энергии вызывает увеличение потенциальной. Колебания растут и скачком переходят в новое состояние с новым квантовым числом, излучается или поглощается энергия и материальная часть энергии становится константой, до нового роста или уменьшения амплитуды колебаний. Концу этих колебаний квантового числа нет предела.

В случае положительных действительных значений c_l, α_l^s материальная часть энергии H_l сохраняется и никаких скачков не будет, величина n_l^s неизменна. Излучение в этом случае будет непрерывное, связанное с ускоренным движением тела, причем величины $H_l = P_l$ будут увеличиваться, так как произойдет внешнее материальное воздействие. Излишек энергии будет излучаться. При наличии мнимой части решения полевой интеграл H_l равен константе, значит и материальный H_l тоже равен константе и непрерывного излучения не будет.

Отметим, существование частных случаев комплексного решения при разных значениях энергии. Так у дифференциального уравнения имеется особенность

$$\ddot{q} + \omega^2 (q^3 - q/2) = 0 . \qquad (19)$$

В которой имеется комплексное конечное решение $q(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 - \alpha \exp(i\omega t)}{1 + \alpha \exp(i\omega t)}$ при действительных координатах положения равновесия. Но это решение особое, оно не удовлетворяет произвольным начальным условиям, так как зависит от одной константы. Оно является решением уравнения при частном случае начальных условий, при условии $E = 0$.

$$\frac{\dot{q}^2}{2} + \frac{\omega^2 (q^4 - q^2)}{4} = 0 .$$

А это дифференциальное уравнение имеет точку ветвления и две ветви аналитической функции, которой равна правая часть дифференциального уравнения. При другом значении энергии комплексного решения уравнения (18) нет. Оно имеет при других значениях энергии конечное действительное решение.

Выводы

Нелинейные уравнения в частных производных с P производной по времени, в случае комплексных координат положения равновесия, эквивалентной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, допускают непрерывное и дискретное излучение энергии. При этом сумма материальных и полевых значений энергии сохраняется. При малых значениях безразмерных параметров, когда координаты положения равновесия действительны и все одного знака, и значит, решение действительно, дискретного и непрерывного излучения нет. Но в случае колебания с изменением знака $\sqrt[P]{c_l}$ может появиться излучение. Причем все нелинейные уравнения определяют излучение энергии, или дискретной, или непрерывной, обладая полевыми свойствами.

Список литературы

1. *Якубовский Е.Г.* Комплексные ограниченные решения уравнений в частных производных. Материалы международной научно-практической конференции. Теоретические и практические аспекты естественных и математических наук. Новосибирск: Изд. «Сибак», 2012, с. 19-30. http://sibac.info/index.php/2009-07-01-10-21-16/5809-2013-01-17-07-57-12

2. *Якубовский Е.Г.* Комплексные решения уравнений в частных производных. Международный независимый институт Математики и Систем «МиС», №8, 2014, с. 60-66 http://math-systems.ru/files/Arhiv/19-20.09.2014/mis8.pdf#page=66

3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика Нерелятивистская теория т.III, Наука, М.,1969,768с.

4. *Якубовский Е.Г.* Физический смысл уравнений квантовой механики, электродинамики и уравнения ОТО. «Энциклопедический фонд России». 2014г., 65с., http://russika.ru/sa.php?s=890

5. Вергелес С.Н. Лекции по квантовой электродинамике М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008г., 248стр.