

Аналогии между ОТО и СТО

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Пользуясь аналогией между ОТО и СТО вычислим значение четырехмерной скорости, и на этой основе определим метрический тензор ОТО движущегося тела. Построим новые координаты, зависящие от электромагнитного и гравитационного поля, для которых справедливо глобальное преобразование Лоренца. В этих координатах тело при наличии электромагнитного и гравитационного поля движется с постоянной скоростью. В новых однородных и изотропных координатах можно записывать и решать линейные уравнения Максвелла, Дирака, Клейна-Гордона, как в свободном пространстве.

Определение метрического тензора сводится к уравнению, где метрический тензор зависит от гравитационного и электромагнитного поля (см. [1], более подробно [2])

$$\begin{aligned} g_{nm} u^n u^m &= g_{nm} \frac{p^n}{mc} \frac{p^m}{mc} = 1 \\ g_{00} (p^0)^2 + 2 \sum_{n=1}^3 g_{n0} p^n p^0 + \sum_{n,m=1}^3 g_{nm} p^n p^m &= \\ = \sum_{n=0}^3 p_n p^n = m^2 c^2 &= g_{00} (p^0)^2 + \sum_{\beta=1}^3 [g_{k0} (a_{\beta}^k)^{-1}]^2 (p^0)^2 / \lambda_{\beta} - \\ - \sum_{\beta=1}^3 [\sqrt{\lambda_{\beta}} a_{\beta}^k p^k + g_{k0} (a_{\beta}^k)^{-1} p^0 / \sqrt{\lambda_{\beta}}]^2 &= m^2 c^2; \\ (g_{nm} - \lambda_{\beta} \delta_{nm}) a_{\beta}^n &= 0; |g_{nm} - \lambda_{\beta} \delta_{nm}| = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Где собственные числа $\lambda_{\beta} > 0$. Причем справедливо определение обобщенной

энергии E по формуле $\frac{E^2}{c^2} = g_{00} (p^0)^2 + \sum_{\beta=1}^3 [g_{k0} (a_{\beta}^k)^{-1}]^2 (p^0)^2 / \lambda_{\beta}$ так как нулевая

проекция импульса p^0 ответственна за энергию. При этом величина обобщенного импульса равна $P^\beta = \sum_{k=1}^3 [\sqrt{\lambda_\beta} a_k^\beta p^k + g_{k0} (a_\beta^k)^{-1} p^0 / \sqrt{\lambda_\beta}]$, так как содержит линейную комбинацию четырехмерного импульса. При этом имеется связь между обобщенной энергией E и обобщенным импульсом P^β

$$\frac{E^2}{c^2} = \sum_{\beta=1}^3 (P^\beta)^2 + m^2 c^2$$

Аналогом этой формулы в СТО является формула $\frac{E^2}{c^2} = \sum_{\beta=1}^3 (p^\beta)^2 + m^2 c^2$ см. [3].

Величина $(E/c, P^\beta)$ соответствует четырехмерному импульсу тела с учетом гравитационного и электромагнитного поля. При этом можно ввести четырехмерную обобщенную скорость, зависящую от электромагнитного и гравитационного поля

$$U^k / c = \frac{P^k / mc}{\sqrt{1 + \sum_{l=1}^3 (P^l / mc)^2}}, \quad (2)$$

которая определяется с помощью формулы $P^\beta / mc = \frac{U^\beta / c}{\sqrt{1 - \sum_{k=1}^3 (U^k / c)^2}}$.

При этом в случае множества тел, квадрат метрического тензора складывается,

и, имеем, $ds^2 = \sum_{\alpha=1}^N ds_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^N g_{lk\alpha} dx_\alpha^l dx_\alpha^k$ см. [4], более подробно [5] и импульс

определяется по отдельности для каждого тела. Формулы связи координат и

метрического тензора $\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha dx^\alpha = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha dx_\alpha^l, g_{lk} = \sum_{\alpha=1}^N g_{lk\alpha} \frac{dx_\alpha^l}{dx^l} \frac{dx_\alpha^k}{dx^k}$.

Предварительно надо связать величины скоростей центра тяжести $V^l / c = dx^l / c dt$, полученных дифференцированием по собственному времени тела, с четырехмерными скоростями центра тяжести тела $u^l = dx^l / ds$ по

формуле $V^l/c = u^l \alpha, l = 0, \dots, 3, V^0 = c$, где необходимо определить коэффициент пропорциональности α . Причем это нужно сделать для каждой частицы или тела. Назовем скорость V^l/c четырехмерной собственной скоростью в собственной системе координат. Скорость u^l называется четырехмерной скоростью. Это скорость движения тела. Тогда имеем связь собственной скорости с четырехмерной скоростью, полученной, по аналогии с СТО, при этом будем записывать и формулы СТО для сравнения

$$u^n = \frac{V^n/c}{\sqrt{g_{00} + 2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2}} \quad (3)$$

$$u^n = \frac{V^n/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Формулу можно преобразовать к виду, она получается умножением формулы двух скоростей, вычисленных по формуле (3), умноженных на соответствующий метрический тензор и эта величина суммируется

$$\frac{2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2}{g_{00} + 2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2} = 2g_{k0}u^k u^0 + g_{kn}u^k u^n.$$

Преобразуем это уравнение, получив из равенства $\frac{a}{b} = \frac{c}{1}$ соотношение

$$\frac{a}{b-a} = \frac{c}{1-c}$$

$$\frac{2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2}{g_{00}} = \frac{2g_{k0}u^k u^0 + g_{kn}u^k u^n}{1 - 2g_{k0}u^k u^0 - g_{kn}u^k u^n}$$

Подставляя значение скорости, полученной с помощью собственного времени, выраженное через компоненту четырехмерной скорости, получим уравнение по определению α

$$\frac{2g_{k0}u^k u^0 + \sum_{k,n=1}^3 g_{kn}u^k u^n}{g_{00}} \alpha^2 = \frac{2g_{k0}u^k u^0 + \sum_{k,n=1}^3 g_{kn}u^k u^n}{1 - 2g_{k0}u^k u^0 - \sum_{k,n=1}^3 g_{kn}u^k u^n}$$

Откуда находим

$$\alpha = \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - 2g_{k0}u^k u^0 - \sum_{k,n=1}^3 g_{kn}u^k u^n}}.$$

При условии $g_{k0} = 0$, получаем значение $\alpha = \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \sum_{k,n=1}^3 g_{kn}u^k u^n}}$. При этом

значение трехмерной собственной скорости равно

$$V^l / c = u^l \sqrt{\frac{g_{00}}{1 - 2g_{k0}u^k u^0 - \sum_{k,n=1}^3 g_{kn}u^k u^n}}, \text{ которая является аналогом формулы}$$

$$V^l / c = \frac{u^l}{\sqrt{1 + \sum_{l=1}^3 (u^l)^2}} < 1. \text{ При значении } u^l = 1, \text{ получаем значение скорости}$$

$$\frac{V^l}{c} = \sqrt{\frac{g_{00}}{1 - 2\sum_{k=1}^3 g_{k0} - \sum_{k,n=1}^3 g_{kn}}}. \text{ В пространстве Минковского эта скорость равна}$$

$$V^l / c = 1/2.$$

Подставляя в формулу для импульса частицы $p^0 = mci^0, p^k = mci^k$, значение u^n из формулы (3), получим четырехмерный импульс центра тяжести тела

$$\begin{aligned} P^0 &= H(x_i, V^i) / c = mc \sqrt{\frac{[g_{k0}(a_\beta^k)^{-1} / \sqrt{\lambda_\beta}]^2 + g_{00}}{g_{00} + 2g_{k0}V^k / c + g_{kn}V^k V^n / c^2}} \\ P^\beta &= mc \frac{\sqrt{\lambda_\beta} a_k^\beta V^k / c + g_{k0}(a_\beta^k)^{-1} / \sqrt{\lambda_\beta}}{\sqrt{g_{00} + 2g_{k0}V^k / c + g_{kn}V^k V^n / c^2}} \end{aligned} \quad (4)$$

Эти формулы аналогичны формулам СТО

$$P^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, P^\beta = \frac{mV^\beta}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$$

И соответствуют импульсу движения центра тяжести тела с учетом электромагнитного и гравитационного поля.

Имеем функцию Гамильтона $H^2 = (P^\beta)^2 c^2 + m^2 c^4$ центра тяжести тела.

Уравнения движения запишутся в виде $\frac{dP^\beta}{d\tau} = 0, \frac{dx^\beta}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial P^\beta} = -\frac{P^\beta c}{\sqrt{P^2 + m^2 c^2}}$.

Решение этой системы нелинейных уравнений $P^\beta = P_0^\beta$,

$x^\beta = x_0^\beta - \frac{P_0^\beta c(\tau - \tau_0)}{\sqrt{\sum_{\beta=1}^3 (P_0^\beta)^2 + m^2 c^2}}$, где x_0^β произвольная точка пространства.

Причем в силу того, что имеем несколько взаимодействующих тел $P_0^\beta \neq 0$.

Откуда имеем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно скоростей $V^k(x_1, x_2, x_3)$

$$\frac{P_0^\beta}{mc} = \frac{\sqrt{\lambda_\beta} a_k^\beta V^k / c + g_{k0} (a_\beta^k)^{-1} / \sqrt{\lambda_\beta}}{\sqrt{g_{00} + 2g_{k0} V^k / c + g_{kn} V^k V^n / c^2}}.$$

Откуда имеем для скорости в координатах Риманова пространства

$$\begin{aligned} & \left(\frac{P_0^\beta}{mc}\right)^2 [g_{00} + 2g_{k0} V^k / c + g_{kn} V^k V^n / c^2] = \\ & = \lambda_\beta a_k^\beta a_n^\beta V^k V^n / c^2 - 2a_k^\beta g_{n0} (a_\beta^n)^{-1} V^k / c + g_{k0} g_{n0} (a_\beta^k)^{-1} (a_\beta^n)^{-1} / \lambda_\beta \end{aligned}$$

Приведем подобные члены

$$\begin{aligned} & [\lambda_\beta a_k^\beta a_n^\beta - g_{kn} \left(\frac{P_0^\beta}{mc}\right)^2] V^k V^n / c^2 - \\ & - 2[a_k^\beta g_{n0} (a_\beta^n)^{-1} - \left(\frac{P_0^\beta}{mc}\right)^2 g_{k0}] V^k / c + \\ & + g_{k0} g_{n0} (a_\beta^k)^{-1} (a_\beta^n)^{-1} / \lambda_\beta - \left(\frac{P_0^\beta}{mc}\right)^2 g_{00} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Откуда из системы трех нелинейных уравнений определяем величину трехмерной скорости тел $V^k(x^1, x^2, x^3), k=1, \dots, 3$, где имеем

$x^\beta = x_0^\beta - \frac{P_0^\beta c(\tau - \tau_0)}{\sqrt{\sum_{\beta=1}^3 (P_0^\beta)^2 + m^2 c^2}}$, и значит, знаем из (5) распределение импульса и

метрического тензора по пространству в любой момент времени. В случае диагонального метрического тензора имеем

$$[\lambda_\beta a_n^\beta a_n^\beta - g_{nn} (\frac{P_0^\beta}{mc})^2] (V^n)^2 / c^2 = A_n^\beta (V^n)^2 / c^2 = (\frac{P_0^\beta}{mc})^2 g_{00} \quad (6)$$

$$A_n^\beta = \lambda_\beta (a_n^\beta)^2 - g_{nn} (\frac{P_0^\beta}{mc})^2 > 0, g_{nn} < 0$$

Откуда имеем $V^k(x^1, x^2, x^3)/c = \sqrt{(A_\beta^k)^{-1} (\frac{P_0^\beta}{mc})^2 g_{00}}$. Если рассмотреть случай, одного тела, для которого импульс $P_0^\beta = 0$, то имеем стационарную скорость движения тела $V^k(x^1, x^2, x^3)/c = -(a_\beta^k)^{-1} g_{k0} (a_\beta^k)^{-1} / \lambda_\beta$ при неизменном метрическом тензоре. В случае диагонального метрического тензора и условия $P_0^\beta = 0$, скорость тела равна нулю $V^k = 0$. В противоположном случае метрический тензор и величина собственной скорости смещается с постоянной скоростью $-\frac{P_0^\beta c}{\sqrt{\sum_{\beta=1}^3 (P_0^\beta)^2 + m^2 c^2}}$.

Введем координаты по формуле

$$\frac{dy^\beta}{dx^0} = \sum_{k=1}^3 [\sqrt{\lambda_\beta} a_k^\beta dx^k / dx^0 + g_{k0} (a_\beta^k)^{-1} / \sqrt{\lambda_\beta}]$$

$$\frac{dy^0}{dx^0} = \sqrt{g_{00} + \sum_{\beta=1}^3 [g_{k0} (a_\beta^k)^{-1}]^2 / \lambda_\beta} \quad (7)$$

$$\frac{dx^l}{dx^0} = V^l(x^1, x^2, x^3)$$

Для нахождения обобщенных координат $y^\beta = y^\beta(x^0, x_0^1, x_0^2, L), x^l = x^l(x^0, x_0^1, x_0^2, L)$ в параметрическом виде нужно определить линии тока из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7). Если правые части системы дифференциальных уравнений (7) равны нулю, то пространство центра инерции является пространством Минковского и интегрировать систему нелинейных уравнений не надо.

Но эта скорость определена в координатах Риманова пространства $x^l, l = 0, \dots, 3$. Для обобщенных координат $y^l, l = 0, \dots, 3$ справедливо

$$(dy^0)^2 - \sum_{\beta=1}^3 (dy^\beta)^2 = ds^2 = g_{lk} dx^l dx^k \text{ по их построению и имеем обобщенную}$$

постоянную скорость U_l по формуле (2). Т.е. при соответствующих условиях Риманово пространство для данного распределения скорости тела, можно отобразить на обобщенное пространство, причем тело будет двигаться с постоянной скоростью в этой системе координат. Построена система координат, в которой тело движется в искривленном пространстве времени с постоянной скоростью.

При этом в этих обобщенных координатах справедливо преобразование Лоренца в силу того, что метрический интервал равен метрическому интервалу пространства Минковского

$$\begin{aligned} dy_1 &= \frac{dy'_1 + dy'_0 U / c'}{\sqrt{1 - U^2 / c'^2}} \\ dy_0 &= \frac{dy'_0 + dy'_1 U / c'}{\sqrt{1 - U^2 / c'^2}} \\ dy_2 &= dy'_2, dy_3 = dy'_3 \end{aligned}$$

Причем, так как обобщенная скорость тела с учетом электромагнитного и гравитационного поля равна константе, имеем в этих координатах

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{y'_1 + y'_0 U / c'}{\sqrt{1 - U^2 / c'^2}} \\ y_0 &= \frac{y'_0 + y'_1 U / c'}{\sqrt{1 - U^2 / c'^2}}. \\ y_2 &= y'_2, y_3 = y'_3 \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, вычисленные с помощью формулы (7) координаты, инвариантны относительно преобразования Лоренца. Данное преобразование определяет связь между неинерциальными системами координат в Римановом пространстве и инерциальными в обобщенном пространстве. Движение по инерции в этих координатах имеет постоянную скорость U_l . Эта скорость связана со скоростью U'_l в движущейся со скоростью U_0 вдоль оси y_1 системе координат

$$U_1 = \frac{U'_1 + U_0}{1 + U'_1 U_0 / c^2}, U_2 = \frac{U'_2 \sqrt{1 - (U_0 / c)^2}}{1 + U'_1 U_0 / c^2}, U_3 = \frac{U'_3 \sqrt{1 - (U_0 / c)^2}}{1 + U'_1 U_0 / c^2}.$$

При этом в этих координатах будут справедливы основные уравнения СТО для свободного пространства. Волновое уравнение, следующее из уравнений Максвелла, запишется в виде

$$\frac{\partial^2 A_l}{\partial y_0^2} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 A_l}{\partial (y^k)^2} = 0.$$

Движение с постоянной скоростью при отсутствии источников электромагнитного поля, говорит об отсутствии излучения электромагнитной энергии и об отсутствии полей излучения, которые учтены при определении скорости. Единственное решение в виде калибровочного потенциала $eA_l / c = \hbar k_l, l = 0, \dots, 3$

Уравнение Дирака в обобщенных координатах в случае наличия электромагнитного поля запишется в виде, как для свободного пространства

$$(\gamma^\mu{}_{ik} \hat{p}_\mu - mc \delta_{ik}) \psi_k = 0.$$

Получается решение в виде спинора

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_{\pm p} \exp(\mp i p x); u_p = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m} w \\ \sqrt{\varepsilon - m} (\vec{n} \vec{\sigma}) w \end{pmatrix}, u_{-p} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon - m} (\vec{n} \vec{\sigma}) w' \\ \sqrt{\varepsilon + m} w' \end{pmatrix}, w^* w = 1$$

Это позволяет строить решение уравнений классической и квантовой механики как в «свободном пространстве». При этом координаты «свободного пространства» зависят от координат реального пространства. Система нескольких тел при этом описывается как одно тело, с координатой, равной центру тяжести, относительно постоянных масс. Причем в собственной системе координат задача решается однозначно, а решения из других систем координат надо пересчитывать в собственную систему координат. Собственная система координат соответствует нулевой скорости часов и локатора «свободного пространства», определяющего расстояние, в преобразовании Лоренца «свободного пространства». При наличии метрических тензоров Риманова пространства, их надо пересчитывать в пространство Минковского.

Выводы

На основании решения уравнения ОТО относительно гравитационного и электромагнитного поля можно построить систему координат, в которой тело движется с постоянной скоростью. Для этой системы координат, определяется пространство Минковского, в котором справедливы уравнения Максвелла, Шредингера и Дирака для свободного пространства.

Переход из обобщенного пространства в Риманово пространство позволяет построить для последнего пространства собственную систему координат. В самом деле, зная постоянную скорость движения U^β каждого тела, можно восстановить импульс P_0^β относительно каждого тела, и зная метрический тензор для неподвижного тела восстановить собственную скорость V^k тела в собственной системе координат. Интегрируя скорость при начальных движения, условиях, заданных на гиперповерхности, взятой при постоянном времени, получим изменение координат во времени, а значит, определим систему координат.

Литература

1. Якубовский Е.Г. Описание электромагнитного поля с помощью уравнений общей теории относительности. Инженерная физика. 2015.№4, стр. 33-39
2. Якубовский Е.Г. Общая теория гравитационного и электромагнитного поля. «Энциклопедический фонд России», 2014, <http://russika.ru/sa.php?s=434>
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля т.II, Наука, М.,1973,564с.
4. Якубовский Е.Г. Уравнение ОТО для N тел. Евразийский Союз Ученых. №6,2014,стр.48-52 <http://www.euroasia-science.ru/files/arhiv/26-27.09.2014/p5.pdf#page=48>
5. Якубовский Е.Г. Уравнение ОТО для N тел. «Энциклопедический фонд России». 2014г., 11стр. <http://russika.ru/sa.php?s=912>

