Решение с разделяющимися переменными описывающее течение несжимаемой жидкости в произвольном гладком трубопроводе

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

В книге [1] рассматривается движение в трубопроводе как одномерное без условия прилипания жидкости к стенкам трубопровода. Это справедливо для не вязкой жидкости, нормальные компоненты скорости на поверхности трубопровода равны нулю. Но рассматриваются ударные волны, описание фронта которых без вязкости невозможно. Решим уравнение Навье-Стокса без условия прилипания, а с равенством нулю нормальной компоненты скорости. Логарифмический профиль не удовлетворяет условию прилипания, логарифм на стенке равен минус бесконечности. В этом же приближении предлагается решать уравнение Навье-Стокса. Это приближение тонкого пограничного слоя, в котором происходить переход от прилипания на границе системы, до одномерного течения. Покажем, что в результате усреднения решения получится либо нелинейное комплексное, турбулентное решение, либо действительное линейное.

Решение в тонком пограничном слое заменим на линейное $1 = \frac{\partial \ln V_z(\delta)/V_z(n)}{\partial n}\delta, \delta = \lim_{n\to 0}\frac{1}{\frac{\partial \ln V_z(\delta)/V_z(n)}{\partial n}} = +0, \lim_{n\to 0} V_z(n) = 0$. Получается, что толщина переходной зоны стремится к нулю.

Зададим сечение трубопровода формулой

$$S(z) = S_0 - \alpha(z)\frac{S_0 - S_2}{S_1}, 0 < \alpha(z) < S_1, S(z) \in [S_2, S_0]$$

Решение для скорости потока будем искать в виде

$$V_z(z,r,\varphi)=\frac{S_0V_0}{S(z)}g(r\varphi).$$

Тогда в силу разделения переменных уравнение неразрывности удовлетворяется. Найдем чему равно давление. Согласно уравнению Навье-Стокса, давление определяется из уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial z}=-\rho V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}+\eta\Delta V_z$$

Подставим формулу для скорости и проинтегрируем уравнение, получим

$$P_0-P=-\rho V_0^2[\frac{S_0^2}{S^2(z)}-\frac{S_0^2}{S^2(z_0)}]g(r\varphi)/2+\eta V_0\Delta\int_{z0}^{z}\frac{S_0}{S(u)}g(r\varphi)du$$

Тогда получим квадратное уравнение по определению скорости

$$AV_0^2-BV_0+P_0-P=0;V_0=\frac{B\pm\sqrt{B^2-4(P_0-P)A}}{2A}$$

$$A=\rho\int_V[\frac{S_0^2}{S^2(z)}-\frac{S_0^2}{S^2(z_0)}]g(r\varphi)/2dV/V>0;B=\eta\int_V\Delta\int_{z0}^{z}\frac{S_0}{S(u)}g(r\varphi)dudV/V>0$$

В зависимости от знака коэффициента A может получится турбулентное комплексное, или ламинарное действительное решение. Ламинарное действительное нелинейное решение не устойчиво, и в результате образуется устойчивое линейное приближение. В самом деле с ростом давления, линейно растет скорость, а с ростом скорости квадратично растет давление, в сумме они дадут рост давления и скорости. Ламинарное решение определится по линейной части решения $V_0=\frac{P_0-P}{B}$

Литература

1. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц* Гидродинамика. -М.: Наука, 1980, -535с.