

# Исследование решения уравнения Навье – Стокса II

Е.Г. Якубовский

e – mail [yakubovski@rambler.ru](mailto:yakubovski@rambler.ru)

## Аннотация

Решение нелинейных уравнений в частных производных могут определять значение безразмерных неизвестных функций с большой величиной (например, большое число Рейнольдса). При этом они сводятся к счетному количеству обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Турбулентные решения, которые соответствуют большим значениям неизвестной функции, оказываются комплексными. Переход от действительного решения к комплексному турбулентному решению реализуется через бесконечность правой части обыкновенной системы дифференциальных уравнений, к которым сводится уравнение Навье - Стокса. При этом действительное решение уравнения Навье – Стокса определяет стремящуюся к бесконечности функцию. При этом комплексное решение конечно. Вычислен коэффициент сопротивления потока жидкости в круглом трубопроводе при разных шероховатостях стенок трубопровода. Отличие данного алгоритма решения задачи гидродинамики в том, что он построен без использования эмпирических констант, все формулы выводятся. Формулы справедливы не только для трубопровода с круглым сечением, но и для движения произвольного тела в потоке. Приведен алгоритм решения внешней задачи для произвольного тела за счет введения комплексного радиуса тела.

### 1. Учет ламинарного решения уравнения Навье – Стокса

*Значение коэффициента сопротивления круглого трубопровода при произвольном числе Рейнольдса и степени шероховатости известно только из эксперимента. Предлагается с помощью комплексного решения получить решение уравнения Навье – Стокса и на основе качественных соображений*

*определить влияние шероховатости на решение уравнения Навье – Стокса. При этом с точностью 10% удалось построить классические графики Никурадзе зависимости коэффициента сопротивления круглого трубопровода в зависимости от произвольного числа Рейнольдса и степени шероховатости.*

## Введение

Проблема описания движения жидкости в турбулентном режиме не решена. Это создает трудности при расчете нефтяных, газовых трубопроводов. Кроме того, не существует теоретических методов описания движения тела в турбулентной среде. Это и описание движения летательного аппарата, движения подводной лодки или надводного корабля в турбулентном режиме. Без использования моделирования движущегося тела в аэродинамических трубах, или водных бассейнах, невозможно проектирование движущихся в вязкой среде тел. Существуют приближенные формулы аппроксимации коэффициента сопротивления трубопровода на отдельных участках числа Рейнольдса см.[1],[2]. Известны классические экспериментальные графики Никурадзе по определению коэффициента сопротивления круглого трубопровода в зависимости от числа Рейнольдса и степени шероховатости. Применяется аппроксимация конвективного члена, сводящая задачу решения уравнения Навье – Стокса к линейной с эффективной турбулентной вязкостью. Но такое преобразование искажает решение уравнения Навье – Стокса и для совпадения с экспериментом коэффициент турбулентной вязкости может иметь произвольное значение, вплоть до отрицательного. Применяется метод Галеркина, сводящий решение задачи гидродинамики к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Но при турбулентном режиме эта система нелинейных уравнений имеет комплексные положения равновесия, т.е. решение комплексное. И действительно в турбулентном режиме система уравнений гидродинамики в действительной плоскости не имеет решения, решение уравнения стремится к бесконечности см. [3]. При этом комплексное

решение конечно. Физический смысл комплексного решения и его колебательный характер мнимой части см. [4], [5]. Т.е. решать задачу гидродинамики в турбулентном режиме надо в комплексной плоскости. При этом турбулентное решение определяется не однозначно, а имеется счетное количество ветвей решения.

### 1.1. Расчет трубопровода с круглым сечением в случае несжимаемой жидкости

Реализацией данного алгоритма решение является расчет трубопровода с круглым сечением. Решение задачи о трубопроводе с круглым сечением, будем искать в виде  $V_z = V_0(t)[1 - r^2 / a^2(z)]$  в цилиндрической системе координат. Так как внешнее воздействие имеется только для продольной оси  $P(z) = P_2 + \frac{P_1 - P_2}{L}z$ , где  $P_2, P_1$  давление в начальной и конечной части трубопровода, величина  $L$  это длина трубопровода, радиальной и угловой скоростью пренебрегаем. Внешнее воздействие равно  $h_z = \frac{P_1 - P_2}{L}$ . Согласно

формуле (1.2.2) градиент давления равен  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_1 - P_2}{L}$ . Получим уравнение

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{P_1 - P_2}{L} + \nu \Delta V_z.$$

Подставляем значение скорости, получим уравнение

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} (1 - r^2 / a^2) + 2V_0^2 (1 - r^2 / a^2) \frac{r^2}{a^3} \frac{da}{dz} = -\frac{P_1 - P_2}{\rho L} - \nu \frac{4V_0}{a^2}$$

Умножаем это уравнение на радиус и интегрируем это уравнение по радиусу, Так как система координат цилиндрическая, получим

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} a^2 / 6 + \frac{(P_1 - P_2)a^2}{2\rho L} + 2\nu V_0 = -V_0^2 \frac{ada}{6dz}.$$

Для получения счетного количества решений, умножаем это уравнение на функцию  $r(1 - r^2/a^2)^n$  и интегрируем по пространству. Получаем счетное количество турбулентных решений, как для гладкой, так и шероховатой поверхности. Стационарное ламинарное решение  $da/dz = 0$  определяется однозначно. При этом, как и у уравнения Шредингера получается счетное количество турбулентных решений, каждое со своей собственной энергией. При переходе из одного состояния в другое излучается дискретная энергия. Минимум собственной энергии определяет выбор решения.

Беря модуль правой части, и находя средний модуль тангенса угла отклонения, получим

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} a^2 / 6 + \frac{(P_1 - P_2)a^2}{2\rho L} + 2\nu V_0 = V_0^2 \frac{a \langle |da/dz| \rangle}{6} = V_0^2 \frac{2ak}{l} \quad (1.1.1)$$

В случае выбора знака минус у значения среднего модуля тангенса угла отклонения  $\langle |da/dz| \rangle$ , получится, что шероховатости увеличивают скорость потока, так как полная производная  $\frac{dV_0}{dt}$  увеличится, что неправильно, скорость потока должна уменьшаться за счет шероховатостей.

При ведении турбулентной вязкости используется отрицательный знак у средней скорости, связанной с корреляционной функцией скорости процесса  $-\rho \langle u'_i u'_\alpha \rangle = \rho K \frac{\partial \langle u'_i \rangle}{\partial x_\alpha}$  см. [1], что приводит к знаку плюс у среднего по модулю тангенса наклона шероховатости. Уравнение движения с учетом возмущения имеет вид

$$\frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho \langle u_i \rangle \langle u_\alpha \rangle + \rho \langle u'_i u'_\alpha \rangle) = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \rho \nu \langle \Delta u_i \rangle$$

Т.е. конвективный член нужно брать с учетом минуса, причем правую часть (1.1.1) брать со знаком плюс. Кроме того, надо выбирать знак плюс у среднего тангенса модуля наклона шероховатости, чтобы получилось комплексное

турбулентное решение. В противном случае, решение, описывающее пульсирующий турбулентный режим не получится.

Переходя от радиуса к диаметру трубопровода и разделив на величину  $v^2 k / (dl)$ , получим

$$\frac{dR_0}{d\tau} = R_0^2 - 2R_0 R_{cr} + \frac{T}{8}; T = \frac{(P_2 - P_1) d^3 R_{cr}}{\rho v^2 L} \quad (1.1.2)$$

$$\tau = 24t \cdot v / (R_{cr} d^2), R_0 = V_0 d / v, 1 / R_{cr} = \langle |da / dz| \rangle / 12 = k / l = \langle |\tan \varphi| \rangle$$

Если же использовать другую ветвь квадратного корня из дисперсии, то получим не устойчивое решение и уравнение

$$\frac{dR_0}{d\tau} = -R_0^2 - 2R_0 R_{cr} + \frac{T}{8}.$$

Тогда стационарное решение при большом перепаде давления имеет вид

$$R_0 = -R_{cr} + \sqrt{R_{cr}^2 + T/8}.$$

Ламинарное решение этих двух уравнений общее. В турбулентном режиме при больших давлениях имеет линейную зависимость числа Рейнольдса от корня из давления. По мере увеличения давления растет и значение числа Рейнольдса, что увеличивает давление. Т.е. решение не устойчиво. В случае комплексного решения оно равно

$$R_0 = R_{cr} - i\sqrt{T/8 - R_{cr}^2}.$$

При этом с ростом давления растет мнимая часть скорости, что не приводит к росту действительного давления.

Если микро-шероховатости  $\langle |\tan \varphi| \rangle$  распределены по всей поверхности трубопровода, они находятся и на макрошероховатостях и определяют критическое число Рейнольдса и коэффициент сопротивления при числе Рейнольдса, равном 2300. Микро-шероховатости имеют молекулярную природу и определяются средним размером атома, равным среднему геометрическому между размером ядра  $r_A$ , и размером орбиты Бора  $\sigma = \sqrt{r_A a_0}$ , при расстоянии между атомами  $a = 3.043A$ , равному некоторой величине,

определяемой свойствами границы трубопровода, железом, титаном и углеродом. Расстояние между атомами железа  $a_{Fe} = 2.87 \text{ \AA}$ , между атомами титана  $a_{Ti} = 3.46 \text{ \AA}$ , между атомами углерода  $a_C = 3.567 \text{ \AA}$  см. [7]. При этом абсолютная величина тангенса наклона высоты микро-шероховатости поверхности металла в трубопроводе определяется по формуле

$h(z) = \langle |\tan \varphi| \rangle = \sum_{n=-N}^N \exp[-(z - na)^2 / 2\sigma^2] / (2N\sqrt{2\pi})$ . Средний тангенс наклона равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{cr}} &= \int_{-\infty}^{\infty} h(z) \frac{dz}{2Na} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(z - na)^2 / 2\sigma^2] dz}{2\sqrt{2\pi}a} = \frac{\sigma}{2a} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 6.086} \sqrt{\frac{r_A}{a_0}} = \frac{1}{2 \cdot 6.086} \sqrt{\frac{1.4 \cdot 10^{-13}}{0.5 \cdot 10^{-8}}} = \frac{1}{2300} \end{aligned}$$

Величина критического числа Рейнольдса относительно диаметра равна  $R_{cr} = 2300$ . Но почему критическое число Рейнольдса для сферы равно  $3 \cdot 10^5$ .

Это связано с разным определением критического числа Рейнольдса. Оно равно

$$\frac{1}{R_{cr}} = \frac{da}{ds} = \frac{dl_{eff}}{ds} \cdot \frac{a}{l_{eff}} = \frac{1}{2300} \cdot \frac{a}{l_{eff}}, \quad \text{где величина } l_{eff} \text{ эффективный,}$$

гидродинамический размер тела, включая среду,  $a$  истинный геометрический

размер тела, причем  $\frac{dl_{eff}}{ds} = |\tan \varphi| = \frac{1}{2300}$  молекулярный тангенс наклона

шероховатости. Причем отношение  $\frac{a}{l_{eff}}$  может иметь значение  $\frac{a}{l_{eff}} = 0.01$ .

Необходимо отметить, что к микро-шероховатостям относятся и ступенчатое изменение высоты поверхности. Его тангенс наклона образует дельта функцию и при усреднении дает вклад в критическое число Рейнольдса в данном сечении

$$\frac{2}{R_{cr}} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^P \frac{|\Delta a_k|}{Pa} \delta(z - z_k) dz = \sum_{k=1}^P \frac{|\Delta a_k|}{Pa}, \quad \text{где скачок высоты произошел на}$$

разных углах данного сечения.

Величина критического числа Рейнольдса равна  $R_{cr} = 2300$ . Макрошероховатости  $\langle |da/dz| \rangle$  более редкие и определяют коэффициент сопротивления на числах Рейнольдса в 12 и более раз больше.

Получаем условие стационарности для уравнения Навье – Стокса с учетом одного члена ряда-решения в одномерном случае

$$R_0^2 - 2R_0R_{cr} + T/8 = 0,$$

В одномерном случае при постоянстве сечения трубопровода уравнение неразрывности выполняется тождественно. Ламинарное решение этого уравнения равно

$$R_0 = R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8} = [R_{cr}/\sqrt{T} - \sqrt{R_{cr}^2/T - 1/8}]\sqrt{T}.$$

При внешнем давлении, равном  $T = 8R_{cr}^2$  начинается комплексное решение и турбулентный режим, так как число Рейнольдса в этой точке равно критическому значению. Из эксперимента и путем проделанного вычисления имеем значение критического числа Рейнольдса для круглого трубопровода

$$R_{cr} = \frac{l}{k} \langle |\tan \varphi| \rangle = 2300. \quad \text{Коэффициент сопротивления трубопровода с}$$

круглым сечением определяется по формуле (в формулу подставляем перепад давления, выраженный через безразмерное давление)

$$\lambda = \frac{2\Delta P_L d}{\rho V_a^2 L} = \frac{2T v^2 k}{V_a^2 d^2 l} = \frac{2T}{R_{cr} |R_a^2|},$$

Средняя скорость, входящая в число Рейнольдса, равна

$$V_a = \int_0^a r V_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) dr / \int_0^a r dr = V_0 / 2, R_a = \frac{V_a d}{\nu} = \frac{R_0}{2}.$$

Асимптотика коэффициента сопротивления трубопровода  $\lambda_{lam}$  с круговым сечением для ламинарного режима вычислена верно.

$$R_a = R_0 / 2 = (R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8}) / 2 \cong \frac{T}{32R_{cr}}, \frac{T}{8R_{cr}^2} \ll 1, \lambda_{lam} = \frac{2T}{R_{cr} |R_a^2|} = \frac{64}{|R_a|}$$

Асимптотика получена при малом числе Рейнольдса, когда конвективный член мал.

При давлении больше критического образуется комплексное решение и вихри

$$R_z = (R_{cr} - i\sqrt{T/8 - R_{cr}^2})(1 - \frac{r^2}{a^2})$$

$$R_\varphi = \omega_\varphi r \frac{a}{v} = (R_{cr} - i\sqrt{T/8 - R_{cr}^2})(1 - \frac{r^2}{a^2}) \frac{r^2}{a^2} .$$

$$R = \sqrt{R_z^2 + R_\varphi^2} = (R_{cr} - i\sqrt{T/8 - R_{cr}^2})(1 - \frac{r^2}{a^2}) \sqrt{1 + \frac{r^4}{a^4}}$$

При этом угловая скорость вращения турбулентного потока равна

$$2\omega_\varphi = (\text{rot}\mathbf{V})_\varphi = \sqrt{T/8 - R_{cr}^2} \frac{2vr}{a^3}$$

$$\frac{dz}{ad\tau} = R_{cr} (1 - \frac{r^2}{a^2}) + \sqrt{T/8 - R_{cr}^2} (1 - \frac{r^2}{a^2}) \sin[\sqrt{T/8 - R_{cr}^2} (1 - \frac{r^2}{a^2})\tau + \varphi]$$

$$\frac{z - z_0}{a} = R_{cr} (1 - \frac{r^2}{a^2})\tau - \cos[\sqrt{T/8 - R_{cr}^2} (1 - \frac{r^2}{a^2})\tau + \varphi] + \cos \varphi .$$

$$\frac{rd\varphi}{ad\tau} = R_{cr} (1 - \frac{r^2}{a^2}) \frac{r^2}{a^2} + \sqrt{T/8 - R_{cr}^2} (1 - \frac{r^2}{a^2}) \frac{r^2}{a^2} \sin[\sqrt{T/8 - R_{cr}^2} (1 - \frac{r^2}{a^2}) \frac{r^2}{a^2} \tau + \psi]$$

$$\frac{r(\varphi - \varphi_0)}{a} = R_{cr} (1 - \frac{r^2}{a^2}) \frac{r^2}{a^2} \tau - \cos[\sqrt{T/8 - R_{cr}^2} (1 - \frac{r^2}{a^2}) \frac{r^2}{a^2} \tau + \psi] + \cos \psi$$

Турбулентное решение определяет волну со средней скоростью, плюс колебание, как продольной координаты, так и угла. Ламинарное вращательное и продольное движение определяется по формулам

$$2\omega_\varphi = (\text{rot}\mathbf{V})_\varphi = (R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8}) \frac{2vr}{a^3}; R_z = (R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8})(1 - \frac{r^2}{a^2})$$

$$R_\varphi = (R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8})(1 - \frac{r^2}{a^2}) \frac{r^2}{a^2} .$$

Сумма двух перпендикулярных движений определяется по формуле

$$R = \sqrt{R_z^2 + R_\varphi^2} = (R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8})(1 - \frac{r^2}{a^2}) \sqrt{1 + \frac{r^4}{a^4}}$$

Вращательное движение не входит в уравнение неразрывности и не участвует в уравнении Навье-Стокса для продольной компоненты в случае постоянного сечения трубопровода. Но вращательное движение обусловлено ротором скорости, что не менее существенно. Остальные уравнения Навье-Стокса



определят перепад давления. Таким образом продольное и вращательное движение вокруг оси трубопровода определит решение как уравнений Навье-Стокса, так и уравнения неразрывности.

Причем при условии  $R_{cr} > \sqrt{T/8 - R_{cr}^2}$  фаза определится как комплексная, имеющая два разных значения. Решений существует два, т.е. образуется две действительные системы. Образуется две ударные волны, с давлением, удовлетворяющим условию  $T < 16R_{cr}^2$ .

Из мнимой части, имеющей переменное значение надо извлечь корень, предварительно нормировав ее. Образуется две скорости

$R_z(t, r_0)/\sqrt{T} = \sqrt{R_{cr}^2/T \pm \sqrt{1/8 - R_{cr}^2/T} (1 - \frac{r^2}{a^2})}$  одна область имеет нулевую

экстремальную скорость, а другая область экстремальную скорость, равную

$$R_{cr} = \frac{\delta}{a} = \frac{\delta c_s}{v} M = \delta M \sqrt{\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \ln \psi}{\partial x^k}\right)^2} \gg 1, a = \frac{v}{c_s M} = \frac{1}{M \sqrt{\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \ln \psi}{\partial y^k}\right)^2}}, \quad \text{где}$$

используется волновая функция уравнения Шредингера. Критическое число Рейнольдса равно отношению толщины переходного слоя ударной волны к характерному размеру системы. В зависимости от скорости ударной волны получается разные значения характерного параметра. Характерный размер имеет предел, размер молекулы воздуха. Размер молекулы кислорода и азота равен  $3 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ . Поэтому максимальный Мах в атмосфере равен

$$M = \frac{v}{c_s a} = \frac{0.15}{3.4 \cdot 10^{-8} \cdot 3} = 149 = \frac{c}{c_s \sqrt{\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \ln \psi}{\partial y^k}\right)^2}}; y^l = x^l / \delta.$$

Для атома водорода скорость звука равна  $c_s = c/137$  и имеем максимальное

число Махов, равное  $\frac{137}{|-1/n + l + \sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{2/n - \alpha_k}|}$ . Имеем совпадение по порядку

величины максимального Маха в атмосфере с максимальным Махом атома водорода. Где имеем два комплексных значения фазы и две области ударной

волны.

При условии  $R_{cr} \leq \sqrt{T/8 - R_{cr}^2}$  получаем одно значение фазы, и образуется одна действительная система.

Но если усреднять мнимую безразмерную часть, получим квадратное уравнение

$$(\operatorname{Re} x_\alpha)^2 + (\operatorname{Im} x_\alpha)^2 \alpha^2 = (\operatorname{Re} x_\alpha)^2 \{1 + (\operatorname{Im} x_\alpha)^2 / [(\operatorname{Re} x_\alpha)^2 + (\operatorname{Im} x_\alpha)^2 \alpha^2]\}$$

Получаем квадратное уравнение  $\alpha^4 \left(\frac{\operatorname{Im} x_\alpha}{\operatorname{Re} x_\alpha}\right)^2 + \alpha^2 - 1 = 0$ .

Решение этого уравнения

$$\alpha^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(\operatorname{Im} x_\alpha / \operatorname{Re} x_\alpha)^2}}{2(\operatorname{Im} x_\alpha / \operatorname{Re} x_\alpha)^2} = \begin{cases} 1 - (\operatorname{Im} x_\alpha / \operatorname{Re} x_\alpha)^2, (\operatorname{Im} x_\alpha / \operatorname{Re} x_\alpha)^2 \ll 1 \\ |\operatorname{Re} x_\alpha / \operatorname{Im} x_\alpha|, (\operatorname{Im} x_\alpha / \operatorname{Re} x_\alpha)^2 \gg 1 \end{cases}$$

Значение числа Рейнольдса в действительной плоскости равно

$$R^2 = (\operatorname{Re} x_\alpha)^2 / 2 + \sqrt{(\operatorname{Re} x_\alpha)^4 / 4 + (\operatorname{Re} x_\alpha)^2 (\operatorname{Im} x_\alpha)^2} = \\ = \begin{cases} (\operatorname{Re} x_\alpha)^2 + (\operatorname{Im} x_\alpha)^2, (\operatorname{Im} x_\alpha)^2 < (\operatorname{Re} x_\alpha)^2 \\ (\operatorname{Re} x_\alpha)^2 + \operatorname{Re} x_\alpha \operatorname{Im} x_\alpha, (\operatorname{Im} x_\alpha)^2 > (\operatorname{Re} x_\alpha)^2 \end{cases}$$

Подставим значение параметров в это решение

$$R^2 = (\operatorname{Re} x_\alpha)^2 / 2 + \sqrt{(\operatorname{Re} x_\alpha)^4 / 4 + (\operatorname{Re} x_\alpha)^2 (\operatorname{Im} x_\alpha)^2} \\ = R_{cr}^2 / 2 + \sqrt{(R_{cr})^4 / 4 + R_{cr}^2 \beta^2 (T^2 / 8 - R_{cr}^2 T)} \\ \beta = \{2 / [k R_{cr} / d + 1]\}^{3/8}$$

Коэффициент сопротивления при этом определяется по формуле

$$\lambda = \frac{2T}{R_{cr} |R_a^2|} = \frac{8T_0}{|R_0^2|} = \frac{8}{[R_{cr}^2/2T_0 + \sqrt{R_{cr}^4/4T_0^2 + R_{cr}^2\beta^2(1/8 - R_{cr}/T_0)]}, T_0 = \frac{(P_2 - P_1)d^3}{\rho v^2 L},$$

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \lambda = \frac{16 \cdot 2^{1/2}}{R_{cr} \beta}$$

При малой мнимой части для коэффициента сопротивления имеем рост решения

$$\lambda = \frac{2T}{R_{cr} |R_a^2|} = \frac{8T_0}{|R_0^2|} = \frac{8T_0}{R_{cr} [R_{cr}/2 + \sqrt{R_{cr}^2/4 + \beta^2(T_0^2/8 - R_{cr}T_0)]} =$$

$$= \frac{8}{x} [4 + \sqrt{16 + 8(x^2 - R_{cr}x)/R_{cr}^2\beta^2}], x = R_{cr}/2 + \sqrt{R_{cr}^2/4 + \beta^2(T_0^2/8 - R_{cr}T_0)} \geq R_{cr}$$

$$\beta = g[2/(kR_{cr}/d + 1)], \ln x \rightarrow \begin{cases} \ln R_{cr}, T_0 \sim 8R_{cr} \\ \ln \beta + \ln T_0 - (\ln 8)/2, T_0 \gg 8R_{cr} \end{cases}$$

$$\ln \lambda = \ln 8 [4 + \sqrt{16 + 8(x^2 - R_{cr}x)/R_{cr}^2\beta^2}] - \ln x \rightarrow \begin{cases} \ln 64 - \ln x, x \sim R_{cr} \\ \ln 16\sqrt{2} - \ln R_{cr} - \ln \beta, x \gg R_{cr} \end{cases}$$

В ламинарном режиме имеем формулу

$$\lambda = \frac{2T}{R_{cr} |R_a^2|} = \frac{8T_0}{|R_0^2|} = \frac{2T_0}{(R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T_0 R_{cr}/8})^2/4} = \frac{64}{R_a}$$

$$\lambda = \frac{2T_0}{[R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T_0 R_{cr}/8}]^2/4} = \frac{64(xR_{cr} - x^2)}{R_{cr}x^2} \rightarrow \frac{64}{x}, x \leq R_{cr}$$

$$x = (R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T_0 R_{cr}/8})/2, T_0 = 32(xR_{cr} - x^2)/R_{cr} \rightarrow 32x$$

Число Рейнольдса потока пропорционально на бесконечности давления  $R \sim \sqrt{T} \sim d_{eff}^{3/2}$ . При этом самая гладкая поверхность соответствует среднему модулю тангенса наклона, равному обратной величине критического числа Рейнольдса. При решении в виде ряда получится вычисляемое другое значение  $\alpha$ . Самая гладкая поверхность соответствует среднему модулю тангенса наклона, равного обратному значению критического числа Рейнольдса, так как самые малые модули тангенса наклона соответствуют молекулярному уровню

шероховатости. При этом эффективный диаметр меньше истинного диаметра. Причем отношение эффективного диаметра к истинному пропорционально  $\alpha^{1/4}$ . Средний модуль тангенса угла наклона не может быть меньше молекулярных шероховатостей и минимальное его значение равно  $\tan \varphi = 1/R_{cr}$ . Т.е. величина 1 это максимальное отношение эффективного диаметра к истинному диаметру. Для внешней задачи эффективный диаметр увеличится, и коэффициент  $\beta$  определится по формуле  $\beta = \{[k(T, \xi_0)R_{cr}/l(T, \xi_0) + 1]/2\}^\sigma$ .

При этом коэффициент  $\beta$  пропорционален

$$\sqrt{T} \sim \beta = \langle d_{eff}^{3/2} \rangle / d^{3/2} = \{2/[k(T, \xi_0)R_{cr}/l(T, \xi_0) + 1]\}^\sigma, \sigma = \frac{1}{4} \frac{3}{2} = \frac{3}{8},$$

который при нулевой макро-шероховатости эффективный диаметр равен 1, т.е. при увеличении степени шероховатости эффективный диаметр уменьшается. При нулевой макро-шероховатости имеется микро-шероховатость. При этом отношение тангенса наклона макро-шероховатостей к микро-шероховатостям больше чем величина  $k/l \langle |\tan \alpha| \rangle = 1$ .

При отношении  $l/k = 30$ , получаем значение эффективного диаметра трубопровода  $d_{eff}/d = [\alpha/(2300/30 + 1)]^{1/4} = 0.38$ .

Формула подобрана таким образом, чтобы правильно определять зависимость числа Рейнольдса относительно внешнего давления и коэффициент сопротивления трубопровода при бесконечном числе Рейнольдса и внешнего давления  $\text{Im } R_0 = -i^4 \sqrt{1/8} \{ \alpha / [k(\infty, \xi_0)R_{cr}/l(\infty, \xi_0) + 1] \}^{\sigma/2} \sqrt{T}$  при коэффициенте сопротивления, равном величине  $\lambda = \frac{16\sqrt{2}}{R_{cr} [\alpha / (R_{cr} / \xi_0 + 1)]^\sigma}$ .

Эти же коэффициенты получаются при решении с помощью ряда, но вместо величины 1/8 в случае ряда используется коэффициент 1. Другое значение константы приводит к другому значению коэффициента  $\alpha$ .

При постоянном среднем модуле тангенса угла наклона шероховатостей  $\frac{k}{l}$ , но разной высоте шероховатостей  $k$ , получается график отличный от графика Никурадзе.

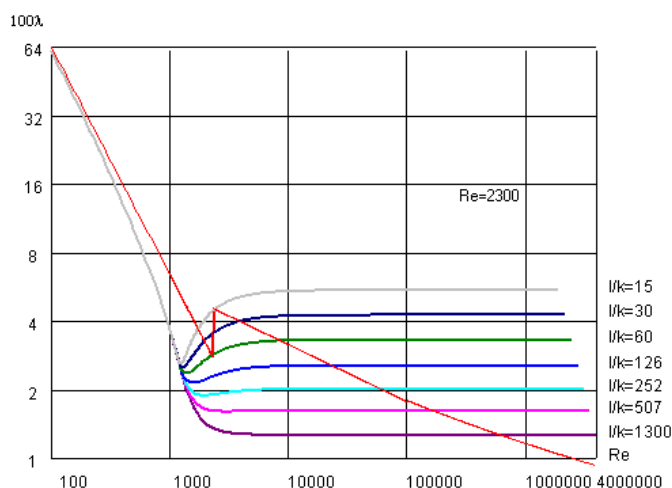


Рис.1 График зависимости коэффициента сопротивления круглого трубопровода от числа Рейнольдса при разных среднеквадратичных тангенсах наклона шероховатости

Но формула Никурадзе получена при постоянном отношении радиуса трубопровода  $r_0$  к средней высоте шероховатости  $k$ . Но как учесть степень шероховатости, которая зависит от числа Рейнольдса потока. Имеем уравнение

$$\beta = x^{3/8} = \left(\frac{1.6}{R_{cr} + 0.8}\right)^{3/8} \alpha + \frac{1-\alpha}{x^{3/8}} \left(\frac{1.6}{R_{cr} k/l + 0.8}\right)^{3/4}$$

$$\alpha = \exp[-4 |\sqrt{R} - \sqrt{R_{cr}}| \sqrt{k/(lR_{cr})}]$$

$$x^{3/4} - \left(\frac{1.6}{R_{cr} + 0.8}\right)^{3/8} x^{3/8} \alpha - (1-\alpha) \left(\frac{1.6}{R_{cr} k/l + 0.8}\right)^{3/4} = 0$$

Из этого квадратного уравнения определим  $x$

$$x^{3/8} = \left(\frac{1.6}{R_{cr} + 0.8}\right)^{3/8} \alpha / 2 + \sqrt{\left(\frac{1.6}{R_{cr} + 0.8}\right)^{3/4} \alpha^2 / 4 + (1-\alpha) \left(\frac{1.6}{R_{cr} k/l + 0.8}\right)^{3/4}}$$

Откуда имеем значение коэффициента  $\beta$

$$\beta = \left(\frac{1.6}{R_{cr} + 0.8}\right)^{3/8} \alpha / 2 + \sqrt{\left(\frac{1.6}{R_{cr} + 0.8}\right)^{3/4} \alpha^2 / 4 + (1 - \alpha) \left(\frac{1.6}{R_{cr} k / l + 0.8}\right)^{3/4}} =$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{1.6}{R_{cr} k / l + 0.8}\right)^{3/8}, \alpha = 0, R \gg R_{cr} \\ \left(\frac{1.6}{R_{cr} + 0.8}\right)^{3/8}, \alpha = 1, R = R_{cr} \end{cases} \quad (1.1.3)$$

При этом коэффициент сопротивления потока в круглом трубопроводе определяется по формуле  $\lambda = \frac{2T}{R_{cr} |R_a|^2}$ , число Рейнольдса, вычисленное на

основании средней скорости течения потока, равно  $R_a = R_0 / 2$ . Коэффициент сопротивления на бесконечности числа Рейнольдса пропорционален

$$\lambda = \frac{16\sqrt{2}}{R_{cr} \left[\frac{1.6}{R_{cr} k / l + 0.8}\right]^\sigma}$$

одного члена ряда.

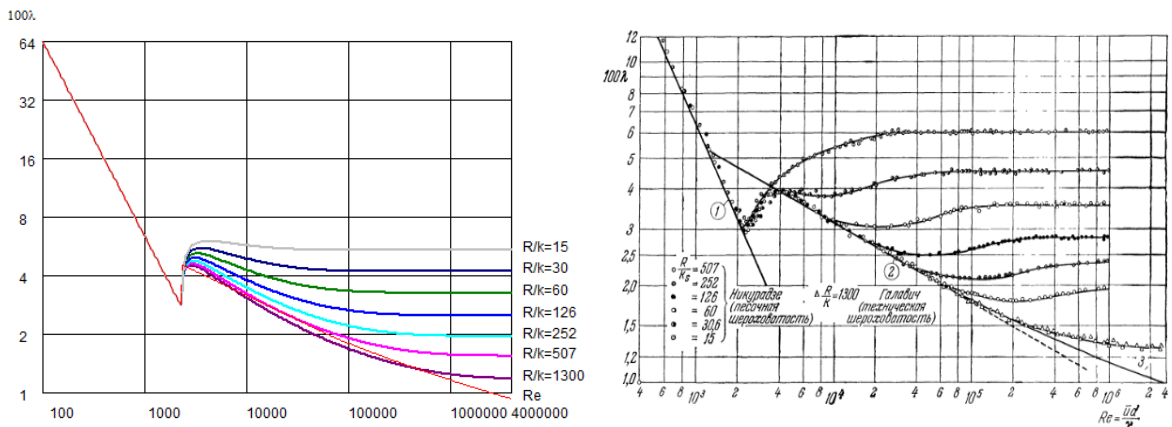


Рис.2 Теоретическая и экспериментальная зависимость коэффициента сопротивления круглого трубопровода от числа Рейнольдса при разной степени шероховатости

Для сравнения теоретического и экспериментального графика зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса потока приведен экспериментальный график Никурадзе справа на рис.2. Ошибка теоретического

графика относительно экспериментального примерно 10%. Отмечу, что график, приведенный на рисунке Никурадзе в ламинарной части решения точен, так как правая часть (1.1.1) имеет в ламинарном режиме положительное и отрицательное значение, и формула  $\lambda = 64/R$  выполняется точно.

Данный график решения получен для постоянной температуры потока для каждого сечения потока, поэтому в случае слабой зависимости кинематической вязкости от температуры формулы не изменятся. Для его реализации в случае турбулентного режима необходимо подставить в формулу приведенное давление и отношение радиуса трубопровода к высоте шероховатости

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{8}{x} [4 + \sqrt{16 + 8(x^2 - R_{cr}x) / R_{cr}^2 \beta^2}], \\ T_0 &= R_{cr} [4 + \sqrt{16 + 8(x^2 - R_{cr}x) / R_{cr}^2 \beta^2}], x > R_{cr} \\ \beta &= \left(\frac{2}{R_{cr}}\right)^{3/8} \alpha / 2 + \sqrt{\left(\frac{2}{R_{cr}}\right)^{3/4} \alpha^2 / 4 + (1 - \alpha) \left(\frac{1.6}{R_{cr} k / l + 0.8}\right)^{3/4}} \\ \alpha &= \exp[-4 | \sqrt{R} - \sqrt{R_{cr}} | \sqrt{k / (l R_{cr})}] \\ \lambda &= \frac{64}{x}, T_0 = 32x, x < R_{cr}\end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Отметим, что ламинарное решение уравнения Навье-Стокса при малых числах Рейнольдса удовлетворяет уравнению, где правой частью пренебрегаем

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \nu \Delta V_k = V_s \frac{\partial V_k}{\partial x_s}$$

Приведем это уравнение к безразмерному виду. Для этого разделим на величину  $v^2 / a^3$ ,  $x_l = y_l a / R_{cr}$ . Получим уравнение

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p a^2 / v^2}{\partial y_k} + R_{cr} \Delta R_k = R_s \frac{\partial R_k}{\partial y_s}$$

Возникает проблема учета нелинейного члена. Для получения следующего члена разложения используют ламинарное решение  $u_k(x, y, z)$ , и получают следующий член разложения решения в ряд по степеням числа Рейнольдса. Но можно поступить по-другому, использовать решение  $\alpha_k R_k(x, y, z)$ ,

$p = \beta p_{lam}(x, y, z)$  подставить в уравнение, и проинтегрировать по пространству и по времени, усредняя решение. Получим

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 F_{ks}^1 \alpha_k \alpha_s &= -\beta G_k + R_{cr} H_k^1 \alpha_k, k = 1, \dots, 3 \\ \sum_{s=1}^3 F_{ks} \alpha_k \alpha_s &= -\beta + H_k \alpha_k, k = 1, \dots, 3; \quad . \\ H_k &= R_{cr} H_k^1 / G_k, F_{ks} = F_{ks}^1 / G_k \end{aligned}$$

Добавляя условие неразрывности  $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \alpha_k S_k = 0$ . Получим 4 алгебраических

уравнения с 4 неизвестными, которые могут иметь комплексное решение.

$$\begin{aligned} &F_{11} \alpha_1^2 + F_{12} \alpha_1 \alpha_2 - F_{13} (\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2) \alpha_1 / S_3 - H_1 \alpha_1 = \\ &= F_{22} \alpha_2^2 + F_{21} \alpha_1 \alpha_2 - F_{23} (\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2) \alpha_2 / S_3 - H_2 \alpha_2 \\ &F_{11} \alpha_1^2 + F_{12} \alpha_1 \alpha_2 - F_{13} (\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2) \alpha_1 / S_3 - H_1 \alpha_1 = \\ &-[(F_{31} \alpha_1 + F_{32} \alpha_2) (\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2) / S_3 + F_{33} (\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2)^2 / S_3^2 + H_3 (\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2) / S_3] \end{aligned}$$

Причем имеется ламинарное решение

$\alpha_k = \beta G_k / R_{cr} H_k^1 = \beta \Delta p_k a^3 / L \rho v^2 H_k^1, G_k = \Delta p_k R_{cr}, p = p_1 - (p_1 - p_0)z / L$ . Причем в случае трубопровода появляется множитель  $a/L$ , так в трубопроводе давление изменяется линейно с ростом длины трубопровода. В случае внешней задачи ламинарное решение равно  $\alpha_z R_z(x, y, z) = \beta R_z(x, y, z) / H_z, \lim_{R \ll R_{cr}} \alpha_z = \lim_{R \ll R_{cr}} \beta / H_z = 1$

Причем задача сводится к двум алгебраическим уравнениям второго порядка, т.е. к одному алгебраическому уравнению в виде полинома 4 степени.

$$\begin{aligned} &(F_{11} - F_{13} S_1 / S_3) \alpha_1^2 - [F_{21} + (F_{13} S_2 - F_{23} S_1) / S_3] \alpha_1 \alpha_2 - (F_{22} + F_{23} S_2 / S_3) \alpha_2^2 - H_1 \alpha_1 + H_2 \alpha_2 = 0 \\ &[F_{11} + (F_{31} - F_{13}) S_1 / S_3 - F_{33} S_1^2 / S_3^2] \alpha_1^2 + [F_{12} + (-F_{13} S_2 + F_{32} S_1 + F_{31} S_2) / S_3 - 2F_{33} S_1 S_2 / S_3^2] \alpha_1 \alpha_2 + \\ &+ (F_{32} S_2 / S_3 - F_{33} S_2^2 / S_3^2) \alpha_2^2 + (-H_1 + H_3 S_1 / S_3) \alpha_1 + H_3 S_2 \alpha_2 / S_3 = 0 \end{aligned}$$

Имеем два уравнения, где коэффициенты при линейных членах велики.

$$A_l x^2 + B_l y^2 + C_l xy + G_l x + H_l y = 0, l = 1, 2$$

Находим связь между переменными из первого уравнения и подставляем во второе



$$y = \frac{-(C_1x + H_1) \pm \sqrt{(C_1x + H_1)^2 - 4B_1(A_1x^2 + G_1x)}}{2B_1}$$

$$y^2 = \frac{2(C_1x + H_1)^2 - 4B_1(A_1x^2 + G_1x) \mp 2(C_1x + H_1)\sqrt{(C_1x + H_1)^2 - 4B_1(A_1x^2 + G_1x)}}{4B_1^2}$$

Подстановка этого решения во второе уравнение определяет уравнение

$$A_2x^2 + G_2x - \frac{B_2}{B_1}(A_1x^2 + G_1x) - \frac{(C_1x + H_1)(C_2x + H_2)}{2B_1} + \frac{B_2}{2B_1^2}(C_1x + H_1)^2 =$$

$$= \pm \left[ -(C_1x + H_1) \frac{B_2}{2B_1^2} + \frac{C_2x + H_2}{2B_1} \right] \sqrt{(C_1x + H_1)^2 - 4B_1(A_1x^2 + G_1x)}$$

Возведя это уравнение в квадрат, свободный член получится нулевой, и мы имеем уравнение третьей степени

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d)x = 0$$

Все три корня уравнения являются решением этой задачи  $\alpha_l = x_l, l = 1, \dots, 3$ .

Образуется либо три действительных решения, которые опишут ламинарное решение, либо одно действительное и два комплексных, которые опишут комплексное, турбулентное решение.

Стоит проблема получения из комплексного решения действительное решение. При этом надо учитывать шероховатость поверхности у мнимой части решения. Но это уже другая задача. Начало комплексного решения, это переход к турбулентному решению. Причем действительная часть перехода к комплексному решению определяет скорость критического числа Рейнольдса.

Получение комплексного решения из уравнения второго порядка требует особого учета шероховатости. Нужно извлекать корень из численного значения мнимой части, иначе модуль комплексного числа имеет тривиальное значение

$$R = R_{cr} + i\sqrt{\gamma T - R_{cr}^2}, |R| = \sqrt{\gamma T}$$

Где величина  $T$  определяет безразмерное давление, а турбулентное комплексное решение наступает при критическом числе Рейнольдса. Для получения осмысленных результатов этого уравнения надо его привести к виду

$$R/\sqrt{T} = R_{cr}/\sqrt{T} + i\sqrt{\gamma - R_{cr}^2/T} \rightarrow R_{cr}/\sqrt{T} + i\sqrt{\gamma - R_{cr}^2/T}$$

И только потом использовать модуль комплексного числа. Учет шероховатости для этого решения сложная проблема. Алгебраическое уравнение в виде полинома 4 степени не требует такой операции и для него модуль имеет не тривиальное значение.

## 1.2. Алгоритм решения задачи гидродинамики при произвольной геометрии потока

Уравнение Навье – Стокса в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 V_k \frac{\partial V_i}{\partial x^k} = -\frac{\partial P}{\rho \partial x^i} + \nu \Delta V_i. \quad (1.2.1)$$

Для этого решаем трехмерную ламинарную стационарную задачу без учета конвективного члена при заданном внешнем воздействии  $g_l$

$$\frac{\partial P}{\rho \partial x_i} = \nu \Delta V_i.$$

Приведем эту задачу к безразмерному виду, разделив на величину  $\nu^2/d^3$ , получим безразмерное уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial y_i} = \Delta R_i,$$

$$R_s = V_s d / \nu, p = \frac{P d^2}{\rho \nu^2}, y_s = s / d, h_s = g_s d^2 / \nu^2$$

Решением этой задачи служит функция

$$R_s(y_1, y_2, y_3) = -\int_V \frac{1}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|} \frac{\partial p}{\partial z_s} dz_1 dz_2 dz_3.$$

Строим решение уравнения неразрывности при внешнем воздействии, где величина  $r_i$  отклик на внешнее воздействие

$$\frac{\partial R_i - r_i}{\partial x^i} = \int_V \frac{y_s - z_s}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2} \left( \frac{\partial p}{\partial z_s} - h_s \right) dz_1 dz_2 dz_3 = 0 \quad (1.2.2)$$

Откуда получаем уравнение по определению давления в потоке

$$\int_V \frac{y_s - z_s}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2} \frac{\partial p}{\partial z_s} dz_1 dz_2 dz_3 = \int_V \frac{y_s - z_s}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2} h_s dz_1 dz_2 dz_3.$$

Давление ищем в виде  $p = \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(z_1, z_2, z_3)$ . Подставляем его в подынтегральное выражение, умножаем на величину  $\varphi_m(y_1, y_2, y_3)$ , и интегрируем по пространству, получаем систему линейных уравнений

$$b_m = A_{mn} a_n.$$

Где имеем значения коэффициентов

$$A_{mn} = \int_V \int_V \varphi_m(y_1, y_2, y_3) \frac{y_s - z_s}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2} \frac{\partial \varphi_n(z_1, z_2, z_3)}{\partial z_s} dz_1 dz_2 dz_3 dy_1 dy_2 dy_3$$

$$b_m = \int_V \int_V \varphi_m(y_1, y_2, y_3) \frac{y_s - z_s}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2} h_s(z_1, z_2, z_3) dz_1 dz_2 dz_3 dy_1 dy_2 dy_3$$

Где величина  $h_l(y_1, y_2, y_3)$ , определяется внешним воздействием. Приведем уравнение Навье – Стокса к безразмерному виду, разделив его на величину  $v^2 / d^3$ , получим безразмерное уравнение

$$\frac{\partial \mathfrak{R}_l}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^3 \mathfrak{R}_k \frac{\partial \mathfrak{R}_l}{\partial y_k} = -\frac{\partial p}{\partial y_l} + \Delta \mathfrak{R}_l$$

$$\mathfrak{R}_l = \frac{V_l d}{v}, y_l = x_l / d, \tau = tv / d^2, p = \frac{P d^2}{\rho v^2}, h_l = g_l \frac{d^2}{v^2} = \frac{\partial p}{\partial y_l}.$$

Умножаем уравнение Навье – Стокса на сечение трубки тока, записываем уравнение вдоль ламинарного течения, вводя трубку тока, поток в которой

постоянен см. [8].  $\Gamma_s = \int_{S_s} \mathfrak{R}_s ds_s / d^2$ . В конвективном члене и в градиенте

давления введем производную по направлению, соответствующую направлению линий потока ламинарного течения. При подстановке в уравнение течения в виде

$$\Gamma_s = \alpha_s(\tau) R_s[y_1(\alpha, \beta), y_2(\alpha, \beta), y_3(\alpha, \beta)] \quad (1.2.3)$$

Где величина  $S_s$  сечение трубки тока в ламинарном режиме, величина  $R_s[y_1(\alpha, \beta), y_2(\alpha, \beta), y_3(\alpha, \beta)]$  это стационарное решение уравнения Навье – Стокса без конвективного члена, который для трубки тока равен нулю, как не зависящий от продольной координаты.

Причем эти трубки тока строим при любом внешнем воздействии, проявляющемся в перепаде давления. Далее учитываем шероховатости, и при некоторых условиях получаем комплексное турбулентное решение, которое связано с влиянием квадратичного конвективного члена с малым множителем, учитывающим шероховатость, который приводит к комплексному решению при большом перепаде давления. При этом действительное решение, которое получается при другом знаке модуля среднего модуля отклонения, отбрасываем, как не определяющее колеблющееся, турбулентное решение. Причем мнимая часть решения определяет пульсации решения. В случае выбора другого знака квадратного корня при учете корреляционной функции процесса  $\langle u'_l u'_k \rangle$ , где величина  $u'_k$  отклонение скорости от среднего значения, турбулентная вязкость становится отрицательной.

Подставим решение (1.2.3) в уравнение Навье – Стокса и проинтегрируем по трубке тока, разделив на площадь сечения трубопровода. Тогда конвективный член имеет вид

$$\sum_{k=1}^3 \Re_k \frac{\partial \Re_l}{\partial y_k} = -\alpha_s^2(\tau) \frac{da}{ds} \int_{S_s} R_s^2[y_1(\alpha, \beta), y_2(\alpha, \beta), y_3(\alpha, \beta)] d\alpha d\beta$$

Введение шероховатости приводит к зависимости радиуса трубопровода  $a_0(s)$  от степени макро-шероховатости. Далее выделяем член  $da_0/ds$  связанный с

шероховатостью, находим среднее значение его модуля. При этом произведем усреднение уравнения по величине  $s$ . При этом получается, что конвективный член в ламинарном режиме при гладкой поверхности, равен нулю и только при учете шероховатости он имеет значение. Получим уравнение

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \tau} \int_{S_s} R_s d\alpha d\beta + \alpha_s^2 \left\langle \frac{da}{ds} \right\rangle \int_{S_s} R_s \frac{\partial R_s}{\partial a} d\alpha d\beta - \frac{\partial \int_{S_s} p d\alpha d\beta}{\partial s} - \alpha_s \int_{S_s} \Delta R_s d\alpha d\beta$$

Чтобы учесть шероховатость поверхности трубопровода, и получить турбулентное решение, надо учесть средний модуль тангенса угла наклона шероховатостей. Тогда этот конвективный член будет иметь малый множитель, и конвективный член отличен от нуля и пропорционален средней величине тангенса наклона модуля шероховатостей  $\left\langle \left| \frac{da_0}{ds} \right| - \left\langle \frac{da_0}{ds} \right\rangle \right\rangle$  при наличии члена,

связанного с не постоянным сечением трубопровода  $\frac{d \langle a_0 \rangle}{ds}$ . При этом у

комплексного турбулентного решения линии тока сохраняются, соответствующие линиям тока ламинарного решения. Но будет пульсирующее решение, относительно ламинарных линий тока. Причем пульсации определяются мнимой частью скорости, причем мнимая часть решения, равная константе, означает пульсации с амплитудой, равной мнимой части скорости.

Подставим решение (1.2.3) в уравнение Навье – Стокса и проинтегрируем по трубкам тока, умножим на  $R_{cr}$ , где эта величина удовлетворяет условию  $1/R_{cr} = \langle |\tan \alpha| \rangle$ , где  $\langle |\tan \alpha| \rangle$  средний модуль тангенса наклона не устранимых микро-шероховатостей, огибающая которых определяет макро-шероховатости, получим уравнение

$$R_{cr} \frac{d\alpha_s(\tau)}{d\tau} = F_s \alpha_s^2 - 2R_{cr} \alpha_s G_s + H_s$$

$$F_s = \left\langle \frac{da}{ds} \right\rangle \int_{S_s} R_s [y_1(\alpha, \beta), y_2(\alpha, \beta), y_3(\alpha, \beta)] \frac{\partial R_s}{\partial a} d\alpha d\beta$$

$$G_s = - \int_{S_s} \Delta R_s [y_1(\alpha, \beta), y_2(\alpha, \beta), y_3(\alpha, \beta)] d\alpha d\beta > 0$$

$$H_s = - \int_{S_s} \frac{\partial p [y_1(\alpha, \beta, s), y_2(\alpha, \beta, s), y_3(\alpha, \beta, s)]}{\partial s} R_{cr} d\alpha d\beta ds > 0$$

Где величины  $R_s(y_1, y_2, y_3)$ ,  $p(y_1, y_2, y_3)$  определены из ламинарного решения и уравнения неразрывности, функция внешнего воздействия  $h_l(y_1, y_2, y_3)$  задается. Получается, что микро-шероховатости, расположенные по всей длине трубопровода, определяют критическое число Рейнольдса. Эти микро-шероховатости меньше макро-шероховатостей, которые оказывают влияние на коэффициент сопротивления, при больших числах Рейнольдса. Но так как число Рейнольдса зависит от геометрии трубопровода, через его диаметр, то критическое число Рейнольдса только обратно пропорционально среднему модулю тангенсу наклона микро-шероховатостей, и зависит от геометрии трубопровода. При этом уменьшение радиуса трубопровода вызывает отрицательное значение  $da/ds$  и, следовательно, отсутствие комплексного, турбулентного решения на размере сужения, т.е. повышается критическое число Рейнольдса. Наоборот расширение трубопровода вызывает увеличение величины  $da/ds$  и, следовательно, уменьшение критического числа Рейнольдса и может вызвать более раннее комплексное решение, т.е. турбулентный режим. Причем, так как число Рейнольдса зависит от температуры через зависимость кинематической вязкости от температуры, получается, что наступление критического числа Рейнольдса находится в зависимости от температуры среды.

Координаты положения равновесия определяются из квадратного уравнения

$$\alpha_s^2 - \alpha_s \frac{2R_{cr}G_s}{F_s} + \frac{H_s}{F_s} = \alpha_s^2 - 2R_{cr}^s \alpha_s + T_s \gamma_s = 0, T_s = \frac{\Delta P_s d^3 R_{cr}}{\rho^2 v^2 L}, R_{cr}^s = \frac{R_{cr} G_s}{F_s}$$

При этом ламинарное решение уточняется и имеет вид

$\alpha_s = R_{cr}^s - \sqrt{(R_{cr}^s)^2 - T_s \gamma_s}$ , которое при малом перепаде давления переходит в

линейное ламинарное решение  $\alpha_s = T_s \gamma_s / (2R_{cr}^s)$ .

При этом справедлива турбулентная формула учета шероховатостей в силу одинакового метода усреднения в турбулентном режиме

$$\frac{\alpha_s}{\sqrt{T_s}} = \frac{R_{cr}^s}{\sqrt{T_s}} - i^4 \sqrt{\gamma_s - \frac{(R_{cr}^s)^2}{T_s}} \sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{(R_{cr}^s)^2}{T_s} + \sqrt{\gamma_s - \frac{(R_{cr}^s)^2}{T_s}}} \lambda \exp(i\varphi)$$

$$\lambda = \{\alpha / [k(T_s, \xi_0) R_{cr} / l(T_s, \xi_0) + 1]\}^\sigma$$

Где величина  $k(T_s, \xi_0) / l(T_s, \xi_0)$  это эффективный средний тангенс наклона шероховатостей,  $\xi_0$  это отношение высоты шероховатости к радиусу трубопровода. Где критическое число Рейнольдса  $\alpha_s = R_{cr}^s$  удовлетворяет значению числа Рейнольдса, соответствующее началу комплексного решения. При этом при малом числе Рейнольдса получаем ламинарное решение. Но проблемы получения турбулентного решения на этом не кончаются. Нужно определить влияние шероховатостей поверхности, для чего пока необходимо использование экспериментальных данных. В принципе необходимо точное значение зависимости числа Рейнольдса для гладкой поверхности от макрошероховатостей. Можно высказать предположение, что при счете с помощью ламинарного решения при подсчете турбулентного решения влияние шероховатости будет аналогично влиянию в случае круглого трубопровода с другими константами  $\omega, \sigma$ , которые нужно определить из значения коэффициента сопротивления на бесконечности числа Рейнольдса. Для этого необходимо, чтобы размер, входящий в число Рейнольдса определялся аналогично в круглом трубопроводе и для тела произвольной формы. Для этого необходимо определять средний радиус поверхности через площадь поверхности тела и вводить радиус сферы, у которой площадь совпадает с площадью данного тела. Но у внешней задачи имеются свои особенности, связанные с наличием кризиса сопротивления, который связан с наличием следа за телом в потоке. Этого следа нет во внутренних задачах, таких как течение в

трубопроводе.

### 1.3.1. Особенности определения скорости обтекания

для произвольного тела за счет введения комплексного радиуса тела

Построим решение уравнения Навье – Стокса для внешней задачи. Имеется ламинарное решение для движения сферы в жидкости при малом числе Рейнольдса. Оно определяет следующее распределение скорости см. [8]

$$V_r = u \cos \theta \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3}\right)$$

$$V_\theta = -u \sin \theta \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3}\right)$$

При этом определится зависимость давления от параметров потока

$$p = p_0 - \frac{3}{2} \rho v \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{n})a}{r^2}.$$

Уравнения движения в сферической системе координат в случае не зависимости решения от угла  $\varphi$ , имеют вид

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) V_r - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \Delta V_r - \frac{2V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial(V_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} \right] - g \sin \theta$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) V_\theta + \frac{V_r V_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[ \Delta V_\theta + \frac{2\partial V_r}{r^2 \partial \theta} - \frac{2V_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right] - g \cos \theta$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta V_\theta)}{\partial \theta} = 0$$

$$(\mathbf{V}, \nabla) = V_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

Перейдем в систему координат  $\xi, \tau, \theta$  с неизвестными  $R_r, R_\theta, P$  определяемую

по формуле  $r = a\xi, t = d^2 \tau / 2\nu, V = Rv/a, p = P\rho v^2/a^2, \alpha = \frac{ga^3}{v^2}$  и сократим

полученную систему уравнений на величину  $v^2/a^3$ , получим систему уравнений



$$\begin{aligned} \frac{\partial R_r}{\partial \tau} + (\mathbf{R}, \nabla) R_r - \frac{R_\theta^2}{\xi} &= -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \Delta R_r - \frac{2R_r}{\xi^2} - \frac{2}{\xi^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial(R_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \alpha \cos \theta \\ \frac{\partial R_\theta}{\partial \tau} + (\mathbf{R}, \nabla) R_\theta + \frac{R_r R_\theta}{\xi} &= -\frac{1}{\xi} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \Delta R_\theta + \frac{2\partial R_r}{\xi^2 \partial \theta} - \frac{2R_\theta}{\xi^2 \sin^2 \theta} - \alpha \sin \theta \\ \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial(\xi^2 R_r)}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta R_\theta)}{\partial \theta} &= 0 \\ (\mathbf{R}, \nabla) = R_r \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{R_\theta}{\xi} \frac{\partial}{\partial \theta}, \Delta &= \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

При этом решение в безразмерных константах имеет вид (для произвольного тела введен экспоненциальный множитель см. [9])

$$\begin{aligned} R_r / R_{cr} &= R_x R_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{3}{2\xi} + \frac{1}{2\xi^3} \right) / R_{cr} \\ R_\theta / R_{cr} &= -R_x R_0 \sin \theta \left( 1 - \frac{3}{4\xi} - \frac{1}{4\xi^3} \right) / R_{cr}, a = d/2, R_0 = \frac{ud \exp(i\Omega)}{\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= p_0 d^2 / \rho \nu^2 - 3 \frac{(\mathbf{R}_0, \mathbf{n})}{R_{cr} \xi^2 \exp(i\Omega)} = \\ &= p_0 d^2 / \rho \nu^2 - 3 \frac{R_0 \cos \theta}{2R_{cr} \xi^2 \exp(i\Omega)} \end{aligned}$$

Но если рассматривать решение для одной области  $\theta \in [0, \pi]$ , то получим нулевое значение коэффициента  $R_x$ . Поэтому область надо разбить на две части  $\theta \in [0, \theta_0], \theta \in [\theta_0, \pi]$  и находить величину  $\theta_0$  из равенства коэффициентов  $R_x$ , вычисленных для разных областей.

$$\begin{aligned} &R_x^2 R_0 / R_{cr} \left[ \cos^2 \theta \left( 1 - \frac{3}{2\xi} + \frac{1}{2\xi^3} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\frac{3}{2\xi} + \frac{1}{2\xi^3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 - \frac{3}{4\xi} - \frac{1}{4\xi^3} \right) \left( 1 - \frac{3}{2\xi} + \frac{1}{2\xi^3} \right) \frac{\sin^2 \theta}{\xi} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin^2 \theta}{\xi} \left( 1 - \frac{3}{4\xi} - \frac{1}{4\xi^3} \right)^2 \right] = 3 \frac{\partial \sin \theta \cos \theta}{\partial \xi} \frac{1}{2\xi^2} / \exp(i\Omega) + \\ &+ R_x \left\{ \frac{3 \cos \theta}{2\xi^5} - \frac{2 \cos \theta}{\xi^2} \left( 1 - \frac{3}{2\xi} + \frac{1}{2\xi^3} \right) / \exp(i\Omega) + \frac{2 \cos \theta}{\xi^2 \exp(i\Omega) \sin \theta} \left( 1 - \frac{3}{4\xi} - \frac{1}{4\xi^3} \right) \right\} - \frac{\rho_b R_{cr} \alpha}{\rho R_0} \cos \theta \end{aligned}$$

Решим первое уравнение, второе уравнение решается аналогично. Для этого для внутренней задачи надо умножить на величину  $r^2 \sin \theta dr d\theta$ . Для внешней безразмерной задачи надо вводить обратную переменную и рассматривать внешнюю задачу как инверсию внутренней задачи, так как внутренняя задача для обтекания сферы не имеет смысла, и ее можно использовать для получения внешней  $r = \frac{1}{\xi}$  при условии  $1/\xi \in [0,1]$  и множитель выйдет таким образом

$\frac{\sin \theta}{\xi^2} d \frac{1}{\xi} d\theta$ . Распишем уравнение с учетом всех множителей

$$\begin{aligned} & R_x^2 R_0 / R_{cr} [\cos^2 \theta \sin \theta (\frac{3}{2\xi^4} - \frac{3}{2\xi^6} - \frac{9}{4\xi^5} + \frac{3}{\xi^7} - \frac{3}{4\xi^9}) + \\ & + (\frac{1}{\xi^3} - \frac{9}{4\xi^4} + \frac{9}{8\xi^5} + \frac{1}{4\xi^6} - \frac{1}{8\xi^9}) \sin^3 \theta - \\ & \sin^3 \theta (\frac{1}{\xi^3} + \frac{9}{16\xi^5} + \frac{1}{16\xi^9} - \frac{3}{2\xi^4} - \frac{1}{2\xi^6} + \frac{3}{8\xi^7})] = \\ & = -3 \frac{\cos \theta \sin \theta}{2\xi^3} / \exp(i\Omega) + 2R_x [\sin 2\theta (\frac{3}{\xi^7} - \frac{2}{\xi^4} + \frac{3}{\xi^5} - \frac{1}{\xi^7}) + \\ & + \cos \theta (\frac{4}{\xi^4} - \frac{3}{\xi^5} - \frac{1}{\xi^7})] / \exp(i\Omega) + \frac{(\rho_b - \rho) R_{cr} \alpha}{\rho R_0} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

интегрирование по углу  $[0, \pi]$  определит нулевую правую часть этого уравнения. Следовательно, надо разбить решение на две области и решения сопрягать на границе области. Полученное решение будет при малой скорости ламинарным, причем угол может определиться комплексным.

Проинтегрируем данное уравнение по двум областям  $\theta \in [0, \theta_0]$ ,  $\frac{1}{\xi} \in [0, 1]$  и

$\theta \in [\theta_0, \pi], \frac{1}{\xi} \in [0, 1]$ , получим

$$\begin{aligned} & R_x^2 R_0 / R_{cr} \{ (1 - \cos^3 \theta_0) \left[ \frac{3}{10} - \frac{3}{14} - \frac{3}{8} + \frac{3}{8} - \frac{3}{40} \right] - \\ & - \left( \frac{2}{3} - \cos \theta_0 + \frac{\cos^3 \theta_0}{3} \right) \left[ \frac{3}{4} + \frac{3}{32} + \frac{3}{28} + \frac{3}{64} - \frac{3}{160} \right] \} - 2R_x \{ (1 - \cos 2\theta_0) \left[ \frac{3}{8} - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right] + \\ & + \left[ \frac{4}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right] \sin \theta_0 \} / \exp(i\Omega) + 3(1 - \cos 2\theta_0) / 4 \exp(i\Omega) - \alpha \frac{R_{cr}}{R_0} (1 - \cos 2\theta_0) / 4 = 0 \end{aligned}$$

Другая область имеет уравнение

$$\begin{aligned} & R_x^2 R_0 / R_{cr} \{ (1 + \cos^3 \theta_0) \left[ \frac{3}{10} - \frac{3}{14} - \frac{3}{8} + \frac{3}{8} - \frac{3}{40} \right] - \\ & - \left( \frac{2}{3} + \cos \theta_0 - \frac{\cos^3 \theta_0}{3} \right) \left[ \frac{3}{4} + \frac{3}{32} + \frac{3}{28} + \frac{3}{64} - \frac{3}{160} \right] \} - \\ & - 2R_x \{ -(1 - \cos 2\theta_0) \left[ \frac{3}{8} - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right] - \left[ \frac{4}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right] \sin \theta_0 \} / \exp(i\Omega) - \\ & - 3(1 - \cos 2\theta_0) / 4 \exp(i\Omega) + \frac{\rho_b R_{cr} \alpha}{\rho R_0} (1 - \cos 2\theta_0) / 4 = 0 \end{aligned}$$

В ламинарном режиме при очень малом числе Рейнольдса  $R_0 \ll R_{cr}$  и имеем выражение для числа Рейнольдса

$$\begin{aligned} R_x &= \frac{3(1 - \cos 2\theta_0) / 4 \exp(i\Omega) - \frac{\rho_b R_{cr} \alpha}{\rho R_0} (1 - \cos 2\theta_0) / 4}{z_{\text{nam}}} = \frac{30}{21 \exp(i\Omega)} - \frac{R_{cr} \alpha}{R_0} \frac{20}{21} \\ z_{\text{nam}} &= (1 - \cos^2 \theta_0) \left[ \frac{3}{8} - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right] + \left[ \frac{4}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right] \sin \theta_0 = 21/40 \\ z_{\text{nam}1} &= (1 + \cos^2 \theta_0) \left[ \frac{3}{8} - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right] + \left[ \frac{4}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right] \sin \theta_0 = 21/40 \end{aligned}$$

Получаем симметричное решение  $\theta_0 = \pi/2$ . Получается действительное решение с постоянной мнимой фазой. Определим решение в случае произвольного числа Рейнольдса.

$$R_x = (b - \sqrt{b^2 - ac}) / a = \frac{R_{cr}}{R_0} \beta - \sqrt{\left(\frac{R_{cr}}{R_0}\right)^2 (\beta^2 + \delta) - \frac{R_{cr}}{R_0} \gamma}; R_r = R_x R_0 = R_{cr} \beta - \sqrt{(R_{cr})^2 (\beta^2 + \delta) - R_{cr} R_0 \gamma}$$

$$a = (1 - \cos^3 \theta_0) \left[ \frac{3}{10} - \frac{3}{14} - \frac{3}{8} + \frac{3}{8} - \frac{3}{40} \right] - \left( \frac{2}{3} - \cos \theta_0 + \frac{\cos^3 \theta_0}{3} \right) \left[ \frac{3}{4} + \frac{3}{32} + \frac{3}{28} + \frac{3}{64} - \frac{3}{160} \right]$$

$$b = \left\{ (1 - \cos^2 \theta_0) \left[ \frac{3}{8} - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right] + \left[ \frac{4}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right] \sin \theta_0 \right\} \frac{R_{cr}}{R_0} / \exp(i\Omega)$$

$$c = 3 \frac{R_{cr}}{R_0} (1 - \cos 2\theta_0) / 4 \exp(i\Omega) - \frac{R_{cr}^2 \alpha}{R_0^2} (1 - \cos 2\theta_0) / 4$$

Где при возрастании числа Рейнольдса определен параметр начала турбулентного решения  $R_0 = R_{cr} (\beta^2 + \delta) / \gamma$ .

Но другое решение имеет вид

$$R_x = (b - \sqrt{b^2 - ac}) / a = \frac{R_{cr}}{R_0} \beta - \sqrt{\left(\frac{R_{cr}}{R_0} \beta\right)^2 - \frac{R_{cr}}{R_0} \gamma}; R_\theta = R_x R_0 = R_{cr} \beta - \sqrt{(R_{cr})^2 (\beta^2 - \delta) - R_{cr} R_0 \gamma}$$

$$a = (1 + \cos^3 \theta_0) \left[ \frac{3}{10} - \frac{3}{14} - \frac{3}{8} + \frac{3}{8} - \frac{3}{40} \right] - \left( \frac{2}{3} + \cos \theta_0 - \frac{\cos^3 \theta_0}{3} \right) \left[ \frac{3}{4} + \frac{3}{32} + \frac{3}{28} + \frac{3}{64} - \frac{3}{160} \right]$$

$$b = \left\{ -(1 + \cos^2 \theta_0) \left[ \frac{3}{8} - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right] - \left[ \frac{4}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right] \sin \theta_0 \right\} \frac{R_{cr}}{R_0} / \exp(i\Omega)$$

$$c = 3 \frac{R_{cr}}{R_0} (1 - \cos 2\theta_0) / 4 \exp(i\Omega) + \frac{R_{cr}^2 \alpha}{R_0^2} (1 - \cos 2\theta_0) / 4$$

Начало турбулентного режима наблюдается при условии  $R_0 = R_{cr} (\beta^2 - \delta) / \gamma$ .

При учете всех коэффициентов нет решения  $\theta_0 = \pi/2$ , а получается два значения коэффициента  $\theta_0$ . Окажется, что существуют два угла  $\theta_1, \theta_2$  для каждого из уравнений Навье - Стокса, соответствующих двум разным разбиениям на две области. Фаза  $\Omega$  зависит от ориентации тела относительно скорости на бесконечности и для данной ориентации тела в потоке постоянная.

Окончательное решение ищем в виде (в ламинарном режиме оно совпадает с первоначальным уравнением, а в турбулентном режиме получается отличие)

$$\begin{aligned}
 R_r &= \Re_r \sum_{l=1}^4 [\operatorname{Re} R_l(\theta_l) + i \operatorname{Im} R_l(\theta_l)] i \cos(\theta - \theta_l + \frac{\pi}{2}) [1 - \frac{3}{2\xi} + \frac{1}{2\xi^3}] / 4 \\
 \frac{1}{\eta} &= \int_1^{1/\xi} R_r \frac{1}{\xi} d\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi} \int_0^\theta R_\theta \sin \theta d\theta = \Re_r \sum_{l=1}^4 \{ \sin[\operatorname{Re} R_l(\theta_l) b_r \cdot \frac{(t-t_0)v}{d^2}] - \operatorname{Im} R_l(\theta_l) \} b_r = \\
 &\quad - \sum_{l=1}^4 [\operatorname{Re} R_l(\theta_l) + \sin[\operatorname{Im} R_l(\theta_l) b_\theta \cdot \frac{(t-t_0)v}{d^2}]] b_\theta \\
 R_\theta &= \Re_\theta \sum_{l=1}^4 [\operatorname{Re} R_l(\theta_l) + i \operatorname{Im} R_l(\theta_l)] i \cos(\theta - \theta_l + \frac{\pi}{2}) [1 - \frac{3}{4\xi} - \frac{1}{4\xi^3}] / 4 \\
 R_\theta &= \Re_\theta \sum_{l=1}^4 \{ \sin[\operatorname{Re} R_l(\theta_l) a_r \cdot \frac{(t-t_0)v}{d^2}] - \operatorname{Im} R_l(\theta_l) \} a_r - \\
 &\quad - \Re_\theta \sum_{l=1}^4 \{ \operatorname{Re} R_l(\theta_l) + \sin[\operatorname{Im} R_l(\theta_l) a_\theta \cdot \frac{(t-t_0)v}{d^2}] \} a_\theta \\
 a_r &= [\theta \sin(\theta_l - \frac{\pi}{4}) / 2 - \cos(2\theta - \theta_l + \frac{\pi}{2}) / 4] [1 - \frac{3}{4\xi} - \frac{1}{4\xi^3}] / 4; a_\theta = \sin(\theta - \theta_l + \frac{\pi}{2}) [-\frac{1}{2\xi^2} + \frac{1}{4\xi^3} + \frac{1}{20\xi^5}] / 4 \\
 b_r &= [\theta \cos(\theta_l - \frac{\pi}{4}) / 2 - \sin(2\theta - \theta_l + \frac{\pi}{4}) / 4] (1 - \frac{3}{2\xi} + \frac{1}{2\xi^3}) / 4; b_\theta = \cos(\theta - \theta_l + \frac{\pi}{2}) [-\frac{1}{2\xi^2} + \frac{1}{2\xi^3} - \frac{1}{10\xi^5}] / 4 \\
 p &= P[p_0 d^2 / \rho v^2 - 3 \frac{\cos \theta}{2\xi^2 \exp(i\Omega)}]
 \end{aligned}$$

Сначала подставляем значение числа Рейнольдса в уравнение неразрывности, усредняем по пространству и получаем связь между радиальными и азимутальными компонентами. Подставляем решение в два уравнения Навье – Стокса исключаем значение давления, усредняем по пространству и находим стационарное значение радиальной и азимутальной скорости.

В случае  $R_0 \rightarrow 0$  имеем равенство углов  $\theta_l = \pi/2$ , и получим  $R_l(\theta_l) = 1/2$ . Коэффициенты  $R_1(\theta_1) = R_2(\theta_2), R_3(\theta_3) = R_4(\theta_4)$  определим из двух уравнений Навье – Стокса, которое надо проинтегрировать по всему пространству. При этом первые два угла определим из первого уравнения Навье - Стокса, а третий и четвертый угол определим из второго уравнения. Причем уравнения Навье – Стокса нужно умножить на величину  $\frac{\sin \theta}{\xi^2} d\frac{1}{\xi} d\theta$ , а потом интегрировать.

Число Рейнольдса среды для движущегося тела в ламинарном режиме равно действительному решению

$$\begin{aligned}
 R_r &= |R_0| \left\{ \frac{10}{7} - \frac{20}{21} \frac{\rho_b \alpha}{\rho R_0} \exp[i\Omega(\theta_0, \varphi_0)] \right\} \cos \theta \left( 1 - \frac{3}{2\xi} + \frac{1}{2\xi^3} \right) \\
 R_\theta &= -|R_0| \left\{ \frac{10}{7} - \frac{20}{21} \frac{\rho_b \alpha}{\rho R_0} \exp[i\Omega(\theta_0, \varphi_0)] \right\} \sin \theta \left( 1 - \frac{3}{4\xi} - \frac{1}{4\xi^3} \right). \quad (1.3.1.1) \\
 p &= P \left[ p_0 a^2 / \rho v^2 - 3 \frac{\cos \theta}{2\xi^2 \exp(i\Omega)} \right]
 \end{aligned}$$

Вычислим поверхностный интеграл для получения импульсов

$$\begin{aligned}
 F_l &= \oint_{|\xi|=1} \Pi_{lk} df_k \\
 F_u &= 2\pi \int_0^\pi (-p \cos \theta + \sigma'_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) \sin \theta d\theta / \xi^2. \quad (1.3.1.2) \\
 F &= 2\pi \int_0^\pi (-p \sin \theta + \sigma_{rr} \sin \theta - \sigma_{r\theta} \cos \theta) \sin \theta d\theta / \xi^2
 \end{aligned}$$

Формулы для напряжений

$$\sigma_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right).$$

На поверхности тела имеем

$$\sigma'_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = -\rho v^2 / a^2 \frac{R_0}{R_{cr}} \sin \theta \left\{ \frac{10}{7} - \frac{20}{21} \frac{\rho_b \alpha}{\rho R_0} \exp[i\Omega(\theta_0, \varphi_0)] \right\}, \quad p = p_0 - \frac{3\rho v^2 R_0 / a^2}{2R_{cr}} \cos \theta.$$

Подставляем значения параметров в первую формулу (1.3.1.2), получим

$$\begin{aligned}
 F_u &= 6\pi\rho v^2 |R_0| / 2 \int_0^\pi \left[ \cos^2 \theta + \frac{20}{21} \sin^2 \theta - \frac{20\pi}{63} \frac{\rho_b \alpha}{\rho R_0} \sin \theta \exp(i\Omega) \right] \sin \theta d\theta = 6\pi\rho v U |a| / 2 \times \\
 &\quad \times \left\{ 2 - \int_0^\pi \left[ \frac{1}{21} \sin^2 \theta + \frac{40}{63} \frac{\rho_b \alpha}{\rho R_0} \sin^2 \theta \exp(i\Omega) \right] \sin \theta d\theta \right\} = \\
 &= 6\pi\rho v U |a| \left[ 1 + \left( \cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^\pi / 21 - \frac{40}{63} \frac{\rho_b g |a|^2}{4\rho v U} \frac{4}{3} \exp(i\Omega) \right] = \\
 &= (6\pi - 2/63)\mu U |a| - \frac{20}{21} mg \exp[i\Omega(\theta_0, \varphi_0)] = (6\pi - 2/63)\mu U |a| - 0.95mg \exp[i\Omega(\theta_0, \varphi_0)]
 \end{aligned}$$

Получается точность вычисления коэффициентов 5%.

Вычислим перпендикулярную силу

$$F = 2\pi\rho v^2 |R_0| \int_0^\pi \left[ \frac{10}{7} \sin\theta \cos\theta - \frac{20}{21} \frac{\rho_b \alpha}{\rho R_0} \sin\theta \cos\theta \exp(i\Omega) \right] \sin\theta d\theta = 0$$

Докажем устойчивость двух сопряженных решений. Она следует из симметрии задачи относительно вычисленного угла сопряжения и давление по обе части поверхности сопряжения одинаково. Это можно расписать аналитически см. [8] §29. В результате вычисления при условии в левой части полуплоскости  $p' = \text{const} \exp(ikz - kx - i\omega t)$ , а в правой части  $p' = \text{const} \exp(-ikz - kx - i\omega t)$  (обозначения системы координат взяты из [8] §29). По направлению поверхности сопряжения дополнительный перепад давления затухает, а перпендикулярно поверхности сопряжения имеются две уходящие волны. Скорость волны вдоль поверхности сопряжения  $v$  одинаковая константа в двух объемах, разделенных поверхностью сопряжения. Тогда имеем см. [8] §29

$$v'_z = -\frac{ikp'_1}{\rho(kv + i\omega)}; v'_z = -\zeta(kv + i\omega),$$

Откуда имеем формулу для перепада давления  $p'_1 = \zeta \frac{(kv + i\omega)^2}{ik}$ , причем формула для перепада давления на другой стороне поверхности сопряжения  $p'_2 = -\zeta \frac{(kv + i\omega)^2}{-ik}$  является тождественно равной. Т.е. равенство перепада давления справедливо при любой частоте и система устойчива.

При этом для компоненты скорости при больших радиусах и малых числах

Рейнольдса имеем соотношение

$$\begin{aligned} R_x &= R_0 \cos 2\theta + R_0 \\ R_y &= R_0 \sin 2\theta \end{aligned}$$

При действительных углах построен график на рис.1 относительно двух углов при условии  $\theta_1 = \pi/2 - 0.1; \theta_2 = \pi/2 + 0.1; R_1(\theta_1) = 1, R_0 = 1.5$

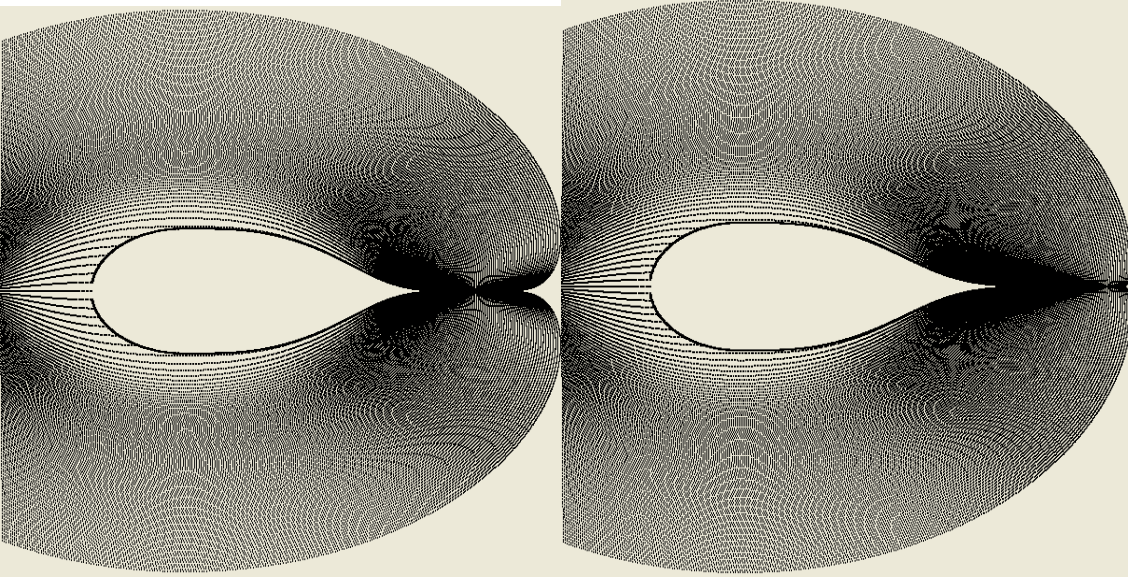


Рис.1

Рис.2

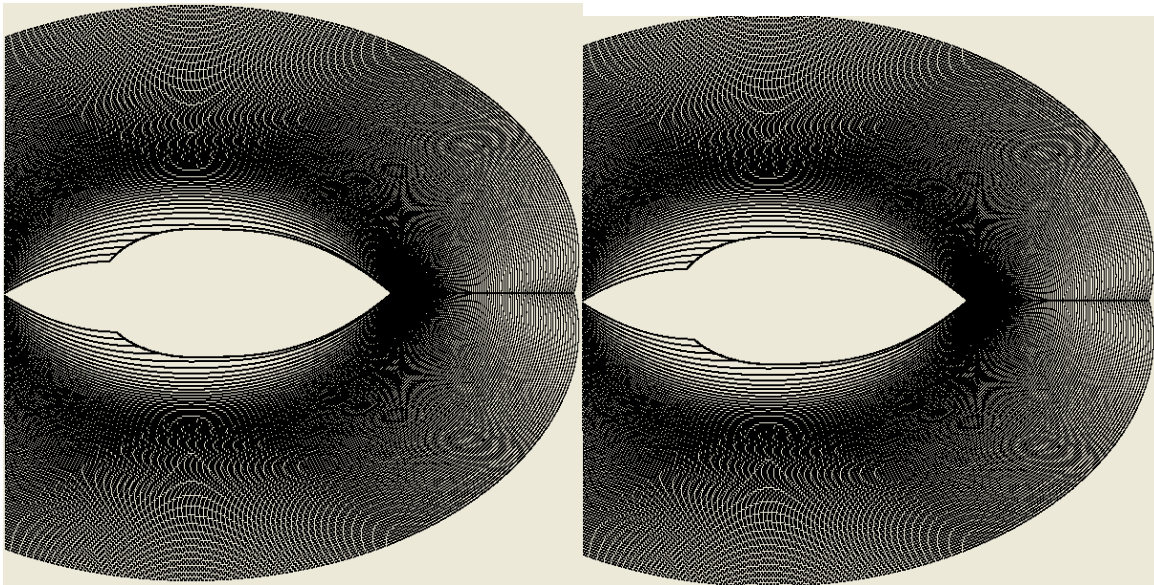


Рис.3

Рис.4



Следующий рисунок 2 соответствует числу Рейнольдса  $R_0 = 150$ ,  $\theta_1 = \pi/2 - 0.4$ ;  $\theta_2 = \pi/2 + 0.4$ ;  $R_l(\theta_l) = 1$ . С ростом числа Рейнольдса растет отклонение от угла  $\pi/2$  для углов  $\theta_l$ . На рисунке 3 изображен поток с числом Рейнольдса  $R_0 = 5000$  с комплексными углами  $\theta_1 = \pi/2 - 0.5 + 0.5i$ ;  $\theta_2 = \pi/2 + 0.5 + 0.5i$ ;  $R_l(\theta_l) = 1$ . Имеется две особые зоны, в передней и задней части сферы. В них скорость в точке границы соответствует касательной прямой. Рис.4 соответствует тем же параметрам, что и рис. 3, только число Рейнольдса тела равно  $R_0 = 50000$ . Параметры потока достигли предельных значений, рисунок остался неизменным, как и при параметре  $R_0 = 5000$ .

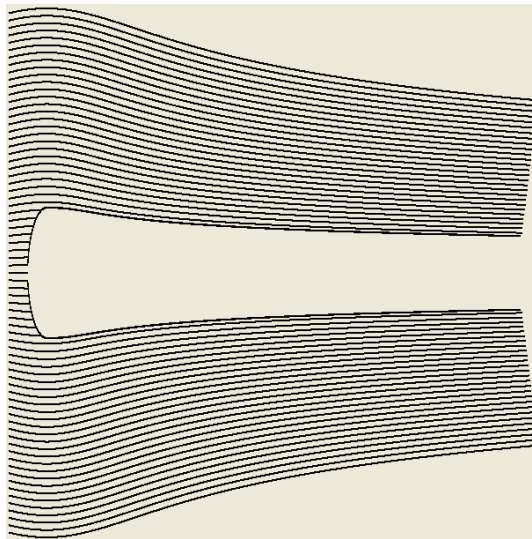


Рис.5

Рис. 5 получен при значении параметров  $\theta_1 = \pi/2 - 0.5$ ;  $\theta_2 = \pi/2 + 0.5$ ;  $R_l(\theta_l) = 0.1$ ;  $R_0 = 500$ . Распределение скорости таково, что в передней части сферы образуется особая зона, куда несжимаемая жидкость не проникает. При этом зона недоступности пространства для потока жидкости распространяется на большое расстояние, что создает условие для длинной вихревой дорожки. Она срывается с поверхности сферы и

распространяется как не вязкая жидкость, причем по законам, не связанным с уравнением Навье - Стокса.

Для изменения рисунка необходима смена углов-границ и соотношения между коэффициентами  $R_l(\theta_l)$ . Кроме того, при больших числах Рейнольдса растет мнимая часть, и, значит, велико влияние шероховатости.

При этом критическое число Рейнольдса для внешнего тела равно  $\frac{1}{R_{cr}} = \frac{1}{2300} \frac{a}{l_{cr}}$ , где  $a$  характерный размер тела,  $l_{cr}$  длина огибающей тело гладкой поверхности при условии совпадения равенства нулю дискриминанта турбулентного решения  $R_l(\theta_l)$ .

В результате тело с комплексным радиусом определяет ламинарное комплексное решение. Это особенность произвольного тела иметь дисперсию решения даже в ламинарном режиме.

Получив значение числа Рейнольдса в виде решения квадратного уравнения, учитываем влияние шероховатости по формулам (1.1.3). Для внешней задачи значение дроби надо перевернуть

$$\beta = \left(\frac{R_{cr} + 0.8}{1.6}\right)^{3/8} \alpha / 2 + \sqrt{\left(\frac{R_{cr} + 0.8}{1.6}\right)^{3/4} \alpha^2 / 4 + (1 - \alpha) \left(\frac{R_{cr} k / l + 0.8}{1.6}\right)^{3/4}}$$

Причем решалась система дифференциальных уравнений в безразмерной системе координат

$$\frac{dx}{dt} = R_x; \frac{dy}{dt} = R_y, x_0 = -2; y_0 \in [-4, 4].$$

При этом запишем новую формулы, которую необходимо подставить в уравнение Навье – Стокса, усреднить решение, и определить новые множители, но которые необходимо умножать решение

$$R_r = \frac{R_0}{R_{cr}} \cos \theta \sum_{l=1}^4 R_l(\theta_l) \left[ \cos\left(\theta - \operatorname{Re} \theta_l + \frac{\pi}{2}\right) \cosh(\operatorname{Im} \theta_l) - \right. \\ \left. - i \sin\left(\theta - \operatorname{Re} \theta_l + \frac{\pi}{2}\right) \sinh(\operatorname{Im} \theta_l) \right] \left(1 - \frac{3}{2\xi} + \frac{1}{2\xi^3}\right) \\ R_\theta = -\frac{R_0}{R_{cr}} \sin \theta \sum_{l=1}^4 R_l(\theta_l) \left[ \sin\left(\theta - \operatorname{Re} \theta_l + \frac{\pi}{2}\right) \cosh(\operatorname{Im} \theta_l) + \right. \\ \left. + i \cos\left(\theta - \operatorname{Re} \theta_l + \frac{\pi}{2}\right) \sinh(\operatorname{Im} \theta_l) \right] \left(1 - \frac{3}{4\xi} - \frac{1}{4\xi^3}\right)$$

Построим графики определения действительных границ области.

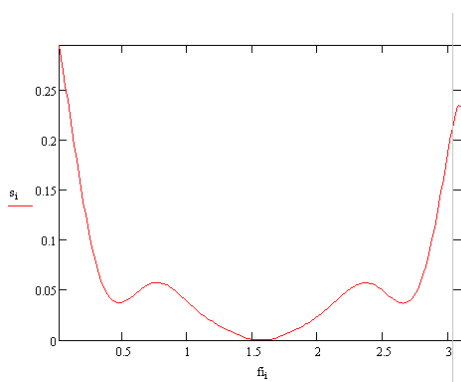


Рис.6

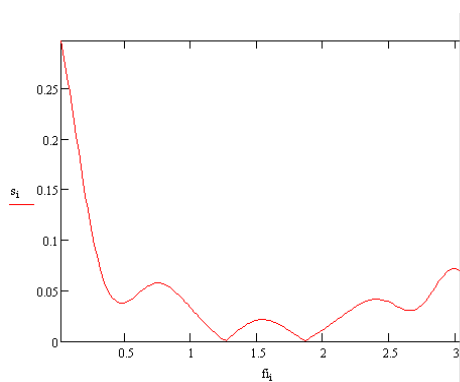


Рис.7

Разность коэфф. двух решений в разных областях

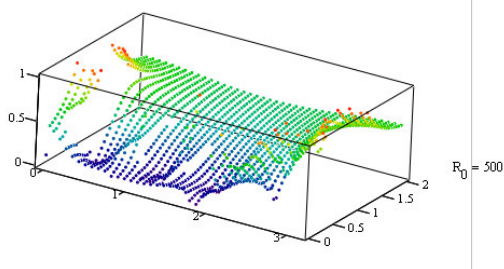


Рис.8

Разность коэфф. двух решений в разных областях

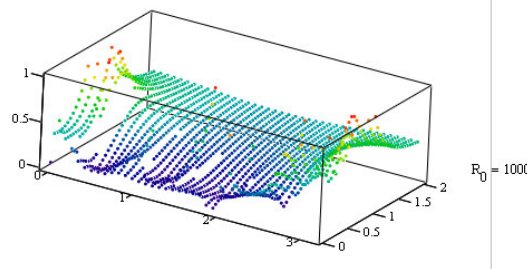


Рис.9

Вертикальная ось характеризует модуль разности между коэффициентами  $R_x$ , вычисленными для двух разных областей. По горизонтальной оси отложен действительный угол  $\theta_0$ . На рис.6 получен единственный корень при малом числе Рейнольдса. На рис.7 имеется два действительных корня,

соответствующих ламинарному режиму с числом Рейнольдса, равным величине  $R_0 = 100$ .

На рисунке 8,9 показано существование комплексных корней, равных  $\theta_1 = 1 + 0.5i; \theta_2 = 2 + 0.5i$ . Мнимая ось изменяется на отрезке  $[0, 2]$ , действительная ось  $[0, \pi]$ .

### 1.3.2. Описание особой области

При этом определение течения в потоке жидкости имеет не продолжаемые зоны, скорость перпендикулярная границам этих зон равна нулю. Поэтому жидкость из этих зон не связана с основным потоком. Но тангенциальные компоненты скорости на границе должны совпадать. Построим решение в этих зонах. Действительная часть решения  $R = R_1 + iR_2$  соответствует компоненте  $z$ , мнимая часть компоненте  $x$ , причем ось  $x$  вращается вокруг оси  $0z$  с изменением угла  $\varphi$ . Но решение строится при фиксированном угле  $\varphi$  и не зависит от этого угла. Тогда решение уравнения Навье – Стокса будет

$$R = \sum_{n,m=-N}^N b_{nm} \exp(in\Phi + im \ln \rho_0). \quad (1.3.2.1)$$

Где введена новая масштабированная угловая переменная  $\Phi = 2\pi(\theta - \theta^{\min})/(\theta^{\max} - \theta^{\min})$ , где  $\theta^{\max}, \theta^{\min}$  - экстремальные значения границ турбулентной зоны. Кроме того, введем масштабированный радиус

$$\ln \rho_0 = \frac{\ln r / a^{\min}(\theta)}{\ln[a^{\max}(\theta) / a^{\min}(\theta)]} 2\pi,$$

где  $a^{\max}(\theta), a^{\min}(\theta)$  - максимальное и минимальное значение радиуса границы турбулентной зоны. В случае равенства нулю знаменателя, для величины  $s$  следует использовать значение  $r = \sqrt{a^{\max}(\theta)a^{\min}(\theta)}$ . Тогда величина  $\ln \rho$  будет непрерывна и в этой точке равна  $\pi$ . Коэффициенты  $b_{nm}$  определяются из

значений ламинарного решения в пределах границы турбулентной зоны  $r = a^{\min}(\theta), s = a^{\max}(\theta)$ , где  $\theta \in [\theta^{\min}, \theta^{\max}]$ .

Коэффициенты  $b_{nm}$  определяются по формуле

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_l[r(\ln \rho_0, \Phi), w(\Phi)] \exp(-in\Phi - im \ln \rho_0) d \ln \rho d\Phi = \\ = b_{nm} / 4\pi^2$$

Так как граничные значения в начале и конце периода отличаются и границы области в координатах  $r, \theta$  не прямоугольные (в координатах  $\Phi, \ln \rho$  скорость на границе переменная), ряд будет разрывный и значит, коэффициент  $b_{nm}$  убывает при условии  $n, m \rightarrow \infty$  как  $b_{nm} \sim 1/(nm)$ , т.е. это дискретное решение. Дело в том, что решение в координатах  $r, \theta$  определяет дискретное, но не продолжаемое решение, а в особой области в координатах  $\ln \rho, \Phi$  дискретно, в силу дискретности функций  $R(\ln \rho_0, \Phi)$  как дискретного ряда. Но так как описание особой области введется относительно координат  $\ln \rho_0, \Phi$ , особая область является дискретным, образующим либо вихревую дорожку, либо является пульсирующим турбулентным решением.

Формулу (2.1) можно переписать в виде

$$\sum_{n,m=-N}^N b_{nm} \exp(in\Phi + im \ln \rho_0) = \sum_{n,m=0}^N A_{nm} \operatorname{sgn}(\Phi - \Phi_n^0) \operatorname{sgn}(\Phi_n^1 - \Phi) \\ \operatorname{sgn}(\ln \rho_0 - \ln \rho_m^0) \operatorname{sgn}(\ln \rho_m^1 - \ln \rho_0) \quad , \quad (1.3.2.2)$$

где в данном случае имеем  $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$  и тогда скачок с амплитудой  $A_{nm}$

и фазой  $\Phi_n^0, \ln \rho_m^0, \Phi_n^1, \ln \rho_m^1$ , определится из уравнений

$$4\pi^2 b_{nm} = \sum_{p,q=1}^N A_{pq} \sin[n(\Phi_p^1 - \Phi_p^0)/2] \exp[in(\Phi_p^0 + \Phi_p^1)/2] \\ \sin[m(\ln \rho_q^1 - \ln \rho_q^0)/2] \exp[im(\ln \rho_q^0 + \ln \rho_q^1)/2] / (nm)$$

где индексы  $n, m = -N, \dots, -1, 1, \dots, N$ .

Отметим, что  $A_{00} = b_{00}$ . Если ряд, стоящий в левой части (1.3.2.2) непосредственно не суммируется, требуя большого числа членов, то правая часть (1.3.2.2) определит его дискретную сумму при конечном числе членов. Отметим, что

$$\Phi_n^0 + 2\pi p \leq \Phi_n \leq \Phi_n^1 + 2\pi p, \ln \rho_m^0 + 2\pi q \leq \ln \rho_m \leq \ln \rho_m^1 + 2\pi q$$

почти периодическая координата скачка.

Почему же турбулентное решение в особой области носит пульсирующий характер? Граница турбулентной области в силу дискретности турбулентного решения не гладкая функция, в отличие от ламинарного решения. Это приводит к неравенству тангенциальных компонент решения и к пульсации границы. Для описания этого течения необходимо ввести зависимость от времени приведенного радиуса

$$\ln \rho = [\ln \rho_0 - \omega \cdot t(2\pi - \Phi)\Phi / 4\pi^2](\Phi - \pi) / \pi, \omega = 2\pi Sh \frac{u_0}{d},$$

где величина  $Sh$  это число Струхаля. При этом картинка будет колебаться с частотой Струхаля по величине  $\ln \rho_0$ , что приведет к вращению вихрей в противоположные стороны, так как частоты при условии  $\Phi = \pi/2, \Phi = 3\pi/2$  имеют разные знаки, т.е. при преобладании в комплексной экспоненте косинуса картина обтекания будет иметь одинаковое вращение при фазе  $\Phi = \pi/2, \Phi = 3\pi/2$ , при преобладании синуса, будет вращение в разные стороны. Это приведет к сложной картине вращения даже для основных гармоник картины обтекания. При этом на границе области частота равна нулю, т.е. решение на границе непрерывно. Это условие будет способствовать устойчивой картине обтекания.

#### 1.4 Построение решения в виде ряда для трубопровода с круговым сечением

Можно привести уравнение Навье – Стокса к безразмерному виду для ряда, являющегося решением

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} \rho + \nu \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k^2}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0$$

Запишем уравнение Навье – Стокса в безразмерном виде, умножая на величину  $a^3 / (2R_{cr} \nu^2)$ , и умножая уравнение неразрывности на величину  $a^2 / \nu$ , получим уравнения

$$\frac{\partial R_i}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^3 R_k \frac{\partial R_i}{\partial y_k} = -\frac{\partial p}{\partial y_i} + 2R_{cr} \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 R_i}{\partial y_k^2}; \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial R_i}{\partial y_i} = 0$$

Имеем значение переменных  $R_i = V_i a / \nu, \tau = 2t \nu R_{cr} / a^2,$

$p = \frac{(p_1 - p_0) a^3 R_{cr}}{\rho \nu^2 l}, y_k = 2x_k R_{cr} / a$  величина  $a$  это радиус трубопровода,  $\rho, \nu$

плотность и кинематическая вязкость жидкости,  $V_i, P$  скорость и давление в

потоке, величина давления равна  $P = -\frac{P_1 - P_0}{L} z + P_1$ , где  $P_1, P_0$  начальное и

конечное давление в потоке. Имеется связь  $\frac{p_1 - p_0}{l} = \frac{P_1 - P_0}{L}$ , которая является

определением перепада давления  $p_1 - p_0$ . Величина скорости определяется по

формуле  $V_z = \sum_{l=1}^N \alpha_l(t) \sin \frac{\pi(4l+1)r}{a(z)}$ . Величина  $a(z)$  определяет высоту

шероховатости, при постоянном радиусе трубопровода. Уравнение

неразрывности удовлетворяется тождественно с точностью  $\langle \frac{da(z)}{dx} \rangle = 0$ , так

как радиальная и угловая скорость равна нулю в силу отсутствия внешнего радиального и углового воздействия и нулевых начальных условиях.

Критическое число Рейнольдса имеет иной вид по отношению к решению раздела 1.1, так как используется другая опорная функция. С помощью метода Галеркина приводим задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Удалось решить уравнение Навье – Стокса с точность до 0.6% при постоянном среднеквадратичном значении тангенса наклона шероховатостей. Строилось решение той же задачи на основе алгоритма (1.4.1). Получился следующий график

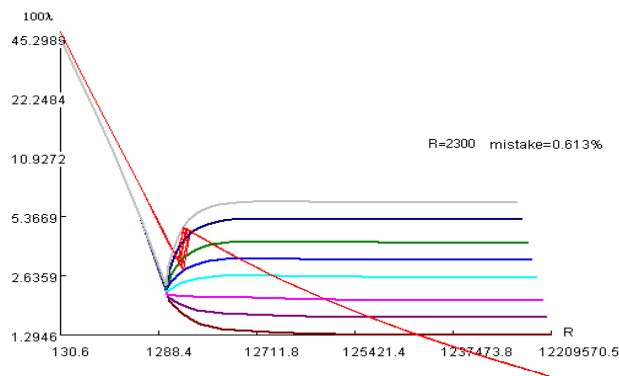


Рис.3

При этом формулы, по которым считался данный алгоритм с турбулентным решением в виде ряда

$$\begin{aligned} \langle X_l \rangle &= 2[\operatorname{Re} x_l + i \operatorname{Im} x_l] / [\pi(4l + 1)] \\ R &= \langle X \rangle \sqrt{T} \\ X^2 &= \sum_{k=0}^N (\operatorname{Re} \langle X_k \rangle)^2 + (\operatorname{Im} \langle X_k \rangle)^2 [\alpha / (\delta_k R_{cr} / l_k + 1)]^\sigma \\ \alpha &= 4.26, \sigma = 0.25 \cdot 3/2 \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

$$T = \frac{(p_1 - p_0) a^3 R_{cr}}{\rho v^2 l} = \frac{(P_1 - P_0) a^3 R_{cr}}{L \rho v^2} = \lambda \frac{R_{cr}}{8} |R|^2$$

$$\lambda = T \frac{8}{R_{cr} |R|^2}$$

При этом, так как учитывается множество членов, отражающих разную степень завихренности, корень из мнимой части комплексного числа Рейнольдса потока не извлекается. Степень шероховатости учитывалась из условия одинаковости



коэффициента сопротивления при разных формулах для решения, изменялся только коэффициент  $\alpha$ , так как на бесконечности числа Рейнольдса величина  $X$  является константой, определяемой формулой численного метода и необходимо, чтобы

$$\lambda = \frac{2\pi^2}{A_0 R_{cr} [\alpha / (R_{cr} / \xi_0 + 1)]^{3/2}} = \frac{2\pi^2}{A_0 R_{cr} (\alpha / 2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{R_{cr} [2 / (R_{cr} / \xi_0 + 1)]^{3/4}} = \frac{16\sqrt{2}}{R_{cr}},$$

$$\alpha = 2[2\pi^2 / (A_0 \cdot 16\sqrt{2})]^{2/3} = 4.26; A_0 = 0.28066$$

откуда определится коэффициент  $\alpha = 4.26$  при условии гладкости  $\xi_0 = R_{cr}$ . Отметим, что функции  $X$ , являющиеся решением дифференциального уравнения, одинаковы для разных представлений решения. Где величина  $x_l$  является корнем уравнения

$$\sum_{m,n=0}^N F_{knm} z_m z_n - 2R_{cr} (4k+1)^2 z_k + \frac{T}{4k+1} =$$

$$\sum_{m,n=0}^N F_{knm} x_m x_n - 2R_{cr} (4k+1)^2 x_k / \sqrt{T} + \frac{1}{4k+1} = 0, x_m = z_m / \sqrt{T}$$

$$F_{knm} = -\frac{(4m+1)}{2} \left[ \frac{1}{(4n+4m+4k+3)^2} + \frac{1}{(4n-4m+4k+1)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(4n+4m-4k+1)^2} - \frac{1}{(4n-4m-4k-1)^2} \right]$$

Решение этой системы нелинейных уравнений ищется в виде  $x_m = \frac{y_k}{(4m+1)^2}$ ,

причем для коэффициента  $y_k$  получаем квадратное уравнение

$$(y_k)^2 \sum_{m,n=0}^N \frac{F_{knm}}{(4n+1)^2(4m+1)^2} - 2R_{cr}y_k/\sqrt{T} + \frac{1}{4k+1} = 0$$

$$A_k(y_k)^2 - 2R_{cr}y_k/\sqrt{T} + h_k = 0 \quad . \quad (1.4.2)$$

$$y_k = \frac{R_{cr}/\sqrt{T} - \sqrt{R_{cr}^2/T - h_k A_k}}{A_k}, x_k = \frac{y_k}{(4k+1)^2} = \frac{z_k}{\sqrt{T}}$$

При этом величина  $x_k$  определяется по формуле  $x_k = \frac{y_k}{(4k+1)^2}$ .

При этом основное решение  $x_i^0$  имеет счетное количество значений. Значение  $x_i^0$  соответствует линейной части решения. Продолжая это решение при большом перепаде давления, получим основной член решения задачи гидродинамики. Докажем, что имеется счетное количество решений с нулевой энергией, т.е. координат положения равновесия имеется счетное количество. Допустим нашли одно решение. Следующее решение определится из системы уравнений

$$A_{kn}y_n = 0$$

$$A_{kn} = \sum_{m=1}^N F_{knm}y_m + G_{kn}; G_{kn} = \sum_{m=1}^N (F_{kmn} + F_{knm})x_m^0 - 2R_{cr}\delta_{kn}(4k+1)^2/\sqrt{T}.$$

Выберем начальное приближение, чтобы определитель этой линейной системы уравнений равнялся нулю. Для этого определим  $y_m = \frac{\alpha}{(4m+1)^2}$ , и найдем из

равенства нулю определителя значение  $\alpha$ . Тогда следующее приближение определит значения  $y_m = \frac{\alpha_m}{(4m+1)^2}$  с точностью до множителя. Вычислим этот

множитель из условия равенства нулю определителя. Этот множитель определяется  $N$  значениями, определяя корень полинома  $N$  степени. В результате получим  $N+1$  решение алгебраического уравнения.

Получение счетного количества ( $N \rightarrow \infty$ ) координат положения равновесия эквивалентно получению счетного количества решений для

уравнения Шредингера. Эквивалентность уравнения Шредингера и Навье – Стокса докажем в данной статье далее по тексту.

График на рис.3 отличается от графика Никурадзе на рис.4. Асимптотика при больших и малых значениях числа Рейнольдса совпадает с графиком Никурадзе. Но график построен при постоянном тангенсе наклона шероховатости, а график Никурадзе при постоянном отношении радиуса трубопровода к средней высоте шероховатости. Построим значение эффективного тангенса наклона шероховатостей, по средней высоте шероховатости.

$$\frac{l_k(T, \xi_0)}{\delta_k(T, \xi_0)} = \{ \exp[-|\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}| / \alpha_k(\xi_0)] + \xi_0 [1 - \exp(-|\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}| / \alpha_k(\xi_0))] \} \times \\ \times \{ 1 + 0.4 \exp\{-[\sqrt{T} - \sqrt{T_{cr}}] \beta_k(\xi_0) / \gamma_k(\xi_0)\} \}$$

причем эквивалентная степень шероховатости зависит от безразмерного давления. Эквивалентную степень шероховатости можно получить при расчете динамики процесса течения жидкости на микро-шероховатостях постоянной высоты. Величина критического давления определяется из формулы  $T_{cr} = R_{cr}^2 / A_0 h_0$ . Эмпирическая формула по определению коэффициентов  $\alpha_k(\xi_0), \beta_k(\xi_0), \gamma_k(\xi_0)$  следующая

$$\alpha_k(\xi_0) = R_{cr} \frac{\xi_0}{1.5} \eta_k, \quad \beta_k(\xi_0) = \frac{\xi_0}{4} \eta_k, \quad \gamma_k(\xi_0) = R_{cr} \xi_0^{1.5} \eta_k / 4$$

$$\eta_k = \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^S 1 / \left( \sqrt{\frac{h_k}{A_k}} - \sqrt{\frac{h_s}{A_s}} \right) / (2\sqrt{2})$$

Где  $2\sqrt{2} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^S 1 / \left( \sqrt{\frac{h_k}{A_k}} - \sqrt{\frac{h_s}{A_s}} \right)$  это коэффициенты, образующие множитель при

мнимой части решения для решения в виде одного члена и в виде ряда соответственно.

При этом в начале образования мнимой части комплексного решения, или начале турбулентного решения, тангенс наклона шероховатостей приближенно равен 1, и графики при разных тангенсах наклона шероховатостей совпадают.

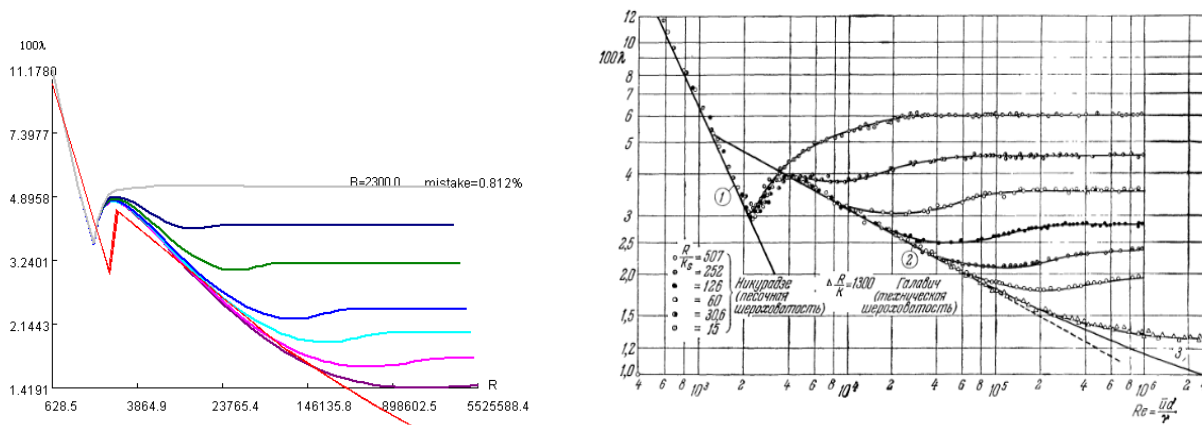


Рис.4

График построен для отношения радиуса трубопровода  $r_0$  к высоте шероховатостей  $\delta_0$  равной  $\xi_0 = \frac{r_0}{\delta_0} = 15, 30, 60, 126, 252, 507, 1300$ . Точность аппроксимации относительно графиков Никурадзе примерно 10%.

## 2. Построение решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных автономных дифференциальных уравнений

$$\frac{dc_l}{dt} = Q_l(c_1, \dots, c_N), l = 1, \dots, N \quad (2.1)$$

К системе нелинейных дифференциальных уравнений сводится система уравнений Навье – Стокса и уравнение неразрывности.

$$\frac{dc_m(t)}{dt} = \sum_{p,q=1}^N F_{mpq} c_p(t) x_q(t) + \sum_{p=1}^N G_{mp} c_p(t) + H_m = Q(c_1, \dots, c_N); m = 1, \dots, N \quad (2.2)$$

Где величина трехмерной скорости определяется по формуле

$$V(t, x_1, x_2, x_3) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \varphi_n(x_1, x_2, x_3). \text{ Причем функция } \varphi_n(x_1, x_2, x_3) \text{ определяется}$$

в виде синуса. Тогда коэффициенты  $c_n(t)$  для непрерывной функции убывают с ростом индекса как величины не большие  $1/n^2$  и возможна редукция, т.е. вместо бесконечного числа членов используется конечное число членов.

Исследуются комплексные и действительные решения задачи Коши этого дифференциального уравнения в случае действительных и комплексных начальных условиях, при действительном аргументе  $t$ . Начальные условия имеют вид  $c_l(t_0) = c_l^0, l = 1, \dots, N$ , где величина  $t_0$  соответствует начальному моменту интегрирования, а величина  $c_l^0$  в общем случае комплексная. Причем в случае действительных значениях  $c_k, k = 1, \dots, N$ , правая часть (2.1) действительна.

Систему дифференциальных уравнений (2.2) можно представить при

не кратных положениях равновесия путем подстановки  $c_l = \sum_{k=1}^N g_{lk} x_k$ . При этом положения равновесия системы (2.2)  $b_l^s, l = 1, \dots, N; s = 1, \dots, S$  перейдут в положения равновесия  $a_l^s, l = 1, \dots, N; s = 1, \dots, S$ . При этом определяются собственные числа и собственные векторы линеаризованной системы (2.2).

$$\left[ \frac{\partial Q_k}{\partial c_m}(b_1^s, \dots, b_N^s) - \Lambda_\alpha^s \delta_{km} \right] g_{m\alpha}^s = 0$$

$$\left| \frac{\partial Q_k}{\partial c_m}(b_1^s, \dots, b_N^s) - \Lambda_\alpha^s \delta_{km} \right| = 0$$

Система уравнений (2.2) запишется в виде

$$\frac{dx_n}{dt} = \Lambda_n^s (x_n - a_n^s) + (x_n - a_n^s)^2 P_n^s(x_1, \dots, x_N) = F_n(x_1, \dots, x_N). \quad (2.3a)$$

Систему уравнений (2.3a) можно записать в виде

$$\frac{dx_l}{dt} = \exp[G_l(x_1, \dots, x_N)] \prod_{s=1}^S (x_l - a_l^s), \quad (2.3б)$$

где введен не обращающийся в ноль множитель  $\exp[G_l(x_1, \dots, x_N)]$ , который равен  $\exp[G_l(x_1, \dots, x_N)] = F_l(x_1, \dots, x_N) / \prod_{s=1}^S (x_l - a_l^s)$ . При подстановке этого множителя в (2.3б), получим (2.3a). Покажем, что этот множитель в ноль не обращается. Величины  $a_l^s$  удовлетворяют условию  $F_k(a_1^s, \dots, a_N^s) = 0, k = 1, \dots, N; s = 1, \dots, S$ , где величина  $S$  конечна.

При условии  $x_l \rightarrow a_l^\alpha, l = 1, \dots, N$  имеем конечный предел

$$\begin{aligned} \exp[G_l(a_1^\alpha, \dots, a_N^\alpha)] &= \frac{\partial F_l(a_1^\alpha, \dots, a_N^\alpha)}{\partial x_l} / [(a_l^\alpha - a_l^1) \dots (a_l^\alpha - a_l^{\alpha-1}) (a_l^\alpha - a_l^{\alpha+1}) \dots (a_l^\alpha - a_l^S)] = \\ &= \Lambda_l^\alpha / [(a_l^\alpha - a_l^1) \dots (a_l^\alpha - a_l^{\alpha-1}) (a_l^\alpha - a_l^{\alpha+1}) \dots (a_l^\alpha - a_l^S)] \end{aligned}$$

Где произвели сокращение множителя  $x_l - a_l^\alpha$ , числитель дроби в ноль не обращается, так как рассматриваются не совпадающие корни, являющиеся координатами положения равновесия. Показали, что этот множитель в ноль не обращается при не совпадающих координатах положения равновесия. Величины  $a_l^s$  удовлетворяют условию  $F_k(a_1^s, \dots, a_N^s) = 0, k = 1, \dots, N; s = 1, \dots, S$ , где величина  $S$  конечна.

При этом дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\frac{dx_l}{dH_l(t, t_0)} = \prod_{s=1}^S (x_l - a_l^s) \quad , \quad (2.4)$$

$$\frac{dH_l(t, t_0)}{dt} = \exp\{G_l[x_1(H_l), \dots, x_N(H_l)]\}$$

где  $H_l(t, t_0)$  стремящаяся к бесконечности функция при условии стремления координат к положению равновесия. В случае решения в действительной плоскости это монотонная функция. Т.е. получаем зависимость решения от величины  $H_l(t, t_0)$ , которая является монотонной функцией времени.

Лемма 2. Необходимым и достаточным условием стремления неизвестной функции к устойчивым координатам положения равновесия является условие  $H_l(t, t_0) \rightarrow \infty$ , причем  $t \rightarrow \infty$ .

Имеем соотношения

$$\begin{aligned} \exp[G_l(x_1, \dots, x_N)] &\rightarrow \exp[G_l(a_1^S, \dots, a_N^S)] = \\ &= \Lambda_l^S / [(a_l^\alpha - a_l^1) \dots (a_l^\alpha - a_l^{\alpha-1}) (a_l^\alpha - a_l^{\alpha+1}) \dots (a_l^\alpha - a_l^S)]; \end{aligned} \quad (2.5)$$

при  $t \rightarrow \infty$  и значит  $H_l(t, t_0) \rightarrow \infty, l = 1, \dots, N$ , как интеграл от константы. Справедлива и обратная теорема, при условии  $H_l(t, t_0) \rightarrow \infty, l = 1, \dots, N$ , реализуется одно из устойчивых положений равновесия. Это следует из вида решения, при условии  $H_l(t, t_0) \rightarrow \infty, l = 1, \dots, N$  имеется отрицательная действительная часть у числа  $\lambda_l^S$  в формуле (2.6) согласно лемме 4, и решение стремится к координате положения равновесия  $a_l^S$  в формуле (2.4). При этом величина времени стремится к бесконечности.

Лемма 3. Решением дифференциального уравнения (2.1) является функция  $x_l(t)$ , удовлетворяющая формуле (2.6).

Для получения (2.6) разделим уравнение (2.4) на произведение множителей  $x_l - a_l^s$  и умножим (2.4) на величину  $dH_l(t, t_0)$ . Раскладываем полученную дробь на сумму простых дробей и их интегрируем. Получаем уравнения

$$\sum_{s=1}^S \lambda_l^s [\ln(x_l - a_l^s) + 2\pi i n_s] \Big|_{t_0}^t = H_l(t, t_0), l = 1, \dots, 2N.$$

Где в случае излучения звуковой энергии в интервале  $[t_0, t]$  получим разные ветви логарифма.

Потенцируя полученное выражение, получим (2.6)

$$\prod_{s=1}^S (x_l - a_l^s)^{\lambda_l^s} \exp(2\pi i \lambda_l^s \Delta n_s) / \prod_{s=1}^S (x_l^0 - a_l^s)^{\lambda_l^s} = \exp[H_l(t, t_0)]; \quad (2.6)$$

$$\lambda_l^s = 1 / [(a_l^s - a_l^1) \dots (a_l^s - a_l^{s-1}) (a_l^s - a_l^{s+1}) \dots (a_l^s - a_l^S)]$$

где все значения координат положения равновесия не кратные и не зависят от процесса излучения, происходящего в интервале  $[t_0, t]$ . Причем в случае ламинарного действительного решения излучения не будет, а в случае турбулентного, сопровождающегося излучением решения будет переход энергии. В самом деле, наличие излучения определяет комплексное решение, которое описывает турбулентный пульсирующий режим. При этом турбулентный режим при перестройке решения сопровождается звуковым шумом. На координаты положения равновесия, определяющие стационарное решение, экспоненциальный множитель не оказывает влияние.

Лемма 4. Сумма коэффициентов  $\lambda_l^s$  по индексу  $s$  равна нулю, т.е.  $\sum_{s=1}^S \lambda_l^s = 0$ .

В случае если разлагается дробь



$$P(y) = \frac{Q_{S-1}(y)}{(y - a_1^1) \dots (y - a_1^{S-1})(y - a_1^{S+1}) \dots (y - a_1^S)}.$$

Где  $Q_{S-1}(y)$  полином степени  $S-1$ . Свойство  $\sum_{s=1}^S \lambda_l^s = 0$  останется,

$$\lambda_l^s = \frac{Q_{S-1}(a_l^s)}{(a_l^s - a_1^1) \dots (a_l^s - a_1^{s-1})(a_l^s - a_1^{s+1}) \dots (a_l^s - a_1^S)}.$$

Докажем это. Для чего

рассмотрим сумму

$$P(y) = \sum_{s=1}^S \frac{Q_{S-1}(a_l^s)(y - a_1^1) \dots (y - a_1^{s-1})(y - a_1^{s+1}) \dots (y - a_1^S)}{(a_l^s - a_1^1) \dots (a_l^s - a_1^{s-1})(a_l^s - a_1^{s+1}) \dots (a_l^s - a_1^S)}.$$

Эта сумма равна  $P(y) = Q_{S-1}(y)$ . Распишем формулу для полинома, равного  $Q_{S-1}(y)$ , разделив его на произведение  $(y - a_1^1) \dots (y - a_1^S)$ , получим

$$\sum_{s=1}^S \frac{Q_{S-1}(a_l^s)}{(a_l^s - a_1^1) \dots (a_l^s - a_1^{s-1})(a_l^s - a_1^{s+1}) \dots (a_l^s - a_1^S)(a_l^s - y)} + \frac{Q_{S-1}(y)}{(y - a_1^1) \dots (y - a_1^{S-1})(y - a_1^S)(y - a_1^{S+1}) \dots (y - a_1^S)} = 0.$$

полагая,  $y = a_l^{S+1}$  получим тождество  $\sum_{s=1}^{S+1} \lambda_l^s = 0$ , в случае, если имеется  $S+1$

положение равновесия.

Но чтобы реализовать решение, надо знать положения равновесия этой системы нелинейных уравнений. Кроме того, положения равновесия могут быть кратные, что изменяет ход решения, оно становится случайным, или хаотическим. Но удастся доказать важную теорему.

**Теорема 1.** Рассматривается задача Коши при произвольных действительных начальных условиях для системы нормальных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1). Случай вырожденного решения задачи

Коши – положения равновесия, не рассматривается. В случае, если у системы (2.1) имеются комплексно-сопряженные положения равновесия с действительной частью, то при конечном аргументе  $t$  действительное решение задачи Коши системы (2.1) при действительных начальных условиях стремится к бесконечности. Потом это решение переходит в комплексное решение, стремясь к положению равновесия, в случае, если комплексные координаты положения равновесия имеют действительную часть. При этом правую часть (2.1) считаем регулярной функцией, действительной при действительных аргументах. Она имеет конечное число не кратных положений равновесия.

Доказательство.

Если решать систему (2.2) при не кратных положениях равновесия, то получим согласно с леммой 3

$$\begin{aligned} & \{-2\lambda_{iml}^s \arctan[(x_l - \alpha_l^s) / \beta_l^s] + \lambda_{rel}^s \ln[(x_l - \alpha_l^s)^2 + (\beta_l^s)^2]\} \Big|_{t_0}^t + \\ & + \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l - a_l^k) \Big|_{t_0}^t = H_l(t, t_0), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $a_l^s + ib_l^s$  выделенное комплексное положение равновесия,  $c_l^s$  остальные положения равновесия. Коэффициенты  $\lambda_l^s$  удовлетворяют  $\sum_s \lambda_l^s = 0$  в

соответствии с леммой 4. При этом в сумме  $\sum_{s=1}^S \lambda_l^s$  величина действительной части  $\lambda_{rel}^s$  в случае комплексного значения  $\lambda_l^s$  участвует дважды и в силу того, что все числа  $\lambda_l^s$  удовлетворяют условию  $\sum_s \lambda_l^s = 0$ , имеем формулу

$$2\lambda_{rel}^s + \sum_k \lambda_l^k = 0.$$

Обоснуем формулу (2.3). Для этого два комплексно сопряженных члена решения преобразуем (для упрощения записи индекс  $l$  опускаем)

$$\frac{\lambda_{re}^s + i\lambda_{im}^s}{x - \alpha^s - i\beta^s} + \frac{\lambda_{re}^s - i\lambda_{im}^s}{x - \alpha^s + i\beta^s} = \frac{2(x - \alpha^s)\lambda_{re}^s - 2\beta^s\lambda_{im}^s}{(x - \alpha^s)^2 + (\beta^s)^2}, \quad (2.8)$$

где  $\lambda^s = \lambda_{re}^s + i\lambda_{im}^s$ . После интегрирования (2.8) по аргументу  $x$ , получим формулу (2.7)

$$\lambda_{re}^s \ln[(x - \alpha^s)^2 + (\beta^s)^2] - 2\lambda_{im}^s \arctan \frac{x - \alpha^s}{\beta^s}.$$

Решение равняется

$$x_l(t) = \alpha_l^s + \beta_l^s \tan D_l(t),$$

где

$$\begin{aligned} D_l(t) &= \left\{ \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l - a_l^k) \Big|_{t_0}^t + \lambda_{rel}^s \ln[(x_l - \alpha_l^s)^2 + (\beta_l^s)^2] \Big|_{t_0}^t - H_l(t, t_0) \right\} / 2\lambda_{iml}^s = \\ &= \left\{ \sum_k \lambda_l^k + 2\lambda_{rel}^s + \sum_k \lambda_l^k \ln(1 - a_l^k / x_l) + \lambda_{rel}^s \ln[(1 - \alpha_l^s / x_l)^2 + (\beta_l^s)^2 / x_l^2] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_k \lambda_l^k \ln(x_l^0 - a_l^k) - \lambda_{rel}^s \ln[(x_l^0 - \alpha_l^s)^2 + (\beta_l^s)^2] - H_l(t, t_0) \right\} / 2\lambda_{iml}^s, \\ &\quad \sum_k \lambda_l^k + 2\lambda_{rel}^s = 0 \end{aligned}$$

При этом величина  $\sum_k (\lambda_l^k a_l^k + 2\lambda_{rel}^s \alpha_l^s)$  действительная в силу существования комплексно-сопряженных положений равновесия.

Вычислим производную  $\frac{dD(H_l)}{dH_l}$ , которая нам понадобится в дальнейшем

$$\begin{aligned} \frac{dD(H_l)}{dH_l} &= \left[ \sum_{k, k \neq s} \frac{\lambda_l^k}{x_l - a_l^k} + \frac{2\lambda_{rel}^s (x_l - \alpha_l^s)}{(x_l - \alpha_l^s)^2 + (\beta_l^s)^2} \right] \frac{dx_l}{dH} - \frac{1}{2\lambda_{iml}^s} = \\ &= 1 + 2\beta_l^s \lambda_{im}^s \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^S (a_l^s - a_l^k) - \frac{1}{2\lambda_{iml}^s} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Т.е. имеем равенство при условии  $|x_l| \rightarrow \infty$  при конечном  $t$

$$x_l(t) = a_l^s + b_l^s \tan D_l(t). \quad (2.10)$$

Это уравнение имеет решение, стремящееся к бесконечности.

При этом решение дифференциального уравнения при росте  $H_l(t, t_0)$  согласно лемме 2, может иметь комплексные корни

$$\sum_k \lambda_l^k \ln(x_l - a_l^k) \Big|_{t_0}^t = H_l(t, t_0) .$$

При этом, так как справедливо  $\sum_k \lambda_l^k = 0$  согласно лемме 4, и положения равновесия имеют действительную часть, имеются числа с отрицательной действительной частью  $\lambda_l^k$ , значит, имеется сходимость к одному из положений равновесия. Действительное решение будет стремиться к бесконечности, причем нарушатся условия существования и единственности задачи Коши. При этом при бесконечности  $H_l(t, t_0)$  согласно лемме 2 неизвестная функция будет стремиться к одному из положений равновесия. Это положение равновесия не может быть действительным, так как действительное решение бесконечно. Значит, решение будет иметь точку ветвления и стремиться к комплексному положению равновесия. Значит, при комплексных положениях равновесия получается конечное комплексное решение при изменении  $H_l(t, t_0)$ . Т.е. в некоторой точке начнется комплексное решение.

Конец доказательства.

Приведем пример, описывающий это свойство дифференциального уравнения, переход к комплексному решению. Так для дифференциального уравнения может возникнуть комплексное решение, вместо бесконечного действительного решения

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2.$$

Причем положения равновесия чисто мнимые  $x = \pm i$ , и значит, решение может не стремиться к положению равновесия. Причем действительное решение этого дифференциального уравнения быстро стремится к бесконечности  $x = \tan[t - t_0 + \arctan(x_0)]$ .

Используя неявную схему решения, получим следующее уравнение

$$x = x_0 + (1 + x^2)\Delta t + 0(\Delta t)^2.$$

Разрешая относительно неизвестной функции  $x$ , получим неявную схему

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4[x_0 + \Delta t + 0(\Delta t)^2]\Delta t}}{2\Delta t}.$$

Эта неявная схема с постоянным шагом правильно описывает стремление решения к бесконечности. При счете с уменьшенным шагом она определяет большее значение переменной  $t$  и значит, определяет большее значение неизвестной функции. Т.е. правильно описывает решение дифференциального уравнения до бесконечности решения. Когда бесконечность достигнута, при условии  $x_0 > 1/(4\Delta t) - \Delta t - 0(\Delta t)^2$  определится конечное комплексное решение. Численный счет этого уравнения подтвердил правильность проведенного анализа решения.

Причем комплексное решение обладает новыми свойствами, оно сложным образом вращается вокруг положения равновесия. При этом действительное решение стремится к бесконечности, т.е. правая часть дифференциального уравнения стремится к бесконечности, и нарушаются условия существования и единственности решения задачи Коши, и возникает дополнительное комплексное решение.

Решение с комплексными начальными данными определится формулой  $x = \tan[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]$  при любом  $t$ . Т.е. приближенно имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= -i \frac{\exp\{i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\} - \exp\{-i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\}}{\exp\{i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\} + \exp\{-i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\}} = \\ &= i - 2i \exp\{2i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\} + i \exp\{4i[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]\} + \dots = \\ &= i - 2i \exp[2i(t - t_0 + \alpha) - 2\beta] + i \exp[4i(t - t_0 + \alpha) - 4\beta] + \dots \\ &\quad \arctan(x_0 + i\delta) = \alpha + i\beta \end{aligned}$$

При этом знаменатель этой дроби в ноль не обращается.

Т.е. конечного решения задачи в действительной плоскости не существует. А в комплексной плоскости имеется конечное непрерывное решение в случае не кратных положениях равновесия.

Но возникает вопрос, каков физический смысл мнимой части комплексного решения.

### 3. Физический смысл комплексного решения.

Комплексное решение как вероятностная задача пересчитывается в действительное решение разными способами. При подсчете коэффициента сопротивления надо использовать средний квадрат величины и поэтому используется модуль комплексного числа.

При описании кинематики турбулентного потока надо использовать мгновенную скорость потока поэтому используется среднее значение числа Рейнольдса потока плюс мнимая часть координаты, умноженная синус угловой скорости, умноженный на время, деленный корень из синуса суммы квадратов других проекций.

$$\begin{aligned}
X_l(t, x_1^0, x_2^0) &= \operatorname{Re} x_l(t, x_1^0, x_2^0) + \sqrt{2} \operatorname{Im} x_l(t, x_1^0, x_2^0) \times \\
&\times \sin \left\{ \int_0^t \Omega_l [\operatorname{Re} x_1(t, x_1^0, x_2^0), \operatorname{Re} x_2(t, x_1^0, x_2^0), \operatorname{Re} x_3(t, x_1^0, x_2^0)] dt + \varphi_l \right\} / \\
&/ \sqrt{\sum_{k=1}^3 \sin^2 \left\{ \int_0^t \Omega_k [\operatorname{Re} x_l(t, x_1^0, x_2^0), \operatorname{Re} x_2(t, x_1^0, x_2^0), \operatorname{Re} x_3(t, x_1^0, x_2^0)] dt + \varphi_k \right\}}; \\
\Omega_k(\mathbf{r}) &= e_{kpq} \left[ \frac{\partial \operatorname{Im} V_q(\mathbf{r})}{\partial x_p} - \frac{\partial \operatorname{Im} V_p(\mathbf{r})}{\partial x_q} \right]; \varphi_k \in [-\pi, \pi]
\end{aligned}$$

Эта формула приближенная, аргументами частоты является не среднее значение – действительная часть координаты, а сама координата с колебаниями. Это еще сильнее увеличит хаотический колебательный режим траекторий потока.

Задание углов  $\varphi_k \in [-\pi, \pi]$  полностью определит возможное изменение картины турбулентного потока и является действительный квантовым числом потока.

Координаты с верхним индексом, равным нулю являются действительными.

$$\frac{dx_k}{dt} = \operatorname{Re} V_k(\mathbf{r}) + i \operatorname{Im} V_k(\mathbf{r}) \sin[\Omega_k(\mathbf{r})t + \varphi_k]; x_k(t_0, x_1^0, x_2^0, L) = x_k^0$$

Получается эллиптическое изменение отношения координаты к мнимой координате.  $\frac{[X_l(t, \mathbf{r}) - \operatorname{Re} x_l(t, \mathbf{r})]^2}{[\operatorname{Im} x_l(t, \mathbf{r})]^2} = 1$ . В двумерном случае имеем одну угловую скорость, перпендикулярную скорости вращения и траектория частиц потока будет определяться по формуле

$$\begin{aligned}
X_1(t, x_1^0) &= \operatorname{Re} x_1(t, x_1^0) + \sqrt{2} \operatorname{Im} x_1(t, x_1^0) \sin \left\{ \int_0^t \Omega_3 [\operatorname{Re} x_1(t, x_1^0), \operatorname{Re} x_2(t, x_1^0)] dt + \varphi_3 \right\}; \\
\Omega_3(\mathbf{r}) &= e_{3pq} \left[ \frac{\partial \operatorname{Im} V_q(\mathbf{r})}{\partial x_p} - \frac{\partial \operatorname{Im} V_p(\mathbf{r})}{\partial x_q} \right] \quad \text{В} \\
X_2(t, x_1^0) &= \operatorname{Re} x_2(t, x_1^0) + \operatorname{Im} x_2(t, x_1^0) \cos \left\{ \int_0^t \Omega_3 [\operatorname{Re} x_1(t, x_1^0), \operatorname{Re} x_2(t, x_1^0)] dt + \varphi_3 \right\}
\end{aligned}$$

одномерном случае комплексная координата определяется по формуле

$$X(t, x) = \operatorname{Re} x(t) + \operatorname{Im} x(t) \sin \left\{ \int_0^t \frac{d \operatorname{Im} V[\operatorname{Re} x(t)]}{dx} dt + \varphi \right\};$$

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{Re} V(x) + i \operatorname{Im} V(x) \sin[\Omega(x)t + \varphi]; x(t_0, L) = L; \Omega(x) = \frac{d \operatorname{Im} V(x)}{dx}$$

В случае если скорость не зависит от координат. нужно вычислить число Рейнольдса и фазу определять по формуле  $\varphi = \int_0^{\tau} \operatorname{Im} R(\tau) d\tau, \tau = tv/a^2$ , тогда плечо скорости равно константе и частота соответствует мнимой части числа Рейнольдса.

Опишем физический смысл комплексного турбулентного решения. Итак, рассмотрим действительное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений  $x_\alpha(t)$ . Пусть начальные данные имеют среднее  $x_\alpha^0$  и дисперсию  $\langle [\Delta x_\alpha^0]^2 \rangle$  (дисперсия начальных данных в случае уравнения Навье – Стокса определяется шероховатостью поверхности или не точно заданными начальными данными). Тогда для дисперсии решения имеем

$$\langle [\Delta x_l]^2 \rangle = \langle [x_l - \langle x_l \rangle]^2 \rangle = \langle x_l^2 \rangle - 2 \langle x_l \rangle \langle x_l \rangle + \langle x_l \rangle^2 = \langle x_l^2 \rangle - \langle x_l \rangle^2.$$

Значит имеем

$$\langle x_l^2 \rangle = \langle x_l \rangle^2 + \langle [\Delta x_l]^2 \rangle = |\langle x_l \rangle + i \sqrt{\langle [\Delta x_l]^2 \rangle}|^2 \quad (3.1)$$

Приведу формулировку обратной теоремы Пифагора. Для всякой тройки положительных чисел  $a, b$  и  $c$ , такой, что  $a^2 + b^2 = c^2$ , существует прямоугольный треугольник с катетами  $a$  и  $b$  и гипотенузой  $c$ . Значит, математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение образуют катеты, а гипотенузой является корень из среднего квадрата величины. Т.е. величина среднего  $\langle x_l \rangle$  ортогональна среднеквадратическому отклонению  $\sqrt{\langle [\Delta x_l]^2 \rangle}$ , которое образует мнимую часть координаты тела. Таким образом, полученное в результате усреднения во времени декартово пространство с



колебательной скоростью высокой частоты (период колебания меньше времени измерения) становится комплексным пространством. Т.е. в случае большой дисперсии величины действительного пространства, его нужно рассматривать как комплексное трехмерное пространство, где мнимая часть соответствует среднеквадратическому отклонению. При этом имеется следующая связь между переменными  $\sqrt{\langle x_l^2 \rangle} = (\langle x_l \rangle + i\sqrt{\langle [\Delta x_l]^2 \rangle})\alpha, |\alpha|=1$ , причем комплексное число  $\alpha$  выбирается из условия, чтобы мнимая часть имела положительное или отрицательное значение. Этому удовлетворяет среднеквадратичное отклонение. Но иногда среднеквадратичное отклонение положительно, например, в случае диэлектрической проницаемости, где вмешиваются положительные и отрицательные заряды. Тогда имеем формулу  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ , где действительная часть пропорциональна положительному среднеквадратичному отклонению диполя, а проводимость пропорциональна среднему значению. Но зато проводимость делится на частоту, которая имеет положительный и отрицательный знак.

Следовательно, алгоритм нахождения среднего решения, или среднего в фазовом пространстве решения, и его дисперсию сводится к нахождению комплексного решения. Среднее решение соответствует действительной части решения, а квадрат комплексной части соответствует дисперсии решения. Таков физический смысл комплексного решения, действительная часть - это среднее решение, а мнимая часть – это его среднеквадратическое отклонение. Причем действительная и мнимая часть ортогональны, и образуют комплексное пространство. В самом деле, согласно обратной теореме Пифагора в силу формулы (3.1) математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение образуют катеты, а средний квадрат является гипотенузой.

Отметим, что при расчете движения потока при учете одного члена ряда, надо брать квадратный корень из мнимой части, так как вычисляется поступательная

скорость. Мнимая часть соответствует квадратному корню из колебательной части безразмерной скорости. Ситуация аналогична вычислению отклонения при случайном выборе шага вперед или назад с вероятностью  $\frac{1}{2}$  и положение точки после  $N$  шагов определяется значением  $\sqrt{N}$ . Действительная часть решения и мнимая часть решения расположены на разных осях комплексного 2

Возьмем разность энергия без учета преобразования мнимой части и с учетом этого преобразования

$$\alpha T - (R_{cr}^2 + T\sqrt{\alpha - R_{cr}^2/T}),$$

параметр определяющий положительна или отрицательна эта разность

$$\frac{\alpha}{R_{cr}^2/T + \sqrt{\alpha - R_{cr}^2/T}}.$$

При условии  $\alpha = R_{cr}^2/T$ , получаем значение этого параметра, равное единице, т.е. система не обменивается энергией с окружающей средой. При условии большого давления, определяющим будет параметр  $\sqrt{\alpha}$ .

Причем решение равно модулю последней величины, и при разных шероховатостях мнимую часть решения надо умножать на усредняющий множитель. При этом если вычисляются все коэффициенты ряда из системы нелинейных уравнений, извлекать квадратный корень из мнимой части не надо. Необходимо складывать комплексные величины и брать модуль суммы.

Покажем, что мнимая часть комплексной производной от координаты в фазовом пространстве дифференциального уравнения, которую назовем скоростью, образует пульсирующее перемещение координаты в фазовом пространстве, т.е. в пространстве переменных  $\langle x_k(t) \rangle + i\sqrt{\langle [\Delta x_k(t)]^2 \rangle}$ .

Используется в качестве переменных среднее значение, ведь на молекулярном уровне среда не гладкая.

Лемма 5. Комплексное решение определяет колеблющуюся пульсирующую функцию координат перемещения потока.

Мнимая часть скорости соответствует скорости вращения в фазовом пространстве. Так как известен радиус вращения, то можно определить и частоту вращения. В плоскости вращения комплексную скорость с постоянным радиусом вращения и постоянной частотой можно представить в виде  $V_x + iV_y = V_0 \exp(i\omega t)$ . В случае переменной по пространству стационарной скорости эту формулу можно представить локально в одной плоскости в виде

$$V_x(x, y) + iV_y(x, y) = V_0(x, y) \exp\left[i \int_0^t \omega(x, y, u) du\right],$$

причем частота зависит от времени, так как смещение фазы обеспечивается гармоническими колебаниями в соседних точках. Сумма гармонических колебаний с разными частотами, зависящими от времени, определяет пульсирующий режим в фазовом пространстве, при стационарной комплексной скорости. Т.е. получается, что комплексная скорость описывает пульсирующие во времени координаты точек фазового пространства. Ситуация аналогична наличию нескольких стационарных вихрей, описывающих пульсирующее вращение потока.

Лемма 6. Трехмерную скорость потока можно представить в виде

$$V_l = V_{il} + iV_{nl} = V_l \exp(i\varphi_l), \varphi_l = \arg(V_{il} + iV_{nl}).$$

Причем скорости определяются в виде интеграла от касательного ускорения, по формуле

$$\begin{aligned}
V_{il} &= \int_{t_0}^t t_l(u) w_t(u) du + V_{il}(t_0) = \int_{t_0}^t t_l(u) \frac{d\sqrt{\sum_{k=1}^3 V_k(u) V_k^*(u)}}{du} du + V_{il}(t_0) = \\
&= \int_{t_0}^t t_l(u) \frac{d\sqrt{\sum_{k=1}^3 [V_{tk}^2(u) + V_{nk}^2(u)]}}{du} du + V_{il}(t_0),
\end{aligned}$$

Интеграл от нормального ускорения определяется по нормальной компоненте мнимой скорости, по формуле (действительная постоянная поступательная скорость соответствует бесконечному радиусу кривизны)

$$\begin{aligned}
V_{nl} - V_{nl}^0 &= \int_{\tau_0}^{\tau} w_{nl}(u) du = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{n_l(u)(|\mathbf{V}_{lm}|^2 + \mathbf{V}_{Re}^2)}{\rho(u)} du = \int_{s_0}^s (|\mathbf{V}_{lm}(u)| \frac{n_l(u)}{\rho(u)} + \frac{\mathbf{V}_t^2}{\rho_\infty}) ds = \\
&= \int_{\tau_0}^{\tau} |\mathbf{V}_{lm}| dt_l = \begin{cases} |\mathbf{V}_{lm}| [t_l(\tau) - t_l(\tau_0)], |\mathbf{V}_{lm}| = const; \frac{n_l(u)}{\rho(u)} = \frac{dt_l}{ds} \\ \int_{\tau_0}^{\tau} |\mathbf{V}_{lm}| dt_l, |\mathbf{V}_{lm}| \neq const \end{cases}, \\
V_{lm}(\tau) &= |\mathbf{V}_{lm}| t_l(\tau) \\
\sum_{k=1}^3 [V_{tk}^2(u) + V_{nk}^2(u)] &= \sum_{k=1}^3 [V_{tk}^2(u) + V_{k\text{Im}}^2(u)] = |\mathbf{V}|^2
\end{aligned}$$

Тангенциальное ускорение определяется по формуле

$$w_t = d\sqrt{\sum_{k=1}^3 [V_{tk}^2(t) + V_{nk}^2(t)]} / dt.$$

Направление скоростей  $\Delta V_{il}, \Delta V_{nl}$  ортогонально и их сумма приводит к приращению модуля скорости движения

$$\sum_{l=1}^3 (dV_l)^2 = \sum_{l=1}^3 [(dV_{il})^2 + (dV_{nl})^2] = \sum_{l=1}^3 |dV_{il} + idV_{nl}|^2, \quad \text{так как}$$

$$\sum_{l=1}^3 (w_l)^2 = \sum_{l=1}^3 [(w_{il})^2 + (w_{nl})^2].$$

Дифференцируемые по времени компоненты этих проекций определяют тангенциальное и нормальное ускорение. При этом вводится понятие тангенциальной и нормальной скорости, которые в

декартовом пространстве не ортогональны  $(\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_l) \neq 0$ , но в шестимерном комплексном пространстве ортогональны и их модуль комплексного вектора  $V_l = V_{tl} + iV_{nl}$  равен

$$\sum_{l=1}^3 |V_l|^2 = \sum_{l=1}^3 [(V_{tl})^2 + (V_{nl})^2] = \sum_{l=1}^3 |V_{tl} + iV_{nl}|^2$$

Это доказывается представлением  $\mathbf{V}_t = \sum_{l=1}^3 V_{tl} \mathbf{e}_{tl}$ ,  $\mathbf{V}_n = \sum_{l=1}^3 V_{nl} \mathbf{e}_{nl}$  и вычислением модуля как произведения комплексно сопряженных векторов с учетом ортогональности шести действительных ортов.

Итак, получено решение уравнений Навье – Стокса в случае не кратных положений равновесия. Оно имеет вид

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n(t) \varphi_n(\mathbf{r})$$

$$\sum_{s=1}^S \lambda_l^s \ln(x_l - a_l^s) \Big|_{t_0}^t = H_l(t, t_0), l = 1, \dots, 2N$$

$$\lambda_l^s = 1 / [(a_l^s - a_l^1) \dots (a_l^s - a_l^{s-1}) (a_l^s - a_l^{s+1}) \dots (a_l^s - a_l^S)]$$

Где величины  $a_l^s$  координаты положения равновесия.

Ламинарное решение соответствует координатам положения равновесия, структура турбулентного решения имеет вид

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_{nk}}{g(t) - g_{nk}(t_n)} \varphi_n(\mathbf{r}) + \mathbf{a}^s$$

Где  $g_{nk}(t)$  известная определенная непрерывная функция, величина  $t_n$  определится из начальных условий, причем  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ . Причем решение содержит множество полюсов, которые для действительного решения при действительных начальных данных приводят к бесконечности.

#### 4. Физический смысл точного решения

Итак, в случае турбулентного решения, соответствующего комплексным координатам положения равновесия, имеем решение

$$x_l = \alpha_l^s + \beta_l^s \tan D(t).$$

Причем это решение имеет особенность при условии  $D(t) = \pi(k + 1/2)$ . Решение в виде тангенса имеет вид

$$\begin{aligned} x_l &= \alpha_l^s + \beta_l^s \tan[D(H_l) - i0] = \\ &= \alpha_l^s + \beta_l^s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{D(t) - \pi(k + 1/2) - i0} - \frac{1}{D(t) - \pi(k + 1/2) + i0} \right] / 2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1}{D(t) - \pi(k + 1/2) - i0} + \frac{1}{D(t) - \pi(k + 1/2) + i0} \right] / 2 + \right. \\ &\quad \left. + Vp \left[ \frac{1}{D(t) - \pi(k + 1/2)} \right] \right\} = \alpha_l^s + \pi i \beta_l^s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[D(t) - \pi(k + 1/2)] \end{aligned}$$

Т.е. образуется мнимый импульс среды. Мнимость скорости означает вращение или колебание потока, образуется вихрь потока, который через время

$$\Delta D(t) = \pi \frac{2\lambda_{iml}^s}{1 - 2\lambda_{iml}^s - \beta_l^s (2\lambda_{iml}^s)^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^S (a_l^s - a_l^k)} \quad \text{будет уничтожен, так как}$$

определяется среднеквадратичным отклонением. И таких вихрей существует счетное количество. Но как усреднить эти вихри. Нужно перейти к вероятностной трактовке описания. Т.е. усреднить мнимую часть по периоду

$$D(H_l^k) - \pi(k + 1/2) = -\pi(k + 1/2) - H_l^k [1 - 2\lambda_{iml}^s - \beta_l^s (2\lambda_{iml}^s)^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^S (a_l^s - a_l^k)] / 2\lambda_{iml}^s + const$$

получим согласно формуле (2.9)

$$x_l - \alpha_l^s = i\pi\beta_l^s / \dot{D}_l(H_l^k) = -i\pi\beta_l^s \frac{2\lambda_{iml}^s}{1 - 2\lambda_{iml}^s - \beta_l^s (2\lambda_{iml}^s)^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^S (a_l^s - a_l^k)}; \quad (4.1)$$

$$\lambda_l^s = 1 / [(a_l^s - a_l^1) \dots (a_l^s - a_l^{s-1}) (a_l^s - a_l^{s+1}) \dots (a_l^s - a_l^S)]$$

локальное комплексное, среднее решение. Для получения глобального среднего, надо усреднить по величине  $k$  из равенства  $D(H_l^k) = \pi(k + 1/2)$ , получим  $\langle x_l \rangle - \alpha_l^s = i\beta_l^s \sum_{k=-N}^N \langle 1/\dot{D}_l(H_l^k) \rangle / (2N + 1)$ . Получится комплексная скорость, мнимая часть которой определена с точностью до множителя. Действительная часть комплексной скорости соответствует среднему значению скорости, а мнимая часть ее среднеквадратичному отклонению.

Этот множитель  $\gamma_l$  зависит от степени шероховатости поверхности, и пока определяется из численного эксперимента. Для круглого гладкого трубопровода как показал численный эксперимент, он равен  $\gamma_l = 1$ . При этом у гладкого трубопровода имеется постоянный, минимальный, средний модуль тангенса наклона шероховатости, равный величине  $\tan \alpha = 1/R_{cr} = 1/2300$ , связанный с молекулярной шероховатостью. При этом используется один член ряда, определяющий скорость потока. Вычислим это значение для одного члена ряда в случае гладкой поверхности

$$\begin{aligned} & [D_l(H_l^k) - \pi(k + 1/2)] / \gamma_l = [const - \pi(k + 1/2) - \\ & - H_l^k [1 - 2\lambda_{iml}^s - \beta_l^s (2\lambda_{iml}^s)^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^S (a_l^s - a_l^k)] / 2\lambda_{iml}^s] / \gamma_l; \\ \langle 1/\dot{D}_l(H_l^k) \rangle = & - \frac{2\lambda_{iml}^s}{1 - 2\lambda_{iml}^s - \beta_l^s (2\lambda_{iml}^s)^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^S (a_l^s - a_l^k)} \end{aligned}$$

Отметим, что для одного члена ряда имеем  $\lambda_{iml}^s = -1/2\beta_l^s$ , произведение равно единице и значит знаменатель равен единице. Период повторения импульса

равен  $\pi \frac{2\lambda_{im}^s}{1 - 2\lambda_{im}^s - \beta_l^s (2\lambda_{im}^s)^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^S (a_l^s - a_l^k)}$ . Вклад в среднее значение мнимой

части равен квадратному корню из мнимой части с сокращающимися

$$\pi \frac{2\lambda_{im}^s}{1 - 2\lambda_{im}^s - \beta_l^s (2\lambda_{im}^s)^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^S (a_l^s - a_l^k)}$$
 множителем, равным периоду, получим

$$\langle x_l \rangle = \alpha_l^s \pm i\beta_l^s.$$

Учтем переменный знак мнимой части используя квадратный корень из мнимой части и с ведем поправочный коэффициент  $\gamma_l$

$$\langle x_l \rangle = \alpha_l^s \pm i\sqrt{\beta_l^s \gamma_l};$$

При этом модуль среднего значения, определяющий действительное решение, равен,  $|\langle x_l \rangle| = \sqrt{(\alpha_l^s)^2 + \beta_l^s \gamma_l^2}$ , где координаты положения равновесия и время безразмерны и определяем ветвь  $\beta_l^s > 0$ , так как из нее вычисляем квадратный корень. Таким образом, среднее решение определится однозначно.

Это значение  $\gamma_l$  точно соответствует экспериментальной формуле для трубопровода с круглым сечением, если учесть шероховатость решения. При этом  $H_l^k$  умножается на величину  $[\frac{2}{1 + kR_{cr}/l}]^\sigma$ . При постоянной средней высоте шероховатости коэффициент  $l/k$  определяется по сложной формуле (1.1.4).

Комплексное решение при действительном времени и комплексных начальных условиях, определяющих значение  $t_n$ , конечно.

При этом формула

$$\sum_{s=1}^S \lambda_l^s \ln(x_l - a_l^s) \Big|_{t_0}^t = H_l(t, t_0), l = 1, \dots, 2N. \quad (4.2)$$

Может содержать точки ветвления, в которых решение непрерывным образом переходит в другую ветвь решения. Это не противоречит теореме единственности решения задачи Коши, так как левая часть дифференциального уравнения стремится в точке ветвления к бесконечности. Производная от правой части обыкновенного дифференциального уравнения также стремится в



точке ветвления к бесконечности. Получается точка не продолжаемого решения. Но это решение можно продолжить с помощью формулы (4.2).

Ситуация аналогична уравнению Шредингера, когда имеется в общем случае счетное количество решений. Это не удивительно, ведь уравнение Шредингера сводится к уравнению Навье – Стокса. Докажем это. Для чего запишем уравнение Шредингера и преобразуем его воспользовавшись

$$\text{тождеством } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_l^2} = \psi \left[ \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x_l^2} + \frac{1}{\psi^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_l} \right)^2 \right]$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_l^2} + U\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi \sum_{l=1}^3 \left[ \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x_l^2} + \frac{1}{\psi^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_l} \right)^2 \right] + U\psi .$$

Разделив на массу  $m\psi$ , получим уравнение

$$i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \ln \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m^2} \sum_{l=1}^3 \left( \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_l} \right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m^2} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x_l^2} + U/m .$$

Получим уравнение в частных производных, взяв градиент от обеих частей уравнения, введем действительную скорость по формуле  $\mathbf{V} = -i \frac{\hbar}{m} \nabla \ln \psi$ .

$$\frac{\partial i \frac{\hbar}{m} \nabla \ln \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{m^2} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_l} \frac{\partial \nabla \ln \psi}{\partial x_l} = \frac{i\hbar}{2m} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 i \frac{\hbar}{m} \nabla \ln \psi}{\partial x_l^2} + \nabla U/m$$

Подставляя значение скорости в преобразованное уравнение Шредингера,

получим

$$\frac{\partial V_p}{\partial t} + \sum_{l=1}^3 V_l \frac{\partial V_p}{\partial x_l} = v \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 V_p}{\partial x_l^2} - \frac{\partial U}{\partial x^p} / m, v = \frac{i\hbar}{2m} .$$

Получим трехмерное уравнение Навье – Стокса с давлением, соответствующим потенциалу. Но задача гидродинамики отличается от уравнения Навье – Стокса, полученного из уравнения Шредингера, уравнением неразрывности.

При этом можно провести аналогию между ламинарным однозначным режимом и классическим однозначным описанием тел. Между турбулентным режимом, имеющим счетное количество решений и квантовым описанием частиц, имеющих счетное количество решений. В случае турбулентного комплексного и ламинарного действительного режима между ними имеется граница, критическое число Рейнольдса. Аналогичная граница имеется между классическим и квантовым описанием частиц, соответствующая переходу энергии состояния из отрицательного в положительное состояние. В свою очередь уравнение Навье – Стокса должно иметь дискретные уровни энергии состояния турбулентного потока, должны реализовываться переходы между этими состояниями с выделением энергии или поглощением энергии.

Границу между классическим описанием частиц и квантовым можно провести, это переход к комплексному квантовому числу, или бесконечности главного квантового числа атома водорода. При этом бесконечное квантовое число атома водорода через нулевое значение выражения  $1/n^2$ , где  $n$  главное квантовое число, становится мнимым, непрерывным. Ламинарному решению задачи гидродинамики, при котором имеется однозначное решение, соответствует волновая функция свободного движения, которая однозначна, при непрерывной энергии. Причем при большом квантовом числе система является квазиклассической, т.е. близко к граничному квантовому числу, равному бесконечности, система почти классическая.

Причем имеется граница, между свободным решением, и решением, описывающим связанные состояния. Это нулевое значение энергии, как и в нелинейных уравнениях в частных производных, существует граница между

турбулентным комплексным решением и ламинарным действительным решением.

### 5. Сравнение с существующими формулами

Существует формула, выведенная Колмогоровым А.Н. об изменении скорости потока жидкости в турбулентном потоке. Покажем, что частный случай модуля комплексной скорости, описывает это изменение скорости.

Скорость потока в турбулентном режиме описывается формулой см. [10], [11], [12]

$$R = R_{cr} - i\sqrt{T/\alpha - R_{cr}^2} \beta; T = \frac{p_2 - p_1}{\rho v^2} \frac{d^3 R_{cr}}{L}. \quad (5.1)$$

Где величина  $\beta = \{2/[\delta R_{cr}/l + 1]\}^{3/8}$ , коэффициент  $\delta/l$  учитывает влияние шероховатости и равен модулю тангенса среднего наклона шероховатости. Докажем, что при условии  $\beta = 1$  (средний модуль тангенса наклона шероховатости равен обратной величине критического числа Рейнольдса) модуль этой формулы переходит в формулу Колмогорова.

$$|R| = \sqrt{T/\alpha}$$

Существует формула выведенная Колмогоровым А.Н. о изменении скорости потока жидкости на расстоянии  $\lambda$  см. [8] §33

$$V_\lambda = (\varepsilon \lambda)^{1/3} = \left(\frac{E}{m} \omega \lambda\right)^{1/3}$$

Покажем, что модуль комплексной скорости турбулентного потока описывает это изменение скорости

$$T = \frac{ER_{cr}}{m v^2} \lambda^2$$

Минимальный размер турбулентного потока описывается формулой  $\lambda = \frac{d}{\sqrt{L/d}}$ .

Кинематическая турбулентная вязкость описывается формулой  $\nu_{tur} = \nu / \beta^2 = V_\lambda \lambda$ .

Отношение разности давления к плотности, равно энергии на единицу масса

$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{E}{m}$ . Подсчитаем формулу для изменения скорости потока жидкости на

расстоянии  $\lambda$

$$\frac{V_\lambda \lambda}{\nu} = \sqrt{T / \alpha} \beta = \sqrt{\frac{\varepsilon R_{cr} \lambda^2}{\omega \alpha \nu^2}} \beta, \omega = \frac{\nu}{\lambda^2}$$

Откуда получаем формулу  $V_\lambda = \sqrt{\frac{\varepsilon R_{cr} \lambda^2}{\nu \alpha}} \beta$ . Подставляя значение кинематической

вязкости турбулентного потока  $\nu_{tur} = V_\lambda \lambda$ , получаем формулу Колмогорова с учетом правильного множителя

$$V_\lambda = (\varepsilon \lambda R_{cr} / \alpha)^{1/3}. \quad (5.2)$$

Заметим, что на основе этой формулы можно вывести все следующие соотношения см. [8] §33. Так как данная формула (5.2) получена из общей формулы (5.1), она определяет скорость потока при одной степени шероховатости.

## 6. По поводу логарифмического профиля скорости в турбулентном режиме

Дана оценка формулы логарифмического профиля турбулентного режима в зависимости от расстояния от стенки. На первых этапах развития описания турбулентного потока эта формула имела смысл. Но с появлением комплексного решения и его пересчета в действительную плоскость формула логарифмического профиля перестала быть необходимой. Она плохо поддается единому описанию турбулентного и ламинарного режима, хотя бы потому, что не описывает поток на поверхности трубопровода. Существует универсальное значение средней скорости потока, но колеблющийся член, равный нулю при

усреднении, надо учитывать. При вычислении коэффициента сопротивления турбулентного потока используется модуль комплексной скорости.

Ламинарный режим течения описывается параболическим профилем течения по формуле см. раздел 1.1

$$R = (R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8})(1 - r^2/a^2) = \frac{T}{16R_{cr}}(1 - r^2/a^2) \quad (6.1)$$

Турбулентный профиль течения в комплексной форме определяется по формуле

$$R = (R_{cr} - i\sqrt{T/8 - R_{cr}^2}\beta)(1 - r^2/a^2); T = \frac{(p_2 - p_1)d^3 R_{cr}}{\rho v^2 L} \quad (6.2)$$

Где величина  $\beta$  описывает степень шероховатости стенок трубопровода см. раздел 1.1. Формулы двух режимов должны переходить одна в другую непрерывным образом, как и графики коэффициента сопротивления, измеренные Никурадзе. Для этого необходимо, чтобы опорные функции  $1 - r^2/a^2$  для турбулентного и ламинарного режима были одинаковые, тогда и коэффициенты перед опорными функциями будут непрерывные. Так как опорную функцию ламинарного решения можно определить аналитически, значит ее и надо использовать в турбулентном режиме. Если же решения задается в виде ряда, то его коэффициенты в ламинарном и турбулентном режиме надо считать по одинаковому алгоритму. Получается, что использование логарифмического профиля в турбулентном режиме невозможно.

В действительной форме турбулентный профиль скорости имеет вид

$$\text{Re } R = R_{cr}(1 - r^2/a^2) + \sqrt{T/4 - 2R_{cr}^2}\beta(1 - r^2/a^2) \sin[\sqrt{T/8 - R_{cr}^2}\beta(1 - r^2/a^2)tv/a^2 + \varphi] \quad (6.3)$$

Имеется формула для логарифмического профиля скорости турбулентного потока жидкости  $u = u_* f(R); R = yu_* / \nu$ . Но при подстановке значения скорости со звездочкой, эта формула описывает единую формулу для числа Рейнольдса турбулентного потока  $\frac{uy_0}{\nu} = f\left(\frac{y}{y_0}\right) = A \ln\left(\frac{y}{y_0}\right); u_* = \nu / y_0$ . Это была интуитивная

гениальная догадка Прандтля о существовании универсальной средней скорости турбулентного потока. Но число Рейнольдса в этой формуле определено неправильно, характерный размер не учтен. Правильная формула

$$Re = \frac{ua}{\nu} = \frac{a}{y_0} f\left(\frac{y}{y_0}\right) = A \frac{a}{y_0} \ln\left(\frac{y}{y_0}\right), \text{ где величина } y_0 = \nu \sqrt{\rho} / \sqrt{\sigma}.$$

Тогда формула для скорости приобретает вид  $u = \sqrt{\frac{a\Delta p}{2\chi^2 \rho L}} \ln\left(\frac{a}{\nu} \sqrt{\frac{a\Delta p}{2\rho L}}\right)$ , которая сводится к формуле

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.88 \ln(R\sqrt{\lambda}) - 0.88, \lambda = \frac{2a\Delta p / L}{\rho u^2 / 2}; R = \frac{2au}{\nu}.$$

При этом переменное расстояние до стенок заменено на радиус трубопровода. Но вычисленный по этой эмпирической формуле коэффициент сопротивления не описывает переходную область между турбулентным и ламинарным режимом и не учитывает степень шероховатости. Кроме того, она получена из универсальной формулы, которая на самом деле не универсальная, так как зависит от переменных параметров  $y_0, A$ . Универсальная формула получена ниже по тексту. Причем эта формула справедлива для разности двух значений скорости, на разном расстоянии до поверхности трубопровода, но при использовании разного коэффициента пропорциональности. Абсолютное значение универсальной средней скорости турбулентного потока описывает формула  $Re R = R_{cr} (1 - r^2 / a^2)$ .

Формула логарифмического профиля скорости не основана на решении уравнения Навье-Стокса, не содержит дополнительного колеблющегося члена, не содержит переход от ламинарного течения к турбулентному см. раздел 1.1 и является не правильной. Когда не существовало комплексного описания турбулентного потока, эта формула имела какой-то смысл аппроксимации

турбулентного потока на отдельных участках с разными коэффициентами на разных участках. Но с развитием комплексного описания турбулентного потока и следующим шагом, описания физического смысла мнимой части потребность в эмпирических формулах отпала. Существуют разновидности этой формулы

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = 1.74 - 2 \lg \left( \frac{k_s}{R} + \frac{1}{\text{Re } c_f} \right),$$

где используется отношение высоты шероховатости к радиусу трубопровода, число Рейнольдса потока и коэффициент сопротивления. Но и они плохо описывают графики Никурадзе зависимости коэффициента сопротивления от степени шероховатости и числа Рейнольдса потока, определяя почти постоянное значение коэффициента сопротивления, без учета переходной области между ламинарным и турбулентным потоком. График этой функции с этими коэффициентами правильно описывает коэффициент сопротивления на бесконечности давления или числа Рейнольдса, но не более того. Предлагаемая формула описывает степень шероховатости и правильное значение коэффициента сопротивления  $c_f$  на интервале от конечного числа Рейнольдса до бесконечности числа Рейнольдса см. раздел 1.1.

Идея универсальности средней скорости в турбулентном режиме правильная, при усреднении формулы (6.3) получается универсальная формула средней скорости при турбулентном режиме  $\text{Re } R = R_{cr}(1 - r^2/a^2)$ . Но формула (6.3) содержит дополнительный член, описывающий колебание скорости в турбулентном потоке. При подсчете коэффициента сопротивления, его величина описывается модулем скорости и квадрат значения члена, изменяющегося по синусу надо учитывать. Действительно разность двух значений скорости потока на разных расстояниях от поверхности трубопровода можно описать логарифмическим профилем, но эта разность соответствует параболической формуле.

Решение уравнения Шредингера, соответствующее универсальной функции, описывающей скорость турбулентного режима равно

$$\psi = \exp[iR_{cr} \int_0^r (1 - r^2/a^2) dr/a] / r = \exp[iR_{cr}(r/a - r^3/3a^3)] / r = \exp[i(\xi R_{cr}^{2/3} - \xi^3/3)] R_{cr}^{1/3} / a \xi;$$

$$r = a \xi / R_{cr}^{1/3}; \int_0^\infty \psi \xi d\xi = R_{cr}^{1/3} \Phi(R_{cr}^{2/3}) / a; \Phi = \int_0^\infty \exp[i(\xi R_{cr}^{2/3} - \xi^3/3)] d\xi$$

Нормированная волновая функция соответствующая турбулентному режиму равна  $\varphi(\xi) = \frac{\exp[i(\xi R_{cr}^{2/3} - \xi^3/3)]}{\xi \Phi(R_{cr}^{2/3})}$ . Причем функций Эйри  $\Phi$  соответствует

напряженности постоянного поля, действующего на частицу, создавая линейный потенциал см. [13] §24. Данная волновая функция связана с координатой напряженности постоянного единого электромагнитного, звукового или гравитационного поля. Имеем соотношение для произвольной координаты, которая определяет собственную энергию турбулентного процесса  $E = R_{cr}^{2/3} F[(\frac{\hbar^2}{2\pi F})^{1/3} - r] \delta(r - r_0)$ , что соответствует огромной отрицательной энергии в континууме точек.

В гидродинамике существовали формулы, которые описывали частные случаи турбулентного потока, причем они являются частным случаем комплексного решения. Частный случай модуля комплексной скорости при одной степени шероховатости является формулы, выведенная Колмогоровым А.Н.  $V_\lambda = (\varepsilon \lambda)^{1/3}$  см. вывод из комплексного решения этой формулы в раздел 5.

Логарифмический профиль приближенно описывает среднее от разности двух турбулентных скоростей и экстраполируется на использование вычисления среднего от турбулентной скорости с разными константами. Получена точная формула среднего значения универсального турбулентного профиля, справедливая для круглого трубопровода. Причем эта формула обобщается на среднее значение для произвольного тела или трубопровода.



Для демонстрации свойств турбулентного режима приведен график описания ламинарной и турбулентной, средней скорости для турбулентного процесса при одинаковом давлении. Этот график соответствует свойствам средней скорости турбулентного режима.

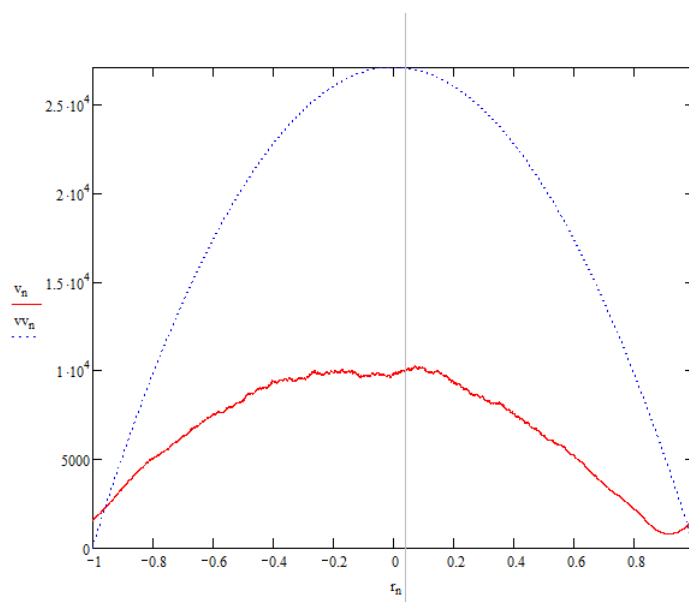


Рис.1 Красным обозначена скорость турбулентного потока, синим цветом ламинарного при одинаковом внешнем давлении.

График скорости потока в зависимости от радиуса получен при усреднении действительного числа Рейнольдса в турбулентном режиме. При большом числе Рейнольдса, когда мнимая часть велика профиль турбулентной скорости более пологий при одинаковом давлении. Но это не реалистичная картина, при каждом значении давления получается либо ламинарный, либо турбулентный режим, вместе они не совместимы. Просто подставлено значение давления, удовлетворяющего условиям турбулентного режима, в формулу для ламинарного режима, линейного по давлению и в формулу для турбулентного режима. Ошибка в правой части графика турбулентного режима связана с неточностью программы вычисления на алгоритмическом языке Mathcad средней скорости потока. График должен получиться симметричным.

Построим график двух универсальных средних решений – параболического и логарифмического. Как видно из графика профиль скорости потока отличается. Моделируются две функции – параболическая  $Re R = R_{cr}(1 - r^2 / a^2)$  и логарифмическая

$$Re R = [2.5 \ln \frac{a-r}{0.01a} + 5.1] 100; \frac{a}{y_0} = 100; r \in [0, 0.99]a.$$

Причем если у параболической функции все параметры известные, то у логарифмической функции параметры неизвестные, их надо подбирать из эксперимента, т.е. это не универсальная функция.

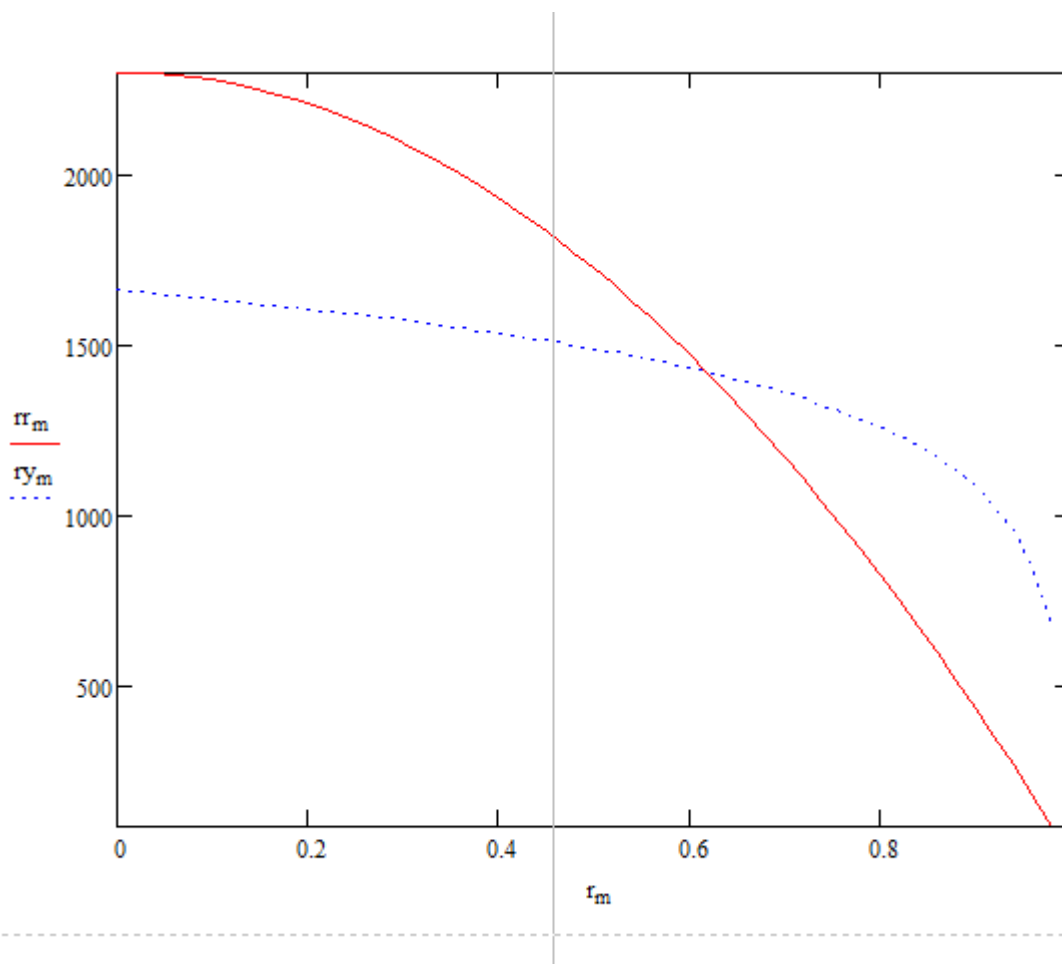


Рис. 2 График средней скорости течения параболического профиля – красного цвета и синего - логарифмического

## Список литературы

1. *А.С. Монин, А.М. Яглом* Статистическая гидромеханика Механика турбулентности Часть 1. М.: «Наука», 1965, -640с.
2. *Г. Шлихтинг* Теория пограничного слоя М.: «Наука», 1974, -713с.
3. *Е.Г. Якубовский* Комплексные ограниченные решения уравнений в частных производных. Материалы международной научно-практической конференции. Теоретические и практические аспекты естественных и математических наук. Новосибирск: Изд. «Сибак», 2012, с. 19-30. [www.sibac.info](http://www.sibac.info)  
<http://sibac.info/index.php/2009-07-01-10-21-16/5809-2013-01-17-07-57-12>
4. *Е.Г. Якубовский* Модель комплексного пространства Материалы XIII международной научно-практической конференции, Т.1 М.: «Институт стратегических исследований», изд. «Спецкнига», - 2014, 26-32с.
5. *Е. Г. Якубовский* Модель комплексного пространства и распознавание образов. На стыке наук. Физико-химическая серия. Т.2, Казань, - 2014, стр. 186-187.  
<http://istina.msu.ru/media/publications/article/211/bd0/6068343/raspoznavobrazovwithouteqution.pdf>
6. Yakubovski E.G. DETERMINATION OF COEFFICIENT OF RESISTANCE ROUND PIPE. THE DEVELOPMENT OF SCIENCE IN THE 21ST CENTURY: NATURAL AND TECHNICAL SCIENCES 2015, 10 p. DOI: 10.17809/06(2015)-14
7. *Ч. Киттель* Введение в физику твердого тела, М.: «Наука», 1978, с. 789
8. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц* Гидродинамика. -М.: Наука, 1980.-535с.
9. Якубовский Е.Г. Преобразование произвольного тела в сферу комплексного радиуса. «Энциклопедический фонд России», 2017, 18 страниц,  
<http://russika.ru/sa.php?s=1266>

10. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION I. THE GENERAL SOLUTION OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 60-66. <https://world-science.ru/pdf/2016/3/14.pdf>
11. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION II. THE USE OF LAMINAR SOLUTIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 67-83. <https://world-science.ru/pdf/2016/3/15.pdf>
12. YAKUBOVSKIY, E. G. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION III. THE PHYSICAL SENSE OF THE COMPLEX VELOCITY AND CONCLUSIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 84-87. <https://www.world-science.ru/pdf/2016/3/16.pdf>
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. т.III, Наука, М.,1989,768с.