Интервал электромагнитной волны

в анизотропном диэлектрике

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

В случае анизотропного диэлектрика при некоторых значениях начальных данных эйконал не определяется, и значит фазовая скорость не имеет фиксированного значения. Преобразование Лоренца при этом не существует. Это дыра в пространстве-времени, причем возможен перескок в другую точку пространства-времени, аналог кротовой норы в ОТО.

Запишем уравнения Максвелла с учетом тензора диэлектрической и магнитной проницаемости

$$(\mathrm{rot}\mathbf{H})_i = \frac{\varepsilon_i^k}{c}\frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(2.2,a), \mathrm{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho(2.2,b)$$
$$(\mathrm{rot}\mathbf{E})_i = -\frac{\mu_i^k}{c}\frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial t}(2.2,c), \mathrm{div}\mathbf{B} = 0(2.2,d).$$

При этом определим потенциалы по формулам

$$\mathbf{E}_i = -(\mathrm{grad}\,\varphi)_i - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial t}, \mathbf{H}_i = \mu_i^{\mathrm{n}(-1)}\mathrm{rot}\mathbf{A}_n$$

При этом уравнения (2.2,c), (2.2,d) удовлетворяются автоматически.

Подставим значения потенциалов полей уравнения Максвелла в уравнения (2.2,a),(2.2,b), получим

$$(\mathrm{rot}\,\mu^{-1}\mathrm{rot}\mathbf{A})_i = -\frac{\varepsilon_i^n}{c}\frac{\partial[\frac{\partial\varphi}{\partial x^n} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_n}{\partial t}]}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_i, \qquad (2.2.1)$$
$$\frac{\partial}{\partial x^k}\varepsilon_k^i\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \frac{\varepsilon_k^i\partial^2\mathbf{A}_i}{c\partial x^k\partial t} = -4\pi\rho$$

Тогда из первого уравнения получим см. [3],§6

$$\frac{1}{4}E_{ipq}\mu_s^{q(-1)}E^{snm}g^{pk}\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial A_m}{\partial x^n} = \mu_i^{pnm}\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^p\partial x^n} = -\frac{\varepsilon_i^n}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}_n}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_i - \frac{\varepsilon_i^n}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t\partial x^n}.$$

Где E^{snm} антисимметричный тензор. Откуда получаем уравнение

$$\mu_s^{knm}\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^k \partial x^n}+\frac{\varepsilon_s^n}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_n}{\partial t^2}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_s-\frac{\varepsilon_s^n}{c}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x^n}$$

Второе уравнение (2.2.1) имеет вид

$$\varepsilon_k^i\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^k \partial x^i}+\frac{\varepsilon_k^i \partial^2 \mathbf{A}_i}{c \partial x^k \partial t}=\varepsilon_k^i\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^k \partial x^i}+\frac{\partial^2 \mathbf{A}_i}{c \partial x^k \partial t}\right)=-4\pi\rho$$

Используем дополнительное соотношение между потенциалами $\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\varepsilon^{kl}\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial x^k}=0$, получим

$$(\mu_s^{knm}-\varepsilon_s^n \varepsilon^{km})\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^k \partial x^n}+\frac{\varepsilon_s^n}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_n}{\partial t^2}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_s$$

$$\varepsilon_k^i\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^k \partial x^i}+\frac{\partial^2 \varphi}{c^2 \partial t^2}=\varepsilon_k^i\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^k \partial x^i}+\frac{\partial^2 \varphi}{c^2 \partial t^2}=-4\pi\rho$$

Ищем решение в виде

$$A_p(t,x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{3}\exp\{i\omega[t-\tau(x,y,z)]\}g_{p\beta}\times$$
$$\times\{A_{k\beta}(x,y,z)(i\omega\tau_0)^k\lambda(\omega\tau_0)+B_{k\beta}(x,y,z)/(i\omega\tau_0)^{k+\gamma}[1-\lambda(\omega\tau_0)]\}$$
$$\varphi(t,x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{3}\exp\{i\omega[t-\tau(x,y,z)]\}g_{0\beta}\times \qquad . \qquad (2.2.2)$$
$$\times\{C_{k\beta}(x,y,z)(i\omega\tau_0)^k\lambda(\omega\tau_0)+D_{k\beta}(x,y,z)/(i\omega\tau_0)^{k+\gamma}[1-\lambda(\omega\tau_0)]\}$$
$$\lambda(\omega\tau_0)=\frac{\exp(-\omega^2\tau_0^2)}{\exp(-\omega^2\tau_0^2)+\exp[-1/(\omega^2\tau_0^2)]}$$

Отметим, что в случае волновода решение ищется в виде

$$A_p(t,x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{3}\exp\{i\omega[t-\tau(r,\varphi)]+i\omega hz\}g_{p\beta}\times$$
$$\times\{A_{k\beta}(r,\varphi,z)(i\omega\tau_0)^k\lambda(\omega\tau_0)+B_{k\beta}(r,\varphi,z)/(i\omega\tau_0)^{k+\gamma}[1-\lambda(\omega\tau_0)]\}$$

И решение в волноводе не определяется решением уравнения эйконала, а является направленным в одном направлении и, следовательно, фазовая скорость, определенная в волноводе не является решением уравнения эйконала и не может служить скоростью в преобразовании Лоренца. В этом случае фазовая скорость равна

$$(\frac{\partial\tau}{\partial r})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial\tau}{\partial\varphi})^2+h^2=\frac{1}{c_d^2}$$

Получаем уравнение относительно собственных векторов

$$\begin{aligned}&[(\varepsilon_s^n\varepsilon^{km}-\mu_s^{knm})\frac{\partial\tau}{\partial x^k}\frac{\partial\tau}{\partial x^n}-\frac{\varepsilon_s^m}{c_d^2}]g_{m\beta}=0\\&[\varepsilon^{pi}\frac{\partial\tau}{\partial x^p}\frac{\partial\tau}{\partial x^i}-\frac{1}{c_d^2}]g_{0\beta}=0\end{aligned}.$$

Эта система линейных уравнений приводит к определению собственных чисел и собственных векторов из уравнений

$$(B_s^m-\lambda_\beta\delta_s^m)g_{m\beta}=0$$

$$|B_s^m-\lambda_\beta\delta_s^m|=0$$

Чтобы это уравнение имело не нулевое решение, определитель 4 порядка этого уравнения должен равняться нулю, т.е. одно из собственных чисел этой матрицы равно нулю и значит, имеем одно соотношение. Причем имеется 4 варианта равенства нулю разных собственных чисел. Т.е. имеется 4 уравнения по определению фазовой скорости

$$H(\frac{\partial\tau}{\partial x^1},\frac{\partial\tau}{\partial x^2},\frac{\partial\tau}{\partial x^3},\varepsilon_i^m,\mu_s^i)=H(p_1,p_2,p_3,\varepsilon_i^m,\mu_s^i)=0\ .$$

Решая это дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка методом характеристик, получим функцию $\tau=\tau(x_1,x_2,x_3)$. Так как гамильтониан зависит только от импульса, эти координаты являются циклическими и задача решается в квадратурах. Уравнение характеристик будет

$$\frac{dx_l}{dt}=\frac{\partial H(p_1,\ldots,p_3)}{\partial p_l}\qquad\frac{dp_l}{dt}=0,l=1,\ldots,3\qquad(2.2.3)$$

$$\frac{d\tau_\beta}{dt}=\sum_{l=1}^{3}p_l\frac{\partial H}{\partial p_l}.$$

Решение этой задачи можно проинтегрировать и оно имеет вид

$$p_l = p_l^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), l = 1,...,3$$
$$x_l = x_l^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) + \frac{\partial H[p_1^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0),..., p_3^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)]}{\partial p_l}(t - t_0)$$
$$\tau = \tau^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) + \sum_{l=1}^{3} p_l^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \frac{\partial H[p_1^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0),..., p_3^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)]}{\partial p_l}(t - t_0)$$

Для существования и единственности задачи Коши, должны выполняться начальные условия

$$\begin{aligned} x_l &= x_l^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), l = 1,...,3 \\ \tau &= \tau(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \end{aligned}.$$

Гиперповерхность, заданная этим уравнением гладкая, т.е. ранг матрицы $\frac{\partial x_l^0}{\partial \alpha_k^0}, \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_k^0}, \frac{\partial x_l^0}{\partial t^0}, \frac{\partial \tau}{\partial t^0}$ равен 3. Задача Коши ставится для уравнения (2.2.3) такая, что

$$\begin{aligned} \tau[x_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0),..., x_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)] &= \tau_0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \\ \frac{\partial}{\partial x_l}\tau[x_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0),..., x_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)] &= p_l^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \end{aligned}. \qquad (2.2.4)$$

Причем h_0, p_l^0 заданные гладкие функции, $\tau = \tau(x_1, x_2, x_3)$. Для данных Коши должны выполняться два условия согласования

$$\begin{aligned} H[x_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0),..., q_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), p_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0),..., p_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)] = 0 \\ d\tau_0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) = \sum_{l=1}^{N} p_l^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) dx_l^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \end{aligned}.$$

Кроме того, необходимо, чтобы определитель не равнялся нулю

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} & \frac{\partial H}{\partial p_2} & \frac{\partial H}{\partial p_3} & \sum_{l=1}^{3} p_l \frac{\partial H}{\partial p_l} \\ \frac{\partial x_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^9)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^9)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^9)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \tau(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^9)}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial x_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^9)}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial x_2^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^9)}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial x_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^9)}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \tau(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^9)}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial x_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^9)}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial x_2^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^9)}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial x_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^9)}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial \tau(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^9)}{\partial \alpha_3} \end{vmatrix} \neq 0 \;, (2.2.5)$$

Где производные функции H взяты в точке $[x_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0),..., x_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), p_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0),..., p_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)]$. При выполнении этих условий, задача Коши для уравнения (2.2.3) с начальными условиями

(2.2.4) имеет решение в окрестности точки $\alpha_l^0, l=1,...,3$, причем единственное. Т.е. определится связь $x_l = x_l(t,\alpha_1^0,\alpha_2^0,\alpha_3^0), \tau = \tau(t,\alpha_1^0,\alpha_2^0,\alpha_3^0); l=1,..,3$, а если определитель (2.2.5) отличен от нуля, то определяется и обратная функция $t = t(t,x_1,x_2,x_3), \alpha_l^0 = \alpha_l^0(t,x_1,x_2,x_3)$, а с нею и зависимость $\tau = \tau(t,\alpha_1^0,\alpha_2^0,\alpha_3^0) = \tau(t,x_1,x_2,x_3)$.

Если определитель в формуле (2.2.5), равен нулю, и имеем связь между приращениями с равным нулю определителем $\Delta x_l = \frac{\partial x_l}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_1^0}\Delta\alpha_1^0 + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_2^0}\Delta\alpha_2^0 + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_3^0}\Delta\alpha_3^0$, где частные производные вычислены для каждого приращения с помощью теоремы о среднем значении. Т.е. приращение параметров $\Delta t, \Delta\alpha_l^0, l=1,2,3$, при определенных значениях Δx_l зависит от произвольной константы, т.е. решение параметр τ в данной точке имеет много значений, т.е. фазовая скорость имеет континуум значений в данной точке. Существует теорема линейной алгебры, если определитель линейной системы уравнений имеет ранг $N-1$, т.е. равен нулю, то при определенных значениях правой части системы линейных уравнений решение этой системы зависит в частности от одной произвольной константы. Значит преобразование Лоренца в данной точке определено с точностью до произвольной функции, и возможен перескок в другую координату. Для перескока тела конечных размеров определитель должен быть равен нулю не в одной точке, а в области, причем координата перескока определяется по правилу Лопиталя. Происходит деление нулевого определителя на нулевой определитель, и надо подобрать определитель в числителе, чтобы получилась определенная координата. Для перескока в области необходимо добиться равенства ранга определителя (2.2.5) единице при конечном интервале времени t и области пространства x^1, x^2, x^3 внутри анизотропного диэлектрика. Но при этом перескакивающее тело должно двигаться с большой скоростью, иначе будет справедливо преобразование Галилея, которое от фазовой скорости света не зависит.

Интервал при этом равен

$$ds^2 = c_d^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

Но как добиться анизотропных свойств в газообразной среде, анизотропия - это свойство твердого тела. Для этого диэлектрик надо привести в движение, и тогда его свойства будут анизотропными. Но скорость движения должна быть близка к фазовой скорости света.

Имеется еще одна проблема. Достаточно ли свойств анизотропности свойств конечного объема для перескока в другую точку пространства, или необходимо, чтобы все пространство было анизотропным.

Определится время t и координаты поверхности $x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t)$ и так как определитель этой системы нелинейных уравнений, определится счетное количество точек комплексных $\alpha_k^0(t), k = 1,...,3$ для нулевого значения определителя, т.е. до скачка. Причем система линейных уравнений запишется в виде

$$\begin{aligned} \Delta x_l &= \frac{\partial x_l}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_1^0}\Delta\alpha_1^0 + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_2^0}\Delta\alpha_2^0 + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_3^0}\Delta\alpha_3^0 \\ \Delta\tau &= \frac{\partial \tau}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_1^0}\Delta\alpha_1^0 + \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_2^0}\Delta\alpha_2^0 + \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_3^0}\Delta\alpha_3^0 \end{aligned}.$$

Где определитель равняется нулю. Найдем частное решение этого уравнения и запишем систему уравнений относительно приращения к частному решению

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x_l}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_1^0}\Delta\alpha_1^0 + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_2^0}\Delta\alpha_2^0 + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_3^0}\Delta\alpha_3^0 = 0 \\ &\frac{\partial \tau}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_1^0}\Delta\alpha_1^0 + \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_2^0}\Delta\alpha_2^0 + \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_3^0}\Delta\alpha_3^0 = 0 \end{aligned}.$$

Тогда в новых переменных надо приравнивать определитель этой системы уравнений нулю и определять решение с точностью до множителя. Этот множитель определим из равенства нулю определителя этой системы нелинейных уравнений. Получится 4 решения. Но управлять этим выбором невозможно. Решение нелинейного уравнения равноправно определяет корень. Не понятно с какой скоростью будет двигаться замкнутый объем и как ускорение отразится на организмы перемещающихся объектов. В силу отсутствия преобразования Лоренца отсутствуют и свойства пространства-времени, и скачок произойдет мгновенно и без влияния ускорения на организмы.