Новые точные решения уравнения Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в случае произвольного звездного тела

Якубовский Е.Г.
e-mail yakubovski@rambler.ru

Отметим, что в случае вязкой несжимаемой жидкости равный нулю ротор скорости определяет решение уравнения Навье-Стокса см. [1] §15 формула (15.10). В случае вязкого потенциального течения ротор равен нулю, т.е. определяется решение. Задавая потенциал в виде ряда по сферическим функциям получаем описание вязкой несжимаемой жидкости. Коэффициенты этого ряда определятся по скорости тела и его заданной форме, причем в общем случае зависят от радиуса и двух углов. В случае сферы имеется зависимость от одного угла. Данная теория позволяет описывать скорость вязкой среды вокруг сложного двигающегося тела, как турбулентную, так и ламинарную. В частности, определено колебание вязкой жидкости в оболочке при изменении скорости оболочки.

Применим метод использования потенциалов, к решению уравнения Навье-Стокса. Допустим, задается произвольное значение потенциала, которое определит несжимаемое решение уравнения Навье-Стокса и по нему определяем скорость по формуле

$$V_k = \nu \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \qquad (1)$$

Но потенциал надо определять в виде ряда со сферическими функциями, тогда он будет определять несжимаемую жидкость, и так как ротор скорости равен нулю, определять потенциальное решение уравнения Навье-Стокса.

Давление по значению скорости в случае несжимаемой вязкой жидкости определяется по формуле см. [1] §15 формула (15.11)

$$\Delta p_a = -\rho \frac{\partial V_i}{\partial x_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_i} = -4\pi\lambda_a; p_a = \int_V \frac{\lambda_b}{R_{ab}} dV_b \qquad (2)$$

Тут надо сказать, что давление в уравнении Навье-Стокса в случае несжимаемой жидкости определяемый параметр по скорости, а в данном случае и по потенциалу. Уравнение Навье-Стокса имеет потенциальное решение, построенное по формулам (1) и (2).

Можно задаться потенциалом со сферическими функциями, тогда можно будет описать распределение давления у внешности сложного тела. Можно решить и внутреннею задачу.

$$\varphi = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{a_{nm}}{R^{n+1}} Y_n^m(\cos\theta)\exp(im\varphi) .$$

Этот потенциал описывает вязкую несжимаемую жидкость. Тогда скорости среды будут равны $V_p = \nu \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}$. По скорости тела определятся коэффициенты a_{nm} задавая произвольную звездную формулу тела. Причем в случае сложного тела с изломом получатся комплексные коэффициенты см. [3], и значит турбулентный режим. Турбулентный режим соответствует комплексной скорости, см. [2]. Излом скорости может произойти и вдали от тела, в зависимости от скорости тела, при разложении по сферическим функциям, и это вызовет комплексный турбулентный режим. Чем дальше от тела расположена точка, тем меньше ее скорость. При росте скорости тела далекий излом скорости может оказаться турбулентным. Плотность распределения λ равна $4\pi\lambda = -\rho\nu^2(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_p \partial x_q})^2$. Давление определяется по формуле

$$p(\mathbf{r}_a) = \int_V \rho\nu^2 [\frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{R}_b)}{\partial x_p \partial x_q}]^2 \frac{R_b^2 \sin\theta dR_b d\theta d\varphi}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{R}_b|}; \mathbf{r}_a \neq \mathbf{R}_b .$$

Особенность знаменателя является интегрируемой.

При этом в случае сложного тела с изломом или с изломом скорости, получится комплексное, турбулентное, потенциальное течение. Также комплексное турбулентное решение получается в случае наличия мелких шероховатостей. Тогда радиус сложного тела равен $R_0 = R(\theta,\varphi)\exp(i\alpha), \alpha = <|\tan\xi|>$, где $\tan\xi$ тангенс наклона шероховатостей, причем в ламинарном режиме шероховатости не рассматриваются.

В случае сферы имеем соотношение

$$\nu\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a_{nm}[\frac{(n+1)x_3}{R_0^2}Y_n^m(\cos\theta)\exp(im\varphi) - \frac{\partial Y_n^m(\cos\theta)\exp(im\varphi)}{\partial x^3}] = V_3$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_{(p+2)n}a_n = b_p; A_{(p+2)n} = \frac{2\pi\nu}{R_0}\int_0^{\pi} [(n+1)\cos\theta Y_n^0(\cos\theta) - \frac{\partial Y_n^0(\cos\theta)}{\partial\cos\theta}]Y_p^0(\cos\theta)\sin\theta d\theta;$$

$$b_p = 2\pi V_3\int_0^{\pi} Y_p^0(\cos\theta)\sin\theta d\theta = 2\pi V_3\delta_{p0}$$

$$\varphi = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n R_0^{n+1}}{R^{n+1}} Y_n^0(\cos\theta)$$

Систему координат выберем из условия, что третья координата соответствовала направлению скорости. Коэффициенты ряда оказались действительные. Нужно исследовать формально построенный ряд на наличие изломов. Но коэффициенты ряда имеют порядок $a_{nm} \sim \frac{V_3 R_0}{\nu}/(n+1)$ и при достижении критического числа Рейнольдса наступает турбулентный режим. Ряд Фурье из комплексной экспоненты, при равенстве коэффициентов $1/n$ образует дискретный поток. По-видимому, ряд по сферическим функциям тоже, так как коэффициент при $\exp(im\varphi)$ равен 1/m. Значит реализуется турбулентный режим при большом числе Рейнольдса, несмотря на отсутствие комплексного решения.

Интегрируем действительное дифференциальное уравнение $\frac{dx_k}{dt} = \mathrm{Re}V_k + \mathrm{Im}V_k \sin\mathrm{Im}V_k(t-t_0)/R_0$. Получаем линии тока, причем образуются недоступные для течения области. В этих областях имеем турбулентное дискретное решение, так как уравнение границы этих областей кривые линии и действительное решение уравнения Навье-Стокса в этих областях не доступное. Где введена новая масштабированная угловая переменная $\Phi = 2\pi(\theta - \theta^{\min})/(\theta^{\max} - \theta^{\min})$, где $\theta^{\max}, \theta^{\min}$ - экстремальные значения границ турбулентной зоны. Кроме того, введем масштабированный радиус

$$\ln \rho_0 = \frac{\ln r / a^{\min}(\theta)}{\ln[a^{\max}(\theta)/a^{\min}(\theta)]} 2\pi \,,$$

где $a^{\max}(\theta), a^{\min}(\theta)$ - максимальное и минимальное значение радиуса границы турбулентной зоны. В случае равенства нулю знаменателя, для величины r следует использовать значение $r = \sqrt{a^{\max}(\theta) a^{\min}(\theta)}$. Тогда величина $\ln \rho$ будет непрерывна и в этой точке равна π. Коэффициенты b_{nm} определятся из значений ламинарного решения в пределах границы турбулентной зоны $r = a^{\min}(\theta), r = a^{\max}(\theta)$, где $\theta \in [\theta^{\min}, \theta^{\max}]$. Имеем формулу для скорости

$$V_l = \sum_{n,m=-N}^{N} b_{nml} \exp(in\Phi + im \ln \rho_0) \,. \qquad (3)$$

Причем на границе области $\ln \rho_0 = g(\Phi)$ решение действительное и совпадает с решением на границе. Это нельзя сказать о внутренности области, решение может быть комплексным турбулентным, или действительным ламинарным. Комплексные в случае турбулентного режима, коэффициенты b_{nml} определятся по формуле на границе и будут комплексные, при действительной скорости на границе

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V_l[\ln \rho_0(\Phi), \Phi] \exp[-in\Phi - im \ln \rho_0(\Phi)] d\Phi = \\ = b_{nml} / 4\pi^2 \,.$$

Так как граничные значения в начале и конце периода отличаются и границы области в координатах r, θ не прямоугольные (в координатах $\Phi, \ln \rho$ скорость на границе переменная), ряд будет разрывный и значит, коэффициент b_{nml} убывает при условии $n, m \to \infty$ как $b_{nml} \sim 1/(nm)$, т.е. это дискретное решение.

Дело в том, что решение в координатах r,θ определяет дискретное, но не продолжаемое решение, а в особой области в координатах $\ln\rho,\Phi$ дискретно, в силу дискретности функций $R(\ln\rho_0,\Phi)$ как дискретного ряда. Но так как описание особой области введется относительно координат $\ln\rho_0,\Phi$, особая область является дискретным, образующим либо вихревую дорожку, либо является пульсирующим турбулентным решением.

Формулу (3) можно переписать в виде

$$\sum_{n,m=-N}^{N} b_{nm}\exp(in\Phi + im\ln\rho_0) = \sum_{n,m=0}^{N} A_{nm}\,\mathrm{sgn}(\Phi-\Phi_n^0)\,\mathrm{sgn}(\Phi_n^1-\Phi) \atop \mathrm{sgn}(\ln\rho_0-\ln\rho_m^0)\,\mathrm{sgn}(\ln\rho_m^1-\ln\rho_0), \quad (4)$$

где в данном случае имеем $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ и тогда скачок с амплитудой A_{nm} и фазой $\Phi_n^0,\ln\rho_m^0,\Phi_n^1,\ln\rho_m^1$, определится из уравнений

$$4\pi^2 b_{nm} = \sum_{p,q=1}^{N} A_{pq}\sin[n(\Phi_p^1-\Phi_p^0)/2]\exp[in(\Phi_p^0+\Phi_p^1)/2] \atop \sin[m(\ln\rho_q^1-\ln\rho_q^0)/2]\exp[im(\ln\rho_q^0+\ln\rho_q^1)/2]/(nm),$$

где индексы $n,m=-N,...,-1,1,...,N$.

Отметим, что $A_{00}=b_{00}$. Если ряд, стоящий в левой части (4) непосредственно не суммируется, требуя большого числа членов, то правая часть (4) определит его дискретную сумму при конечном числе членов. Отметим, что

$$\Phi_n^0 + 2\pi p \le \Phi_n \le \Phi_n^1 + 2\pi p, \ln\rho_m^0 + 2\pi q \le \ln\rho_m \le \ln\rho_m^1 + 2\pi q$$

почти периодическая координата скачка.

Почему же турбулентное решение в особой области носит пульсирующий характер? Граница турбулентной области в силу дискретности турбулентного решения не гладкая функция, в отличие от ламинарного решения. Это приводит к неравенству тангенциальных компонент решения и к пульсации границы. Для описания этого течения необходимо ввести зависимость от времени приведенного радиуса

$\ln\rho = [\ln\rho_0 - \omega\cdot t(2\pi-\Phi)\Phi/4\pi^2](\Phi-\pi)/\pi, \omega = 2\pi Sh\dfrac{u_0}{d}$, где величина Sh это число Струхаля. При этом картинка будет колебаться с частотой Струхаля по величине $\ln\rho_0$, что приведет к вращению вихрей в противоположные стороны, так как частоты при условии $\Phi=\pi/2, \Phi=3\pi/2$ имеют разные знаки, т.е. при преобладании в комплексной экспоненте косинуса картина обтекания будет иметь одинаковое вращение при фазе $\Phi=\pi/2, \Phi=3\pi/2$, при преобладании синуса, будет вращение в разные стороны. Это приведет к сложной картине вращения даже для основных гармоник картины обтекания. При этом на границе области частота равна нулю, т.е. решение на границе непрерывно. Это условие будет способствовать устойчивой картине обтекания.

Создадим алгоритм решения внутренней задачи. Внешняя задача получается при движении тела относительно неподвижной жидкости. Аналогично внутренняя задача возникает при движении оболочки с неподвижной жидкостью. Жидкость приходит в движение и ее скорость на стенках равна скорости тела. Но внутри оболочки имеется сложное распределение скорости жидкости, зависящее от формы оболочки. Потенциал задается в виде

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a_{nm}R^nY_n^m(\cos\theta)\exp(im\varphi)$$

Скорость определяется в виде

$$-\nu\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a_{nm}[nR^{n-2}(\theta,\varphi)x_3Y_n^m(\cos\theta)\exp(im\varphi) - R^n(\theta,\varphi)\frac{\partial Y_n^m(\cos\theta)\exp(im\varphi)}{\partial x^3}] = V_3$$

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} A_{pqnm}a_{nm} = b_{pq}; A_{pqnm} = \nu\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[nR^{n-1}(\theta,\varphi)\cos\theta Y_n^m(\cos\theta) -$$

$$-R^{n-1}(\theta,\varphi)\frac{\partial Y_n^m(\cos\theta)}{\partial\cos\theta}]\exp[i(m-q)\varphi]Y_p^q(\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi;$$

$$b_{pq} = V_3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_p^q(\cos\theta)\exp(-iq\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi = V_3\delta_{p0}\delta_{q0}$$

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a_{nm}R^nY_n^m(\cos\theta)\exp(im\varphi)$$

Причем скорость внутри полости изменяется по закону

$$V(R,\theta,\varphi) = -\nu \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_{nm} R^{n-1} [n\cos\theta Y_n^m(\cos\theta) - \frac{\partial Y_n^m(\cos\theta)}{\partial\cos\theta}] \exp(im\varphi)$$
$$a_{nm} = \sum_{p,q=0}^{\infty} A_{nmpq}^{-1} b_{pq} \qquad (5)$$

Скорость колебаний жидкости в оболочке определяется изменившейся скоростью тела. Возникает вопрос, будет ли она под действием вязких сил стремиться к скорости оболочки? Решение уравнения Навье-Стокса определяет изменение скорости жидкости по закону (5) с учетом вязких сил. При этом оболочка и прилегающая к ней жидкость будут двигаться со скоростью V_3. При этом скорость жидкости относительно оболочки изменяется по закону

$$V(R,\theta,\varphi) - V_3 = \nu \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_{nm} [R^{n-1}(\theta,\varphi) - R^{n-1}][n\cos\theta Y_n^m(\cos\theta) - \frac{\partial Y_n^m(\cos\theta)}{\partial\cos\theta}] \exp(im\varphi)$$

Решение для среды пропорционально скорости тела, и является аддитивной величиной относительно скорости тела.

Давление внутри тела соответствует квадрату скорости и приближенно равно $p = \rho V_3^2 R^2 / R^2(\theta,\varphi)$ и вне тела равно $p = \rho V_3^2 R^2(\theta,\varphi) / R^2$. Эта величина не является аддитивной.

Относительная скорость жидкости равна нулю на поверхности оболочки, что происходит внутри оболочки не интересно.

Для получения комплексного турбулентного решения надо перейти в комплексное пространство. Первый шаг – это действительное пространство с мнимой шероховатостью, т.е. введение комплексного радиуса тела, тогда решение - скорость или число Рейнольдса, будет комплексной в действительном пространстве. Следующий шаг, это после получения действительного решения, нужно распространить это решение на комплексную плоскость, получив турбулентное комплексное решение, причем углы определим как действительные, а радиус комплексный $\theta = \arg(z_3 + i\sqrt{z_1^2 + z_2^2}); \varphi = \arg(z_1 + iz_2); R^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

При этом координаты, вернее линии тока, пересчитываются в действительные по формуле

$$\frac{dz_k}{dt} = \mathrm{Re}V_k(z_1, z_2, z_3) + \sqrt{2}i\,\mathrm{Im}V_k(z_1, z_2, z_3)\sin[\mathrm{Im}V_k(z_1, z_2, z_3)(t - t_0)/R_0]$$

$$x_k = \mathrm{Re}\,z_k(t, z_{10}, z_{20}, z_{30}); <|V|^2> = (\mathrm{Re}V)^2 + (\mathrm{Im}V)^2$$

С комплексными начальными условиями.

Исследуются случаи эквивалентности уравнения Шредингера и Навье-Стокса. Так как скорость тела действительная в действительном пространстве гидродинамический потенциал скорости действительный. Связь между двумя решениями определяется из формулы $V_k = \nu \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = -i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial \ln \psi}{\partial x_k}$. Решение уравнения Шредингера равно $\psi = \exp(im\nu\varphi/\hbar) = \exp(-\varphi/2)$.

С другой стороны, всякое решение уравнения Шредингера, является потенциальным решением уравнения Навье-Стокса с той же кинематической вязкостью $\psi = \exp(im\nu\varphi/\hbar) = \exp(-\varphi/2); \nu = i\hbar/2m\nu$, но с переменной плотностью, равной $\psi\psi^*$. Но не всякое потенциальное решение уравнения Навье-Стокса определяет волновую функцию уравнения Шредингера. Широкий класс потенциальных решений уравнения Навье-Стокса получается при дивергенции скорости, равной нулю. При этом уравнение Шредингера не определяет нулевую дивергенцию скорости и решения не эквивалентные. Дело в том, что из решения уравнения Шредингера следует уравнение неразрывности, и оно не определяет нулевую дивергенцию для потенциального решения уравнения Навье-Стокса. Можно конечно построить решение Шредингера с действительной кинематической вязкостью при нулевой дивергенции скорости, но вряд ли оно будет иметь физический смысл. Кроме того, оно получается при использовании модуля волновой функции, как плотности вероятности события, а я проповедую переход к обратной функции, во избежание перенормировок, а при использовании обратной функции дивергенция не равна нулю.

Что можно вычислить, при невыполнении условий эквивалентности? С помощью решения уравнения Навье-Стокса можно построить решение уравнения Шредингера вдоль линии тока, получив зависимость волновой функции и координат от времени и начальных условий. Но получить зависимость волновой функции от координат не удается в этом случае.

Литература

1. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц* Гидродинамика. -М.: Наука, 1980.-535с.
2. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION II. THE USE OF LAMINAR SOLUTIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 67-83.https://world-science.ru/pdf/2016/3/15.pdf
3. Якубовский Е.Г. Вставка комплексного сегмента вместо излома поверхности, позволяющая описывать тело как гладкое «Энциклопедический фонд России», 2018, 6 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1492730026.pdf
4. Якубовский Е.Г. Квантовая механика в комплексном пространстве. «Международный журнал экспериментального образования», №9, часть 2, 2016, стр.255-268 http://www.expeducation.ru/pdf/2016/9-2/10491.pdf