Учет орбитального и спинового момента при комплексной траектории

Якубовский Е.Г.

Аннотация

Вычисление дискретных моментов времени производилось в статье [1], но в данной статье алгоритм учитывает орбитальный момент и спин для атома гелия. Это вычисление оправдывает использования полиномов Лежандра для описания спина электрона с периодом 4 пи. Как следствие дискретных моментов времени, дискретные координаты и импульс. Для многоэлектронного атома имеется как положительная, так и отрицательная поправка к главному квантовому числу. Причем так как они соответствуют равным по модулю проекциям спина, но отличающимися знаком, значит поправки равны по модулю и имеют разные знаки в зависимости от знака проекции спина. Поэтому используется для нулевого спина разность поправок, а для спина 1 среднее арифметической модулей поправок, взятое с разным знаком.

В случае квантовой электродинамики дискретным является интервал, координата, энергия и импульс. Комплексная энергия и импульс определяются из формул, где начальные условия комплексные

$$mc\frac{dx_k}{ds} = p_k = -i\hbar\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_k}$$

$$mc^2\frac{dt}{ds} = p_0 = E/c = i\hbar\frac{\partial \ln\psi}{c\partial t};\psi = \psi(s,t_0,x_1^0,x_2^0,x_3^0).$$

$$ct = ct(s,t_0,x_1^0,x_2^0,x_3^0); x_k = x_k(s,t_0,x_1^0,x_2^0,x_3^0);$$

Запишем закон сохранения релятивистской энергии для действительной части комплексной энергии

$$[\frac{dx_0(s,t_0,x_1^0,x_2^0,x_3^0)}{\partial s}]^2=\frac{E_n^2}{m^2c^4}=[\frac{dx_k(s,t_0,x_1^0,x_2^0,x_3^0)}{\partial s}]^2+\frac{U}{mc^2}+1$$

$$\frac{E_n^2}{m^2c^4}=[\frac{d\operatorname{Re}x_k(s,t_0,x_1^0,x_2^0,x_3^0)}{\partial s}]^2-[\frac{d\operatorname{Im}x_k(s,t_0,x_1^0,x_2^0,x_3^0)}{\partial s}]^2+\frac{U}{mc^2}+1$$

Так как связь между операторами не распространяется на функции, значит эта связь реализуется при дискретных интервалах, и, значит, дискретных импульсах, энергиях и координатах. Импульс существует одно мгновение, в момент времени жизни дискретного состояния.

В нерелятивистском случае для атома водорода эта формула выглядит таким образом

$$\frac{E_n-m_ec^2-U}{m_ec^2}=-\frac{1}{2\cdot 137^2n^2}+\frac{e^2}{m_ec^2r}=[\frac{d\operatorname{Re}x_k(t-t_0,r^0,\theta^0)}{c\partial t}]^2-[\frac{d\operatorname{Im}x_k(t-t_0,r^0,\theta^0)}{c\partial t}]^2=$$

$$=-\frac{1}{2\cdot 137^2}\{\operatorname{Re}[(\sum_{k=1}^{n_r}\frac{1}{r-a_k}+\frac{l+1}{r}-\frac{1}{n})^2+(\sum_{k=1}^{n_\theta}\frac{\sin\theta}{r(\cos\theta-b_k)})^2]-$$

$$-\operatorname{Im}[(\sum_{k=1}^{n_r}\frac{1}{r-a_k}+\frac{l+1}{r}-\frac{1}{n})^2+(\sum_{k=1}^{n_\theta}\frac{\sin\theta}{r(\cos\theta-b_k)})^2]\}\to-\frac{1}{2\cdot 137^2n^2};\operatorname{Im}r\to\infty;\operatorname{Im}\theta\to\infty$$

$$\frac{1}{n^2}=\operatorname{Re}[(\sum_{k=1}^{n_r}\frac{1}{r(X)-a_k}+\frac{l+1}{r(X)}-\frac{1}{n})^2+(\sum_{k=1}^{n_\theta}\frac{\sin\theta(X)}{r(X)(\cos\theta(X)-b_k)})^2+\frac{2}{r(X)}]-$$

$$-\operatorname{Im}[(\sum_{k=1}^{n_r}\frac{1}{r(X)-a_k}+\frac{l+1}{r(x)}-\frac{1}{n})^2+(\sum_{k=1}^{n_\theta}\frac{\sin\theta(X)}{r(X)(\cos\theta(X)-b_k)})^2+\frac{2}{r(X)}];X=(t-t_0,r^0,\theta^0)$$

При мнимых координатах, стремящихся к бесконечности эта формула превращается в тождество. Значит переход к бесконечной мнимой части параметров атома водорода соответствует получению тождества вместо закона сохранения энергии. Это не классическое описание, а вырождение квантового. Переход к классическому описанию соответствует росту массы до определенного предела, когда начинается квантовая механика для планет и звезд. Это уравнение не имеет действительного решения, кроме радиуса, стремящегося к бесконечности. Член зависящий от углов можно приравнять нулю, хотя это не очевидная замена, угол зависит от времени. Остаток от этого уравнения не имеет действительного решения, кроме радиуса, стремящегося к бесконечности. Для выполнения равенства действительных чисел, должно выполняться условие $r = 2n^2$ выполняется условие $\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{2n^2 - a_k} - \frac{l+1}{2n^2} > \frac{1}{n} - \frac{n_r}{n^2} - \frac{l+1}{2n^2} > \frac{l+1}{2n^2} > 0$ и равенство нулю члена возводимого в квадрат не реализуется, т.е. закон сохранения энергии в действительной плоскости не реализуется.

Определим моменты времени справедливости закона сохранения энергии для основного состояния атома водорода. Для этого решим уравнение движения в комплексной плоскости

$$\frac{dr}{dt} = -i\frac{\hbar}{ma_0^2}\operatorname{Re}[(\sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{r-a_k} + \frac{l+1}{r} - \frac{1}{n})^2 - \operatorname{Im}(\sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{r-a_k} + \frac{l+1}{r} - \frac{1}{n})^2]$$

$$\frac{rd\theta}{dt} = -i\frac{\hbar}{ma_0^2}\operatorname{Re}(\sum_{k=1}^{n_\theta} \frac{\sin\theta}{r(\cos\theta - b_k)})^2 - \operatorname{Im}(\sum_{k=1}^{n_\theta} \frac{\sin\theta}{r(\cos\theta - b_k)})^2 .$$

Оно имеет решение

$$r(t-t_0) = r(t-t_0, r_0); \theta(t-t_0) = \theta(t-t_0, \theta_0). \qquad (1)$$

где радиус безразмерный.

Запишем действительную и мнимую часть закона сохранения комплексной энергии

$$\frac{1}{n^2} = \operatorname{Re}[(\sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{r(X)-a_k} + \frac{l+1}{r(X)} - \frac{1}{n})^2 + (\sum_{k=1}^{n_\theta} \frac{\sin\theta(X)}{r(X)(\cos\theta(X) - b_k)})^2 + \frac{2}{r(X)}] -$$
$$- \operatorname{Im}[(\sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{r(X)-a_k} + \frac{l+1}{r(x)} - \frac{1}{n})^2 + (\sum_{k=1}^{n_\theta} \frac{\sin\theta(X)}{r(X)(\cos\theta(X) - b_k)})^2 + \frac{2}{r(X)}]$$
$$\frac{\alpha}{n^2} = 2\operatorname{Re}[\sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{r(X)-a_k} + \frac{l+1}{r(X)} - \frac{1}{n}]\operatorname{Im}[\sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{r(X)-a_k} + \frac{l+1}{r(X)} - \frac{1}{n}] + \qquad (2)$$
$$+ 2\operatorname{Re}[\sum_{k=1}^{n_\theta} \frac{\sin\theta(X)}{r(X)(\cos\theta(X) - b_k)}]\operatorname{Im}[\sum_{k=1}^{n_\theta} \frac{\sin\theta(X)}{r(X)(\cos\theta(X) - b_k)}] + 2\operatorname{Re}\frac{2}{r(X)}\operatorname{Im}\frac{2}{r(X)};$$
$$X = (t-t_0, r^0, \theta^0)$$

Конечное действительное решение надо использовать при мнимой части, равной нулю, но оно не удовлетворяет этому уравнению.

Уравнение (2) сводится к уравнению, из которого определим дискретные моменты времени при комплексных начальных условиях

$$\frac{1}{n^2} = \mathrm{Re}[(\sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{r(X)-a_k} + \frac{l+1}{r(X)} - \frac{1}{n})^2 + (\sum_{k=1}^{n_\theta} \frac{\sin\theta(X)}{r(X)(\cos\theta(X)-b_k)})^2 + \frac{2}{r(X)}] - \\ - \mathrm{Im}[(\sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{r(X)-a_k} + \frac{l+1}{r(x)} - \frac{1}{n})^2 + (\sum_{k=1}^{n_\theta} \frac{\sin\theta(X)}{r(X)(\cos\theta(X)-b_k)})^2 + \frac{2}{r(X)}] \quad (3)$$

Решаем совместно уравнения (1) относительно времени и уравнения (3), (4) относительно дискретного действительного значения времени и определяем комплексные начальные условия из условия действительности времени

$$t_k - t_0 = \mathrm{Re}\, t(r_0); \mathrm{Im}\, t(r_0) = 0; t_k - t_0 = \mathrm{Re}\, t(\theta_0); \mathrm{Im}\, t(\theta_0) = 0 \quad (4)$$

Мнимую часть собственной энергии определяем из формулы, в которую подставлено дискретное время и определенные начальные условия

$$\frac{\alpha}{n^2} = 2\,\mathrm{Re}[\sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{r(X)-a_k} + \frac{l+1}{r(X)} - \frac{1}{n}]\,\mathrm{Im}[\sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{r(X)-a_k} + \frac{l+1}{r(X)} - \frac{1}{n}] + \\ + 2\,\mathrm{Re}[\sum_{k=1}^{n_\theta} \frac{\sin\theta(X)}{r(X)(\cos\theta(X)-b_k)}]\,\mathrm{Im}[\sum_{k=1}^{n_\theta} \frac{\sin\theta(X)}{r(X)(\cos\theta(X)-b_k)}] + 2\,\mathrm{Re}\frac{2}{r(X)}\,\mathrm{Im}\frac{2}{r(X)}$$

Но мнимая часть энергии связана с турбулентным значением энергии, а не с затуханием. Турбулентная действительная энергия равна среднему – действительной части плюс мнимая часть, умноженная на синус фазы, которая равна произведению частоты на время. Частота равна релятивистской собственной энергии, деленной на постоянную Планка.

При переходе с одного уровня энергии на другой происходит излучение энергии по формуле плоской волны у физического смысла комплексной энергии

$$E_{nm} = \mathrm{Re}(E_n - E_m) + \sqrt{2}\,\mathrm{Im}(E_n - E_m)\sin\frac{\mathrm{Re}(E_n - E_m)t - \sum_{k=1}^{3} \mathrm{Re}[(p_{nk} - p_{mk})(x_k - x_{k0})]}{\hbar}.$$

$$< (E_{nm})^2 >= [\mathrm{Re}(E_n - E_m)]^2 + [\mathrm{Im}(E_n - E_m)]^2$$

Формула для дискретного импульса и начального значения координаты образуется при вычислении энергии. Причем считается амплитуда излученной волны. Данную действительную энергию можно использовать при вычислении статистических сумм.

Казалось бы, спин описывается спинорами и комплексное пространство для них не пригодно. Но целый спин описывается полиномами Лежандра, полуцелый полиномами Лежандра с периодом 4π , и используя половину угла, удалось использовать для описания полуцелого спина полиномы Лежандра с удвоенными целыми индексами. Кроме того, построены полиномы Лежандра с нецелыми индексами см. [4].

В этом уравнении используются введенные углы спиноров, и оператор Лапласа выглядит таким образом

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}] +$$

$$+\frac{\alpha}{4r^2}[\frac{1}{\sin\Theta/2}\frac{\partial}{\partial\Theta/2}(\sin\Theta/2\frac{\partial}{\partial\Theta/2}) + \frac{1}{\sin^2\Theta/2}\frac{\partial^2}{\partial(\Omega/2)^2}] =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L(L+1) + \alpha\frac{\sigma}{2}(\frac{\sigma}{2}+1)}{r^2}, L_{eff}(L_{eff}+1) = L(L+1) + \alpha\frac{\sigma}{2}(\frac{\sigma}{2}+1);$$

Уравнение орбитального и спинового движения имеют уравнения

$$V_\varphi = r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt} = \frac{m_z\hbar}{mr\sin\theta}; \varphi = \int_0^t \frac{m_z\hbar dt}{mr^2\sin^2\theta}$$

$$V_\Omega = r_e\sin(\Theta/2)\frac{d\Omega}{dt} = \frac{s\hbar}{mr_e\sin(\Theta/2)}; \Omega = \int_0^t \frac{s\hbar dt}{mr_e^2\sin^2(\Theta/2)}$$

Запишем решение этого уравнения, т.е. вычисление собственной энергии и волновой функции

$$\alpha = \mp\left(\frac{e}{\sqrt{\hbar c}}\right)^{L_{eff}!} = \mp\frac{1}{137^{L_{eff}!/2}}, E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2(n_r + L_{eff} + 1)^2}$$

$$\frac{1}{\sin\Theta/2}\frac{\partial}{\partial\Theta/2}\left(\sin\Theta/2\frac{\partial}{\partial\Theta/2}\right) - \frac{(\sigma_z)^2}{\sin^2\Theta/2} + \sigma(\sigma+2) = 0$$

$$\psi(r,\Theta,\Omega) = R_{n_r L_{eff}}(r)Y_{lm}(\theta)Y_{\sigma\sigma_z}(\Theta/2)\exp(im\varphi + i\sigma_z\Omega/2)$$

$$R_{n_r L}(r) = F(-n_r, L_{eff}, r) = \frac{1}{L_{eff}(L_{eff}+1)...(L_{eff}+n_r-1)}z^{1-L_{eff}} \times$$

$$\times\exp(r)\frac{d^{n_r}}{dr^{n_r}}[\exp(-r)r^{n_r+L_{eff}-1}];$$

Где величина σ, σ_z определяют суммарный модуль спина электронов, и его проекцию. Сферические функции полуцелого порядка определяются полиномом Лежандра нечетного порядка $Y_{\sigma\sigma_z}(\Theta/2) \sim P_\sigma^{\sigma_z}(\cos\Theta/2)$.

Экспериментально определена и приведена в [2] поправка к возбужденному состоянию атома гелия при условии $L = 0,1,2$ и суммарному спину $S = 0,1$. При условии $S = 0$ поправка равна нулю, поэтому считалась удвоенная поправка при $S = \pm 1/2$.

При суммарном спине электронов равном $S = 0$. Расчет производился по формуле $\Delta_L = -0.5 + \sqrt{0.25 + L(L+1) \mp \alpha\frac{\sigma}{2}(\frac{\sigma}{2}+1)} - L$, для нулевого спина надо вычесть две разные поправки, и получаются равные поправки с разным знаком. При спине равном 1 тоже получаются одинаковые поправки с разным знаком, но нужно взять среднее арифметической модулей поправок. Существуют положительные и отрицательные поправки, значит зависят от проекции спина. Поправки с разной по знаку проекцией спина должны быть равны по модулю, поэтому используется среднее арифметическое модулей поправок, взятое с разным знаком. В зависимости от знака проекции спина частицы имеется как положительная, так и отрицательная поправка, равная по модулю.

L	0	1	2

Δ_L, *эксперимент*	-0.14	0.012	-0.0022
Δ_L, *теория*	-0.129;0.129	-0.043;0.043	-0.00219;0.00219

При суммарном спине электронов равном $S=1$

L	0	1	2
Δ_L, *эксперимент*	-0.296	-0.068	-0.0029
Δ_L, *теория*	-0.184;0.184	-0.057;0.057	-0.00292;0.00292

При орбитальном квантовом числе, равном $L=3$ поправка равна $\Delta_{L=3}=-10^{-7}$, поэтому ее экспериментальное значение не приведено в [2]. Малая точность вычисления поправки связана с тем, что не учтено взаимодействие электронов между собой.

В кинетическую энергию атома добавятся члены и уравнение сохранения энергии выглядит таким образом

$$\frac{1}{(n-\Delta_{L,S})^2}=\left(\sum_{k=1}^{n_r}\frac{1}{r(X)-a_k}+\frac{l+1}{r(X)}-\frac{1}{n-\Delta_{L,S}}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n_\theta}\frac{\sin\theta(X)}{r(X)(\cos\theta(X)-b_k)}\right)^2+\frac{2}{r(X)}+$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{n_\Theta}\frac{\sin\Theta(X)/2}{(\cos\Theta(X)/2-b_k)}\right)^2/2-\frac{m_z^2}{2r^2\sin^2\theta(X)}-\frac{s^2}{\sin^2[\Theta(X)/2]}$$

Где радиус безразмерный, отнесен к радиусу Бора. Учет проекции орбитального момента ухудшает ситуацию с законом сохранения энергии и проекции орбитального момента остаются вырожденными. Но спин влияет на собственное значение энергии от них зависит эффективный орбитальный момент, и значит смещение главного квантового числа. Причем если модуль спина приводит к росту собственной энергии, то проекция спина к уменьшению собственной энергии, и то и другое наблюдается в эксперименте.

Период времени между дискретными значениями времени для атома водорода при не релятивистских формулах определяется по формуле $\Delta\tau=\frac{m_e a_0^2}{\hbar}=0.25\cdot10^{-16}s$, см. [3]. Или энергия смерти и рождения равна

$E_n = m_e c^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2}\frac{1}{n^2} = m_e c^2 - \frac{m_e e^4}{2\hbar^2}$ энергии электрона в атоме. Причем одной энергии соответствует счетное количество времен. Т.е. электрон периодически умирает, излучив энергию, и рождается вновь, получив другую энергию. Часть энергии $\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2})$ расходуется на фазовый переход или на излучение электромагнитной волны. Возможен и другой процесс получение энергии электроном, причем другой энергии соответствует другое счетное количество времен.

Здесь я использую свои разработки по частицам вакуума, или свойствам вакуума. Они вытекают из кинематической вязкости вакуума.

Уравнение Шредингера сводится к уравнению Навье – Стокса. Докажем это. Для чего запишем уравнение Шредингера и преобразуем его воспользовавшись тождеством $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_l^2} = \psi[\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2} + \frac{1}{\psi^2}(\frac{\partial \psi}{\partial x_l})^2]$

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_l^2} + U\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi\sum_{l=1}^{3}[\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2} + \frac{1}{\psi^2}(\frac{\partial \psi}{\partial x_l})^2] + U\psi .$$

Разделив на массу $m\psi$, получим уравнение

$$i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m^2}\sum_{l=1}^{3}(\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l})^2 = -\frac{\hbar^2}{2m^2}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2} + U/m .$$

Получим уравнение в частных производных, взяв градиент от обеих частей уравнения, введем действительную скорость по формуле $\mathbf{V} = -i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi$.

$$\frac{\partial i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{m^2}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l}\frac{\partial \nabla\ln\psi}{\partial x_l} = \frac{i\hbar}{2m}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2 i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi}{\partial x_l^2} + \nabla U/m$$

Подставляя значение скорости в преобразованное уравнение Шредингера, получим

$$\frac{\partial V_p}{\partial t} + \sum_{l=1}^{3} V_l \frac{\partial V_p}{\partial x_l} = \nu \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial^2 V_p}{\partial x_l^2} - \frac{\partial U}{\partial x^p} / m, \nu = \frac{i\hbar}{2m}.$$

Получим трехмерное уравнение Навье – Стокса с давлением, соответствующим потенциалу, и плотности соответствующей массе. Получается, что кинематическая вязкость вакуума мнимая и зависит от массы частицы. Но задача гидродинамики отличается от уравнения Навье – Стокса, полученного из уравнения Шредингера, уравнением неразрывности.

Для объяснения свойств вакуума, его мнимой кинематической вязкости я вычислил свойства частиц вакуума, образующих мнимую кинематическую вязкость вакуума. Причем, как оказалось, каждому уровню энергии в атоме соответствует своя частица вакуума - мультиполь. Уничтожение и рождение частицы связаны с переходом на другие частицы вакуума с другим рангом мультиполя, причем ранг частицы вакуума – мультиполя, соответствует главному квантовому числу. Поэтому уничтожение и рождение электрона, состоящего из разных частиц вакуума, необходимый процесс излучения и поглощения энергии. Разное главное квантовое число соответствует разным частицам вакуума, значит при переходе с одного уровня энергии на другой меняются частицы вакуума, т.е. электрон распадается и образуется вновь с новой частицей вакуума. Свойства частиц вакуума подтверждают распад и образование вновь элементарных частиц при излучении энергии. Но распад и образование вновь электрона происходят и без излучения энергии. Является ли процесс распада электрона общим свойством элементарных частиц. Элементарные частицы образующие смешанную систему двух частиц имеют дискретное время, и значит дискретные импульс и энергию.

Выводы

Но действительные параметры должны удовлетворять действительным законам сохранения, а комплексные параметры комплексным законам сохранения. Комплексным законам сохранения энергии можно удовлетворить. Отмечу, что введение понятия траектории в комплексном пространстве обосновано аналогией между решениями квантовой механики и уравнений Навье-Стокса, которая доказана в тексте статьи. Необходимо сказать, что физики придумали операторный закон сохранения энергии, вместо того, чтобы использовать функции скорости и координаты, причем операторы сохраняются, и построенные на их основе значения сохраняются, причем вычисленная энергия удовлетворяет эксперименту, а использование непрерывных значений функций скорости и координаты не удовлетворяет эксперименту. Дискретные комплексные координаты и скорости тоже удовлетворяют эксперименту, и используется действительная и мнимая часть. Действительная собственная энергия определяется независимым образом из уравнений квантовой механики и может служить основой для действительной части комплексного закона сохранения. При этом определится мнимая часть собственной энергии.

Литература

1. Якубовский Е.Г. Почему физики отказались от понятия траектории в квантовой механике и введение понятия комплексная траектория «Энциклопедический фонд России», 2021, 14 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1631382521.pdf

2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика Нерелятивистская теория т.III, Наука, М.,1969,768с.

3. Якубовский Е.Г. Зависимость от радиуса и углов полной энергии атома

   Globus: Технические науки Том: 7 Номер: 2 (38) Год: 2021 Стр. 21-24

4. Якубовский Е.Г. Полиномы Лежандра не целого порядка «Энциклопедический фонд России», 2020, 11 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1505253784.pdf