Решение дифференциальной автономной системы уравнений первого порядка с произвольной правой частью

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Решение автономного уравнения с произвольной правой частью существует в окрестности координаты положения равновесия. Используя решение с полной правой частью, не линеаризованное, получим интегральное уравнение относительно неизвестной функции, она войдет в интеграл от собственного числа и собственного вектора. Полагая в интеграле от собственного числа и собственного вектора другое устойчивое решение, получим новое интегральное уравнение. Полагая во втором решении в виде неизвестной функции в собственном числе и собственном векторе зависимость от первого решения, опять получим решение с неизвестной функцией в собственном числе и собственном векторе. Чередуя полученные решения в собственном векторе и собственном числе, получим сходящееся к координате положения равновесия решение. Чем больше произошло итераций, тем точнее получающееся решение. Имеется асимптотика решения в случае решения с начальными условиями, причем возникнет линейно растущее решение плюс экспоненциальные колебания с коэффициентами. В случае решения с начальными условиями, равными координатам положения равновесия, причем возникнет дискретное, одинаковое по двум разным формулам решение.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в общем виде, выделив матрицу, не линеаризованную, а имеющую точное значение

$$\frac{dx_k}{dt} = [\frac{\partial F_k}{\partial x_p} + \frac{\partial^2 F_k}{2!\partial x_p \partial x_q}(x_q - a_q) + \frac{\partial^3 F_k}{3!\partial x_p \partial x_q \partial x_s}(x_q - a_q)(x_s - a_s) + ...](x_p - a_p) = \\ = A_{kp}(x_p - a_p).$$

Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы A_{kp}

$$(A_{kp} - \lambda_\alpha \delta_{kp}) g_{k\alpha} = 0 \\ | A_{kp} - \lambda_\alpha \delta_{kp} | = 0.$$

Причем можно получить собственные векторы и числа при кратных собственных значениях см. [1]. Получим решение

$$x_k = a_k + g_{k\alpha}(x_1 - a_1, ..., x_N - a_N, a_1, ..., a_N) \times \\ \times \exp\{\int_{t_0}^{t} [\Lambda_\alpha(x_1 - a_1, ..., x_N - a_N, a_1, ..., a_N)] dt\} \times \\ \times g_{k\alpha}^{-1}(x_1 - a_1, ..., x_N - a_N, a_1, ..., a_N)(x_p - a_p) \quad (1)$$

Это решение удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_k}{dt} = g_{k\alpha}\frac{dc_\alpha}{dt} + \frac{dg_{k\alpha}}{dt}c_\alpha = A_{kp} g_{p\alpha} c_\alpha$$

$$\frac{dc_\beta}{dt} = g_{\beta k}^{-1} A_{kp} g_{p\alpha} c_\alpha - g_{\beta k}^{-1}\frac{dg_{k\gamma}}{dt} c_\gamma = \Lambda_\beta c_\beta$$

$$\Lambda_\beta = \lambda_\beta - g_{\beta k}^{-1}\frac{dg_{k\gamma}}{dt}\frac{c_\gamma}{c_\beta}$$

Рассмотрим уравнение с другой координатой положения равновесия

$$\frac{dx_k}{dt} = [\frac{\partial F_k}{\partial x_p} + \frac{\partial^2 F_k}{2!\partial x_p \partial x_q}(x_q - b_q) + \frac{\partial^3 F_k}{3!\partial x_p \partial x_q \partial x_s}(x_q - b_q)(x_s - b_s) + ...](x_p - b_p) = \\ = B_{kp}(x_p - b_p) \quad (2)$$

Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы B_{kp}

$$(B_{kp} - \lambda_\beta \delta_{kp}) h_{k\beta} = 0 \\ | B_{kp} - \lambda_\beta \delta_{kp} | = 0.$$

Получим решение

$$x_k = b_k + h_{k\beta}(x_1 - b_1,...,x_N - b_N, b_1,...,b_N)\exp[\int_{t_0}^{t} \Lambda_\beta(x_1 - b_1,...,x_N - b_N, b_1,...,b_N)dt]\times$$
$$\times h_{k\beta}^{-1}(x_1 - b_1,...,x_N - b_N, b_1,...,b_N)(x_p - b_p) \qquad (3)$$

Подставляя решение (3) в уравнение (1). Получим решение, зависящее от неизвестной функции. Подставляя решение (1), в преобразованное уравнение (3), получим следующую итерацию. Чередуя решение (1) и (3), получим итерационную схему решения. Обрываем большое число итераций с решением, равным постоянному значению, получим приближенное решение системы уравнений. Отмечу, что асимптотикой (1) при переходе из точки $b_1,...,b_N$ в точку $a_1,...,a_N$ и обратно являются функции

$$x_{ka} = a_k + g_{k\alpha}(b_1,...,b_N, a_1,...,a_N)\exp[\lambda_\alpha(b_1,...,b_N, a_1,...,a_N)(\frac{t_0 t_{complex}}{t_{complex} - t_0} - t_0)]\times$$
$$\times g_{k\alpha}^{-1}(b_1,...,b_N, a_1,...,a_N)(b_p - a_p) \qquad . \qquad (4)$$
$$x_{kb} = b_k + g_{k\beta}(a_1,...,a_N, b_1,...,b_N)\exp[\lambda_\beta(a_1,...,a_N, b_1,...,b_N)(t_{complex} - t_0)]\times$$
$$\times g_{\beta p}^{-1}(a_1,...,a_N, b_1,...,b_N)(a_p - b_p)$$

При условии $t_{complex} \to \infty$ обе формулы имеют предел b_k. При условии $t_{complex} \to t_0$ обе формулы имеют предел a_k. В промежуточном случае имеются совпадающие значения обеих решений в комплексных корнях $t_{complex}$. Причем изменение комплексного времени описывается формулой (5).

Где удовлетворяется асимптотика

$$\operatorname{Re}\lambda_\alpha(b_1,...,b_N, a_1,...,a_N) \le 0; \operatorname{Re}\lambda_\alpha(a_1,...,a_N, b_1,...,b_N) \le 0,$$

причем одно из собственных значений мнимое, а сходимость наблюдается на все отрицательные значения собственного числа. Если оба положения равновесия содержат мнимое число, то образуется сложное колебание, между двумя координатами положения равновесия, причем одно решение переходит в другое в точке с комплексным временем, зависящим от действительного времени по формуле

$$x_{ka}(t_n) = x_{kb}(t_n); t_{complex} = t_{n-1} + (t_n - t_{n-1})(t - n + 1); n - 1 \le t \le n; |t_n| > |t_{n-1}| \qquad (5)$$

Причем в счетном количестве этих времен оба решения совпадают, т.е. получается, что это решение существует при целом дискретном времени. Корень этого уравнения определяется из приближенного равенства

$$\frac{t_0 t_{complex}}{t_{complex} - t_0} = t_{complex} - 2\pi in - 2b_n, b_n \sim const$$

$$t_{complex} = t_0 + \pi in + b_n + \sqrt{(\pi in + b_n)^2 + t_0^2} = \begin{cases} 2\pi in + 2b_n + t_0 + \dfrac{t_0^2}{2(\pi in + b_n)} + O(\dfrac{1}{\pi in + b_n})^2 \\ t_0 - \dfrac{t_0^2}{2(\pi in + b_n)} + O(\dfrac{1}{\pi in + b_n})^2 \end{cases}$$

Решим уравнение (2) относительно начальных условий

$$\frac{dx_k}{dt} = F_k^0 + [\frac{\partial F_k}{\partial x_p} + \frac{\partial^2 F_k}{2!\partial x_p \partial x_q}(x_q - x_q^0) + \frac{\partial^3 F_k}{3!\partial x_p \partial x_q \partial x_s}(x_q - x_q^0)(x_s - x_q^0) + ...](x_p - x_q^0) =$$
$$= F_k^0 + B_{kq}(x_q - x_q^0)$$

Тогда решение (3) запишется в виде

$$x_k - F_k^0(t - t_0) = x_p^0 + h_{k\beta}(x_1 - x_1^0, ..., x_N - x_N^0, x_1^0, ..., x_N^0) \times$$
$$\times \exp[\int_{t_0}^{t} \Lambda_\beta(x_1 - x_1^0, ..., x_N - x_N^0, x_1^0, ..., x_N^0)dt] \times$$
$$\times h_{k\beta}^{-1}(x_1 - x_1^0, ..., x_N - x_N^0, x_1^0, ..., x_N^0)(x_p - x_p^0)$$

Асимптотическое решение (4) запишется в виде

$$x_{ka} = a_k + g_{k\alpha}[x_1^0 + F_1^0(t - t_0) - a_1, ..., x_N^0 + F_N^0(t - t_0) - a_N, a_1, ..., a_N] \times$$
$$\times \exp\{\int_{t_0}^{t} \Lambda_\alpha[x_1^0 + F_1^0(t - t_0) - a_1, ..., x_N^0 + F_N^0(t - t_0) - a_N, a_1, ..., a_N]dt\} \times \quad .$$
$$\times g_{k\alpha}^{-1}[x_1^0 + F_1^0(t - t_0) - a_1, ..., x_N^0 + F_N^0(t - t_0) - a_N, a_1, ..., a_N][x_p^0 + F_p^0(t - t_0) - a_p]$$

Причем для устойчивости решения необходимо, чтобы интеграл стремился к минус бесконечности и собственное число имело отрицательную действительную часть

$$\lim_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} \Lambda_\alpha[x_1^0 + F_1^0(t - t_0) - a_1, ..., x_N^0 + F_N^0(t - t_0) - a_N, a_1, ..., a_N]dt = -\infty \quad .$$
$$\mathrm{Re}\,\lambda_\beta(a_1, ..., a_N, x_1^0, ..., x_N^0) < 0$$

Для получения более точной формулы надо произвести больше итераций, но условие сходимости при этом не изменится.

Выводы

Уточнено условие сходимости к координате положения равновесия. Получена рекуррентная формула решения уравнения первой степени с нелинейной правой частью. Оказалось, что переход из одного положения равновесия в другое описывается дискретным временем. Он описывается двумя разными формулами, совпадающие значения которых имеют дискретное не равномерное время с постоянным шагом аргумента. Или необходимо рассматривать непрерывное решение с переходом из одной формулы в другую, в определенной точке с разрывом производной по времени. При этом для совпадения координат придется перейти к комплексному времени, и совершенно не понятно, почему надо отказываться от одного решения и переходить к другому. Т.е. решение с непрерывной производной по времени из двух решений построить не удается. Поэтому предпочтительнее общее решение в дискретные моменты времени, которое не содержит логических противоречий.

Литература

1. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1980. – 352 с.