

Описание комплексных фазовых переходов 1 и 2 рода

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

При описании фазовых переходов 1 и 2 рода количество неизвестных и уравнений отличается. Переход к комплексным переменным позволяет устранить это несоответствие и количество комплексных неизвестных функций совпадает с количеством уравнений. Данная статья взята из книги «Следствие комплексности декартова пространства» Экспериментальная проверка комплексности пространства издательства LAP.

При фазовых переходах второго рода меняется теплоемкость среды, коэффициент расширения, теплопроводность, проводимость и магнитная проницаемость среды в кристаллической решетке за счет изменения эффективной массы см. [1]. Точнее фазовым переходам второго рода соответствует скачкообразное изменение второй производной от удельного термодинамического потенциала. При этом первая производная, равная энтропии и удельному объему $s = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial T}\right)_{P,v} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial P}\right)_T$ является непрерывной.

Испытывает скачок вторая производная $\frac{\partial^2\varphi}{\partial T^2} = -\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P = -\frac{c_p}{T}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial P\partial T} = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$,

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial P^2} = \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$. Т.е. фазовые переходы второго рода сопровождаются

скачкообразным изменением одной или нескольких следующих величин

1. Удельной теплоемкости c_p

2. Температурного коэффициента объемного расширения $\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$

3. Изотермического коэффициента объемного сжатия вещества

$$\gamma = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$$

При этом фазовый переход первого рода соответствует разрыву производных двух фаз действительной части удельного термодинамического потенциала при дифференцировании по комплексному параметру. При этом выделяется тепло, в силу скачкообразного изменения энтропии. Фазовый переход второго рода соответствует разрыву производных двух фаз мнимой части термодинамического потенциала при дифференцировании по комплексному аргументу, причем производная от действительной части термодинамического потенциала непрерывна. Причем производная справа и слева от фазового перехода может существовать, а может и не существовать. При этом действительная часть второй производной испытывает скачок при переходе между фазами. Докажем это. Существует формула дифференцирования по комплексному параметру $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial(x+iy)} = (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})/2$ см. [2]. Значит, вторая

производная по комплексному параметру равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(u+iv)}{\partial(x+iy)^2} &= (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u+iv)/4 = \\ &= [\frac{\partial^2(u+iv)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(u+iv)}{\partial y^2}]/4 - i\frac{\partial^2(u+iv)}{\partial x\partial y}/2 = \\ &= (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})/4 + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}/2 + i[(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2})/4 - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}/2] \end{aligned}$$

Т.е. действительная часть второй производная по комплексному параметру от мнимой части термодинамического потенциала отличается при фазовом переходе. Причем вторая производная в точке фазового перехода стремится к бесконечности, так как первая производная испытывает скачок. При этом вторая производная в точках справа и слева от фазового перехода непрерывна, и в точке фазового перехода термодинамический потенциал непрерывен, первая производная мнимой части испытывает скачок, а вторая производная стремится к бесконечности в точке границы.

Изложим с позиции комплексного фазового перехода 2 рода спонтанную поляризацию сегнетоэлектриков. Так в случае сегнетоэлектрика имеется комплексная формула для термодинамического потенциала см. [3]§19

$$4\pi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{E}} = -\mathbf{E} - 4\pi \mathbf{P}. \quad (1)$$

Где величина определяется по формуле $\mathbf{P} = (\varepsilon - 1 + 4\pi i \sigma / \omega) \mathbf{E}$, где \mathbf{P}, \mathbf{E} мнимые при малой мнимой напряженности поля. Как это доказать. Дивергенция вектора напряженности поля равна плотности внутренних зарядов $\bar{\rho}_v$.

$$4\pi \bar{\rho}_v = \text{div} \mathbf{E}.$$

При этом в диэлектрике при отсутствии внесенных зарядов реализуется

$$\bar{\rho} = -\text{div} \mathbf{P}.$$

При этом вектор \mathbf{P} называется вектором диэлектрической поляризации.

Чтобы записать единым образом закон Кулона для гравитационных масс и зарядов, надо ввести понятие мнимого заряда. Тогда волновые уравнения для потенциалов электромагнитного и гравитационного поля будут аналогичны. Тогда величина диэлектрической поляризации будет мнимой величиной. Кроме того, если расписать формулу для сохранения электрического заряда в квантовой электродинамике $\partial_\mu j^\mu = 0$, то получим мнимый заряд $j^\mu = (\psi^* \gamma^\mu \psi)$, $\mu = 0, \dots, 3$, где величина γ^μ имеет действительное собственное значение при условии $\mu = 0$ и мнимые собственное значение при условии $\mu = 1, \dots, 3$, равных мнимой единице, так как справедливо $(\gamma^\mu)^2 = g^{\mu\mu}$, где $g^{\mu\mu}$ четырехрядная матрица. Матрицы Дирака удовлетворяют условию $(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1; (\gamma^0)^2 = 1$, где справедливо равенство для четырехрядных матриц. Более подробно идея мнимого заряда изложена в книге [4], причем она используется для обобщения уравнений Максвелла.

Дифференцируя формулу (1) по величине напряженности поля вдоль направления поля, где величина a действительная, получим

$$4\pi \frac{\partial^2 \text{Im}\varphi}{\partial E_z^2} = -4\pi \frac{\text{Im}dP_z}{dE_z} = -\text{Im} \frac{i\pi}{a(T_c - T)}.$$

При этом величина $\text{Im}P_z$ меняется скачком в интервале $[-\text{Im}i\sqrt{\frac{(T_c - T)a}{2B}}, \text{Im}i\sqrt{\frac{(T_c - T)a}{2B}}]$, т.е. мнимая часть производной от термодинамического потенциала разрывная величина на фазовом переходе. Мнимая часть вектора поляризации $i\text{Im}P = (\varepsilon - 1)i\text{Im}E$ меняется при фазовом переходе, а действительная часть непрерывна, так как действительная часть – проводимость сегнетоэлектрика равна нулю $\text{Re}\mathbf{P} = -4\pi\sigma/\omega\mathbf{E} = 0$, и значит, действительная часть термодинамического потенциала непрерывна и тепла при фазовом переходе не выделяется. При этом вторая производная от термодинамического потенциала в точке фазового перехода стремится к бесконечности.

При этом происходит фазовый переход второго рода. Совершенно аналогично получается формула для магнетиков, магнитная восприимчивость в точке фазового перехода второго рода стремится к бесконечности, а намагниченность меняется скачком. При этом имеем следующую формулу для намагниченности $M = (\mu' + i\mu'')H$, где величина H мнимая, а намагниченность комплексная.

Скачок первой производной от мнимой части термодинамического потенциала не сопровождается выделением тепла, а изменяется мнимая часть энергии. Если фазовый переход первого рода связан с изменением действительной части расстояния между молекулами и атомами, то фазовый переход второго рода связан с изменением структуры атома, с тем, что расстояние между атомами становятся комплексным.

Для фазового перехода второго рода между двумя фазами необходимо выполнение четырех условий для комплексных термодинамических потенциалов. Два условия равенства действительной и мнимой части комплексных термодинамических потенциалов $\varphi_1(P, T, n_1, n_2) = \varphi_2(P, T, n_1, n_2)$

. Плюс два условия непрерывности действительной части производных, которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_1}{\partial P} + i \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_1}{\partial T} &= v_1(P, T, n_1, n_2) + i s_1(P, T, n_1, n_2) = \\ &= \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_2}{\partial P} + i \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_2}{\partial T} = v_2(P, T, n_1, n_2) + i s_2(P, T, n_1, n_2). \\ \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} &= \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2}, n_1 + n_2 = n \end{aligned}$$

Откуда определяются два комплексных и два действительных безразмерных параметра P, T, n_1, n_2 . При действительных параметрах уравнений больше, чем параметров, уравнения пять при четырех неизвестных. При этом мнимые части термодинамических потенциалов испытывают разрыв. Отметим, что зависимость удельного объема и энтропии от давления, температуры и удельного объема среды, у разных фаз разная и определяется разным видом термодинамического потенциала. Система двух полиномов степени N от двух неизвестных имеет N^2 корней. В случае двух рядов Тейлора от двух переменных имеется счетное количество возможно приближенных корней. Дело в том, что реализовав предельный переход от конечной степени полинома к счетному количеству членов, появляются особенности решения. Уравнение $\exp(z) = 0$ не имеет точных значений корней, но имеет счетное количество приближенных корней $z = -\alpha + 2\pi ki, \alpha \gg 1$.

Причем надо для обеих корней брать одинаковые ветви. Поэтому получится N корней, которые и определяют разные значения давления и температуры. При этом количество комплексных корней определяет количество возможных симметрий кристаллической решетки, между которыми возможны фазовые переходы 2 рода. При этом статистические суммы, определяющие термодинамические потенциалы твердого и жидкого тела, должны строиться с учетом симметрии кристаллической решетки, т.е. с учетом вектора обратной решетки. Жидкость тоже обладает кристаллической решеткой, не в такой степени как твердое тело.

В книге [5] описано вычисление параметров фазового перехода, сводящихся к решению нелинейной системы алгебраических уравнений. При этом не рассматривается комплексное решение нелинейных уравнений, а нелинейные уравнения выбираются такими, чтобы их решение было действительным. Это возможно сделать в силу приближенного характера полученных соотношений. Но при вычислении химических потенциалов интегрируется уравнение для химических потенциалов. Т.е. решение зависит от состояния системы в начальный момент интегрирования, в частности от начального значения химического потенциала, которое задается из вспомогательных предположений, но в общем случае произвольно. Т.е. предлагаемые в книге [5] метод определения параметров фазовых переходов является приближенным.

В случае N фракций находящихся в двух фазах, например жидкой и твердой, имеем уравнения равенства термодинамических потенциалов $\varphi_L^k = \varphi_S^k, k = 1, \dots, N$. Кроме того имеем равенство частных производных

$$\operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_L^k}{\partial P_k} + i \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_L^k}{\partial T_k} = \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_S^k}{\partial P_k} + i \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_S^k}{\partial T_k}, k = 1, \dots, N$$

$$\operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_L^k}{\partial n_{kL}} = \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_S^k}{\partial n_{kS}}; n_{kL} + n_{kS} = n_k$$

Причем величины объема, энтропии и химического потенциала определяются

по формуле $\frac{\partial \varphi_L^k}{\partial P_k} = V^k, \frac{\partial \varphi_L^k}{\partial T_k} = -s^k, \frac{\partial \varphi_L^k}{\partial n_k} = \mu_k$ где величина термодинамического

потенциала определяется по формуле $\varphi = U + pV - Ts$ и имеем термодинамическое соотношение $d\varphi = dU + Vdp - sdT + \mu_k dn_k$.

Установление равновесия идет в два этапа. На первом этапе каждая фракция имеет свою температуру и давление. На втором этапе эти параметры суммируются в температуру и давление смеси. При этом выведено уравнение для термодинамического потенциала и уравнение состояния, связывающее давление, объем и температуру смеси. При этом разные параметры смеси определяются из нелинейного уравнения, которые потом пересчитываются в

однозначные параметры смеси. Имеем $4N$ уравнений при $2N$ комплексных неизвестных $T_1, \dots, T_N, P_1, \dots, P_N$ и $2N$ действительных неизвестных $n_{1L}, \dots, n_{NL}, n_{1S}, \dots, n_{NS}$, являющихся разными температурой и давлением каждой фракции смеси и действительное количество частиц в смеси. Причем вклад каждой фракции суммируется и для давления и температуры смеси имеем $(n_1 + \dots + n_N)P = n_1P_1 + \dots + n_NP_N$,. Температура смеси определяется по формуле $(n_1 + \dots + n_N)T = n_1T_1 + \dots + n_NT_N$ где величина $n_k = n_{kL} + n_{kS}$.

Для трех фаз: жидкой, твердой и газообразной, состоящих каждая из N фракций, имеем $\varphi_L^k = \varphi_S^k, \varphi_L^k = \varphi_G^k, k = 1, \dots, N$ и равенств частных производных

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_L^k}{\partial P_{kL}} + i \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_L^k}{\partial T_k} &= \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_S^k}{\partial P_{kS}} + i \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_S^k}{\partial T_k}, \\ \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_L^k}{\partial P_{kL}} + i \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_L^k}{\partial T_k} &= \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_G^k}{\partial P_{kG}} + i \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_G^k}{\partial T_k}; \\ \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_L^k}{\partial n_{kL}} &= \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_S^k}{\partial n_{kS}}; \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_L^k}{\partial n_{kL}} = \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_G^k}{\partial n_{kG}}; \\ n_{kL} + n_{kG} + n_{kS} &= n_k; k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Имеем $7N$ уравнений при $4N$ комплексных неизвестных $T_1, \dots, T_N, P_{1L}, \dots, P_{NL}, P_{1S}, \dots, P_{NS}, P_{1G}, \dots, P_{NG}$, и $3N$ действительных неизвестных $n_{kL}, n_{kS}, n_{kG}, k = 1, \dots, N$ являющихся температурой, давлением и количеством частиц каждой фракции смеси. Причем для давления и температуры смеси имеем устанавливающуюся температуру и давление на втором этапе фазового перехода

$$\begin{aligned} (n_{1L} + \dots + n_{NL} + n_{1S} + \dots + n_{NS} + n_{1G} + \dots + n_{NG})P &= \\ = n_{1L}P_{1L} + \dots + n_{NL}P_{NL} + n_{1S}P_{1S} + \dots + n_{NS}P_{NS} + n_{1G}P_{1G} + \dots + n_{NG}P_{NG}, \\ (n_1 + \dots + n_N)T &= n_1T_1 + \dots + n_NT_N \end{aligned}$$

где величины $n_k = n_{kL} + n_{kS} + n_{kG}$ количество частиц данного вещества в смеси. При этом значением решения является совокупность корней нелинейной системы уравнений, причем корни не единственные. Причем все решения нелинейной системы уравнений соответствуют определяемым

параметрам давления, температуры и количеству частиц смеси и значит, из уравнения состояния определяется объем фазы. Объем смеси является суммой объема отдельных фаз. Т.е. число степеней свободы определяется количеством корней нелинейной системы уравнений.

Аналогичная ситуация с фазовыми переходами первого рода. Действительные части первых производных испытывают разрыв, соответствующий изменению энтропии и удельного объема с выделением тепла, а мнимые части непрерывны.

При этом физический смысл комплексного решения, это его модуль, который для давления и температуры положителен. Отметим, что эти параметры положительны. Положительность энтропии следует из формулы $S = \ln \Delta\Gamma$, где величина $\Delta\Gamma$, это количество состояний, которое больше единицы, причем в общем случае справедливо для системы с s степенями

свободы $\Delta\Gamma = \frac{\Delta q_1 \dots \Delta q_s \Delta p_1 \dots \Delta p_s}{(2\pi\hbar)^s} > 1$. При этом отрицательное значение

давления и температуры возникает, как разность между двумя положительными значениями давления и температуры.

Рассмотрим уравнение Навье Стокса, уравнение неразрывности и уравнение состояния см. [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^3 V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \Delta V_i + (\zeta / \rho + \nu / 3) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_i \partial x_k}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho V_i}{\partial x_i} &= 0, \quad P = \frac{\rho RT}{\mu}. \end{aligned} \quad (2)$$

Распишем уравнение неразрывности, подставив в него уравнение состояния, тогда уравнения (2) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} &= -\frac{RT}{\mu} \frac{\partial \ln P / P_0}{\partial x_i} + \nu \Delta V_i + \sum_{k=1}^3 (\zeta + \nu / 3) \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_i \partial x_k}, \\ \frac{\partial \ln P / P_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 V_i \frac{\partial \ln P / P_0}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V_i}{\partial x_i} &= 0. \end{aligned}$$

Кроме уравнения неразрывности и уравнения движения, которые образуют замкнутую систему в случае несжимаемой жидкости, в случае сжимаемой жидкости надо использовать и тепловое уравнение, для определения температуры среды, которое имеет вид см. [6]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V^2 / 2 + \rho \varepsilon) = -\operatorname{div}[\rho \mathbf{V}(w + V^2 / 2) - (\mathbf{V}, \vec{\sigma}') - \chi \nabla T]$$

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \operatorname{div}(\chi \nabla T)$$

При этом второе уравнение в случае несжимаемой жидкости запишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right)^2.$$

Где введены коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности $\chi = \eta / \rho c_p$, постоянная η это теплопроводность. Это уравнение при комплексной скорости имеет комплексное значение температуры. Пренебрежение нелинейными членами приводит к действительной температуре.

Причем решать надо это уравнение в комплексной плоскости, с комплексной температурой. Так как температура входит в нелинейный член, ее значение может быть комплексным. Уравнение с линейными членами можно просуммировать с комплексно сопряженным уравнением и мнимая часть уйдет, и получится действительное решение. В случае нелинейного члена такое преобразование невозможно, знак произведения мнимых частей при переходе к комплексно-сопряженному решению не меняется. Т.е. при решении этой нелинейной системы уравнений может получиться комплексное решение. Решать эту систему нелинейных уравнений в частных производных надо с помощью подстановки, например для параметра температура $T = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) \varphi_n(\mathbf{r})$, умножая на величину $\varphi_m(\mathbf{r})$ и интегрируя по пространству. Получится нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно параметра $\alpha_n(t)$. Аналогично

нужно вводить и другие параметры, получая новый переменный коэффициент, причем зависимость от этого коэффициента будет нелинейная. При этом положения равновесия этой системы нелинейных уравнений могут оказаться комплексными. Значит, получится комплексное решение, при действительном решении, стремящемся к бесконечности см. [7], глава 4. Решение обыкновенного дифференциального уравнения с комплексными положениями равновесия имеет зависимость от времени

$$\alpha_n(t) = \sum_k \frac{c_{nk}}{t - t_0 + 2T_n k},$$

причем при комплексных начальных условиях знаменатель полюса не обращается в ноль в силу комплексности t_0 . При действительных начальных условиях решение стремится к бесконечности, т.е. не существует.

Значит, давление, температура, энтропия, плотность и скорость в общем случае комплексные величины. При этом физический смысл давления, температуры, энтропии и плотности - это положительный модуль комплексной величины. Причем отрицательное давление получается в результате вычитания двух положительных давлений. Так, например, если колбу заполнить жидкостью и ее нагревать, причем колба имеет больший коэффициент расширения, чем жидкость, то в колбе в результате воздействия двух противоположно направленных положительных давлений, внутреннего, давления жидкости, и внешнего, давления поверхности колбы, возникнет отрицательное напряжение. При этом положительное давление может иметь разное направление $p\mathbf{n}$, где величина \mathbf{n} определяет направление действия давления на поверхности между двумя жидкостями или жидкостью и твердым телом, как в примере с расширяющейся колбой. Со скоростью дело обстоит сложнее, но можно определить по комплексной скорости ее действительное значение.

Положительной может становиться и диссипирующая энергия, связанная с вязкими силами, по формуле (7.7) глава II из книги [8]

$$E = -\mu \sum_{i,k=1}^3 \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right)^2 = -\mu \sum_{i,k=1}^3 \left[\left(\frac{\partial \operatorname{Re} V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \operatorname{Re} V_k}{\partial x_i} \right)^2 - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial \operatorname{Im} V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \operatorname{Im} V_k}{\partial x_i} \right)^2 + 2i \left(\frac{\partial \operatorname{Re} V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \operatorname{Re} V_k}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \operatorname{Im} V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \operatorname{Im} V_k}{\partial x_i} \right) \right]$$

Эта действительная часть энергии вязкой жидкости может быть равна нулю, или быть положительной, так как скорость величина комплексная. Положительность действительной части энергии диссипации означает передачу энергии от среды к двигающемуся телу. В холодильной машине при расширении газа с совершением работы, причем газ охлаждается, необходима дополнительная энергия, уходящая на сжатие газа, для последующего расширения. В случае двигающего тела, второй фазы нет, газ совершает работу, понижая свою температуру, по движению тела, причем вовлекаются все новые порции воздуха, которые и совершают работу. Т.е. тело, двигаясь с комплексной скоростью, производит охлаждение воздуха. Такое anomальное поведение среды, связанное с передачей энергии из окружающей среды к двигающему в среде телу, возможно при определенной форме тела и его скорости. Этот новый эффект, одно из следствий введения комплексных параметров.

Но только изменение вязкости η приводит к выделению тепла, так как справедлива формула для энергии, связанной с вязкими силами, по формуле (7.7) из книги [8] и изменение вязкости среды приводит к изменению его действительной энергии единицы объема за единицу времени по формуле

$$E = -\eta \left[\sum_{i,k=1}^3 \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Причем величина E это уменьшающаяся за счет выделения тепла энергия твердого тела. Если непосредственно применять эту формулу для вращающегося электрона с учетом вязкости среды, то получим неограниченное уменьшение энергии твердого тела с ростом времени. В случае невязкой среды, волновая функция действительна, потерь энергии на выделение тепла нет, скорость частиц равна нулю по формуле (1.1.2) и нет

неограниченного роста потери энергии на выделение тепла. Но такая интерпретация не справедлива, так как предполагает равную нулю скорость частиц. Поэтому необходимо придумать другую интерпретацию этой формулы. Для этого надо ввести дискретное значение внутренней энергии, соответствующее поглощенной атомом энергии за время a/c , равный уменьшившейся энергии, где величина a характерный размер атома.

Подсчитаем энергию одного кванта ε_{i00} , соответствующего основному состоянию водородоподобного атома, для чего подсчитаем выделенную энергию за время a/c в объеме атома, причем величина волнового числа определяется по формуле $k = mc/\hbar$. Величина $a = \frac{\hbar^2}{me^2} = 137\hbar/mc = 137/k$

берется из табличного значения радиуса атома

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{i00} &= \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E \frac{a}{c} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \\
 &= -\eta c^2 \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sum_{i,k=1}^3 \left(\frac{\partial V_i}{\partial kx_k} + \frac{\partial V_k}{\partial kx_i} \right)^2 \frac{a}{c} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \\
 &= -\frac{\eta c^2}{137^2 a^2} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sum_{i,k=1}^3 \left(\frac{\partial^2 i \ln \psi^* / \psi}{\partial x_i / a \partial x_k / a} \right)^2 \frac{a}{c} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \quad (4) \\
 &= -\frac{\eta c}{137^2 a} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sum_{i,k=1}^3 \left(\frac{\partial^2 i \ln \psi^* / \psi}{\partial x_i / a \partial x_k / a} \right)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \\
 &= -32\pi\eta c a^2 \beta^2 / [137(1 + \beta^2)]^2, \beta = -\frac{4m_{eff} \eta / (\hbar \rho_l)}{1 - [2m_{eff} \eta / (\hbar \rho_l)]^2}
 \end{aligned}$$

При исследовании движения атома, плотность среды равна $\rho_b = \frac{3 \cdot 1836 A m_e}{4\pi a_B^3}$,

где определяется плотность атома, при двигающейся частице с эффективной приведенной массой, приближенно имеющей массу электрона. Используя N число Авогадро, получим добавку к энергии тела $-32N\pi\eta c a^2 \beta^2 / [137(1 + \beta^2)]^2$.

Вычислим интеграл $\int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sum_{i,k=1}^3 \left(\frac{\partial^2 i \ln \psi^* / \psi}{\partial x_i / a \partial x_k / a} \right)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$. Это

действительное изменение модуля градиента скорости вязкой среды при изменении вязкости меняет свою энергию и в случае действительной волновой функции равно нулю. В случае водородоподобного атома величина волновой функции равна

$$\psi_{nlm} = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi) = -\frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^2}} \exp\left(-\frac{r}{an}\right) \left(\frac{2r}{an}\right)^l L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{an}\right) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$R_{10} = 2 \exp(-r/a), R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-r/2a)(1 - r/2a)$$

$$R_{21} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \exp\left(-\frac{r}{2a}\right) \frac{r}{a}, R_{30} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{r}{3a}\right) \left(1 - \frac{2r}{3a} + \frac{2r^2}{27a^2}\right)$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}} \exp\left(-\frac{r}{3a}\right) \frac{r}{a} \left(1 - \frac{r}{6a}\right), R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}} \exp\left(-\frac{r}{3a}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

При этом радиус атома, берется из таблиц. Квант энергии основного состояния атома считается по ниже записанной формуле. Причем используется волновая функция водородоподобного атома с эффективной постоянной Планка

$$\ln \psi_{00}^* / \psi_{00} = -2ri\beta / (1 + \beta^2), \beta = -\frac{4m_{eff} \eta / (\hbar \rho_l)}{1 - [2m_{eff} \eta / (\hbar \rho_l)]^2}$$

$$\ln \psi_{nlm}^* / \psi_{nlm} = -2ri\beta / [n(1 + \beta^2)] + l \ln a / a^* +$$

$$+ 2\gamma_{nl} ri\beta n_r / [(l+1)(n_r + l + 1)(1 + \beta^2)], |\gamma_{nl}| < 1$$

Вычисление коэффициента $n_r / (l+1)$ при добавке к основному члену волновой функции см. [12]. При этом величина потока равна

$$\sum_{i,k=1}^3 \left[\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} i \ln \psi_{00}^* / \psi_{00} \right]^2 = 4 \sum_{i,k=1}^3 \left[\frac{\partial^2 r}{\partial y_i \partial y_k} \beta / (1 + \beta^2) \right]^2 =$$

$$= \sum_{i,k=1}^3 \left(\frac{r^2 \delta_{ik} - x_i x_k}{r^3} \right)^2 \frac{4\beta^2 a^2}{(1 + \beta^2)^2},$$

$$y_i = x_i / a, \beta = -\frac{4m_{eff} \eta / (\hbar \rho_l)}{1 - [2m_{eff} \eta / (\hbar \rho_l)]^2}$$

При этом интеграл равен

$$\int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sum_{i,k=1}^3 \left[\frac{r^2 \delta_{ik} - x_i x_k}{r^3} \right]^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = 8\pi a.$$

При вычислении данного интеграла учтено, что интеграл по углу φ от четной степени синуса и косинуса определяется постоянным значением квадрата синуса или косинуса.

Получив формулу для значения кванта энергии затухания скорости частицы, вычислим значение теплоты парообразования для давления в одну атмосферу для веществ, у которых имеются табличные данные в справочнике [9].

	Радиус атома, в ангстремах	A	η , г/(см сек)	Вычисленная теплота испарения, кДж/моль	Табличная теплота испарения, кДж/моль
Na	1.89	23	0.00728(0.00635)	89.6	89.4
K	2.36	40	0.00473(0.0032)	77.9	77.5
Zn	1.39	67	0.0256(0.018)	114.5	114
Ag	1.44	108	0.0356(0.0298)	253.9	254
Pb	1.75	206	0.02323(0.0257)	179	179.5
Bi	1.82	208	0.0202(0.01662)	157.2	157.5

Энергия пара гораздо меньше энергии жидкости и не учитывается, в связи с малой плотностью. Не учитывается и изменение объема, в связи с малостью члена $p\Delta V$. В скобках указана табличная вязкость материала, а перед скобкой используемая для вычисления вязкость. При этом вязкость материала приведена при температуре в два раза меньше температуры испарения материала при 1 атм., т.е. используемое для вычисления значение вязкости должно быть меньше табличного в круглых скобках.

При этом собственная отрицательная энергия теплового кванта у водородоподобного атома имеет зависимость от орбитального квантового числа

$$\varepsilon_{ml} = \varepsilon_{l00}(\eta) [1 - \gamma_{n,l} n_r / (l+1)]^2 / (n_r + l + 1)^2, |\gamma_{n,l}| < 1, \quad (5)$$

т.е. разность уровней с большим орбитальным квантовым числом l стремится к нулю, при фиксированном радиальном n_r квантовом числе.

В случае, когда фазовый переход является плавлением, двигающейся частицей является ядро атома. Множители $m\eta_n / \rho_b = 4\pi\eta_n b^3 / 3 > 4\pi\eta_e m_e a_B^3 / (3Am_p)$ у ядра и электрона сопоставимы, за счет большой вязкости $\eta_n \sim 2 \cdot 10^{10} \text{ g}/(\text{cm} \cdot \text{sec})$, которое создает ядро в кристаллической решетке, при вязкости которую создают электроны $\eta_e \sim 0.01 \text{ g}/(\text{cm} \cdot \text{sec})$, но находящиеся в объеме атома. Но у кванта энергии имеется еще множитель, равный коэффициенту вязкости, который больше у ядра атома, поэтому движением электронов можно пренебречь при вычислении теплоты плавления. Плотность двигающейся частицы – ядра атома у твердого тела считалась по формуле $\rho_b = \frac{3m_b}{4\pi b^3}$. Масса двигающейся частицы – ядра атома, выражалась через массу электрона $m_b = 1836Am_e$, где величина A равна количеству нуклонов в ядре. Размер частицы считался по размеру ядра и тогда размер двигающегося тела $b = 1.45 \cdot 10^{-13}$. При этом, так как ядро в атоме движется гораздо медленнее электронов, формула для кванта энергии изменится

$$\begin{aligned} \varepsilon_{t00} &= -\frac{32N\pi\eta_e a^2 \beta^2 Z^2 m_e^2}{(Zm_e + Am_p)^2} / [137 \cdot (1 + \beta^2)]^2 = \\ &= -32N\pi\eta_e a^2 \beta^2 Z^2 / [137 \cdot (Z + A \cdot 1836) \cdot (1 + \beta^2)]^2 \end{aligned}$$

Добавочный член в теплоту плавления и испарения, равный $p\Delta V$ мал и не учитывался. К сожалению, вязкость металла в используемом справочнике дана при температуре 30 градусов Цельсия, а плавление твердого тела происходит при более высокой температуре. Данные взяты из справочника [9].

	Радиус атома, в ангстремах	Z, A	$\eta \cdot 10^{-10}$, При $t=30$ град.С г/ (см сек)	Вычисленная теплота плавления, кДж/моль	Табличная теплота плавления, кДж/моль
Al	1.43	13,27	1.88(1.25)	10.5	10.7
Fe	1.26	26,57	3.09(14)	15.5	15.5

Zn	1.39	30,67	2.4(1.8)	7.25	7.28
Pd	1.37	46,106	3.84(1.7)	17.02	17.2
Ag	1.44	47,108	3.14(2.24)	11.6	11.27

В скобках указана табличная вязкость при температуре 30 градусов Цельсия, вне скобки вязкость, по которой производилось вычисление.

При испарении энергия необходимая при фазовом переходе больше энергии, необходимой для плавления вещества. Следовательно, правильно учли энергию движения электронов в объеме атома, которая играет большую роль, чем энергия движения ядра атома, в силу его малой скорости и малой вязкости жидкости. Дело в том, что коэффициент вязкости у твердого тела огромен, а у жидкого тела имеет гораздо меньшее значение. При этом большая вязкость твердого тела обусловлена существованием кристаллической решетки и движением ядра. Поэтому у твердого тела существенно движение ядра при плавлении, а у жидкого тела существенно движение электронов при испарении.

Но как же быть со сверхтекучестью гелия II, который получается при фазовом переходе 2 рода при температуре $T < 2.19\text{K}$ без выделения тепла, но с изменением действительной части вязкости. Но дело в том, что в этом состоянии имеется сверхтекучая и нормальная фаза гелия. Выскажем предположение, что одна фаза гелия соответствует действительной вязкости, которая при фазовом переходе 2 рода не изменилась, а другая фаза гелия обладает большой мнимой вязкостью $i\hbar\rho_b/m_{eff}$, имеющей сравнительно большое значение за счет малости эффективной массы, полученное при фазовом переходе 2 рода. При этом в жидкости наблюдается отсутствие добавки к постоянной Планка, и она ведет себя так, как будто процесс происходит в вакууме без трения, так как эффективная постоянная Планка равна $\hbar - 2im_{eff}\eta/\rho_b = \hbar; m_{eff} = 0$. Возможное изменение значения эффективной массы обусловлено ближним порядком расположения атомов в жидкости. В обычном состоянии вещества мнимая часть вязкости гораздо меньше действительной, а у гелия II мнимая часть вязкости существенна. Т.е.

сверхтекучесть объясняется существованием двух фаз гелия. При этом кристаллической решетке соответствует большая действительная вязкость, а не большая мнимая часть вязкости гелия II.

Появляется при фазовом переходе 2 рода и комплексная теплоемкость, что связано с релаксацией среды и, значит, появлением комплексной энергии. Мнимая часть комплексной энергии соответствует затуханию и определяет квазистационарное состояние среды, что определяет релаксация среды. Можно высказать предположение, что две образующиеся при фазовых переходах второго рода типах среды, определяются действительной и мнимой частью состояний энергии вещества.

Изменение эффективной массы вещества связано со свойствами кристаллической решетки и определяется по формуле

$$\frac{1}{m_{eff}} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 \varepsilon}{dk^2}.$$

Где ε величина энергии в зависимости от волновых чисел, распространяющихся в кристаллической решетке. В самом деле, определение производной от групповой скорости V_g равно

$$\frac{dV_g}{dt} = \hbar^{-1} \frac{d^2 \varepsilon}{dk dt} = \hbar^{-1} \frac{d^2 \varepsilon}{dk^2} \frac{dk}{dt}.$$

При этом производная от импульса равна силе, действующей на частицу

$$\hbar \frac{dk}{dt} = F, \text{ откуда получаем}$$

$$\frac{dV_g}{dt} = \hbar^{-2} \frac{d^2 \varepsilon}{dk^2} F.$$

И значит требуемое выражение для массы частицы. Т.е. в кристаллической решетке с законом определения зависимости энергии от волнового числа

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{eff}}, \text{ получаем определение эффективной массы. Причем эффективная}$$

масса частицы может быть как меньше, так и больше массы частицы. В самом деле, эффективная масса частицы считается по формуле

$$m_{\text{eff}} = \frac{m}{1 - 2\lambda/U_1}.$$

Где величина λ считается по формуле $\lambda = \frac{\hbar^2 (G_1/2)^2}{2m}$, где G_1 модуль вектора обратной решетки. Малое отрицательное значение U_1 обеспечивает уменьшение эффективной массы по сравнению с обычной массой. Имеются кристаллы, где эффективная масса больше или меньше обычной массы см. [5]. При этом, так как жидкость обладает локальной кристаллической структурой, понятие эффективной массы можно применять и для жидкости. Локальность кристаллической структуры жидкости заключается в том, что существует ближний порядок расположения атомов. В твердом теле существует дальний порядок расположения атомов.

При переходе 2 рода в сверхпроводящее состояние имеется две фазы среды, действительная - слабо проводящая, и мнимая - сильно проводящая. Т.е. появляется среда с комплексной диэлектрической проницаемостью с большой мнимой частью $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' = \varepsilon_0 + \frac{4\pi i \sigma}{\omega}$, что связано с большой комплексной вязкостью. При этом окажется, что проводимость материала ответственна за тепловые процессы и плотность энергии определяется величиной $\frac{4\pi\sigma}{\omega} - i\varepsilon_0$, где действительная часть определяет тепловые процессы. А мнимая часть перестройку структуры вещества и изменение мнимой части энергии системы.

Аналогичный член появляется и у магнитного поля, но умножение происходит на положительную мнимую единицу, магнитная проницаемость которого равна $i\mu = i\mu' - \mu''$, причем тепловые потери в единицу времени единицы объема пропорциональны действительным электромагнитным свойствам вещества. Приведем вывод формул для изменения комплексной энергии

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}\mathbf{S} &= -\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}]\sin\omega t\cos\omega t = \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{H}\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) = \frac{dU}{dt}\sin\omega t\cos\omega t = \\
&= \frac{\omega}{4\pi}\left[(-i\varepsilon' + \varepsilon'')\overline{\mathbf{E}}\overline{\mathbf{D}} + (-i\mu' + \mu'')\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{B}}\right]\sin\omega t\cos\omega t
\end{aligned}$$

При этом сокращается произведение $\sin\omega t\cos\omega t$. Тепловая энергия действительная

$$\frac{d\operatorname{Re}U}{dt} = Q = \frac{\omega}{4\pi}(\varepsilon''\overline{\mathbf{E}}^2 + \mu''\overline{\mathbf{H}}^2).$$

Где черта над вещественными напряженностями поля означает усреднение по времени. При этом мнимые свойства диэлектрической и магнитной проницаемости связаны с действительной вязкостью, так как пропорциональны тепловому потоку. Действительная часть электрических свойств вещества связана с мнимой частью вязкости среды, так как и то и другое не связаны с выделением тепла. При этом при наличии внешнего электромагнитного поля в случае перехода к сверхпроводимости среды, меняется проводимость среды, значит, выделяется тепловая энергия. И в самом деле, выделившееся тепло определяется по формуле см. [3], §55

$$Q = T(s_n - s_s) = -\frac{V_s H_c T}{4\pi} \left(\frac{\partial H_c}{\partial T}\right)_P.$$

Где берется разность энтропий между нормальной s_n и сверхпроводящей фазой s_s . При переходе в точке $T = T_c$ (в отсутствии магнитного поля) теплота перехода обращается в ноль вместе с H_c . Переход же происходящий при условии $T < T_c$ (в магнитном поле), сопровождается поглощением или выделением тепла, т.е. является переходом первого рода. Величина H_c монотонно растет с понижением температуры во всем интервале $[T_c, 0]$. В случае сверхпроводимости существует понятие критического напряжения магнитного поля, начиная с которого сверхпроводимость исчезает.

Формулу для выделившегося тепла дополним формулой изменения электромагнитной мнимой энергии за счет действительной диэлектрической и магнитной проницаемости тела

$$\frac{d \operatorname{Im} U}{dt} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{H} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right) = \frac{-i\omega}{4\pi} (\varepsilon \bar{\mathbf{E}}^2 + \mu \bar{\mathbf{H}}^2).$$

Вычислим энергию атома, подсчитав все ее члены. Максимальная энергия затухания внутреннего поля равна разности между энергией, подсчитанной при добавке мнимой величины к постоянной Планка и энергии без этой добавки. В результате вычитания получится комплексная величина, которую приравняем комплексной энергии магнитного поля в объеме атома за время затухания, равное радиусу Бора, деленному на скорость света a_B / c , причем из этого члена вычитается энергия фазового перехода, равная $\frac{m_{\text{eff}}}{m_e} k(\Delta T)^2$

$$\begin{aligned} E_{ne} &= -\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \left[\frac{m_e e^4}{(\hbar - 2im_{\text{eff}} v |\rho_l / \rho_b|)^2} - \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \right] = \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{4m_e^3 e^4 v^2 |m_{\text{eff}} \rho_l / m_e \rho_b|^2 - 4e^4 im_e^2 \hbar v |m_{\text{eff}} \rho_l / m_e \rho_b|}{n^2 \hbar^4} = \\ &= \frac{\omega(\mu'' - i\mu') H^2}{4\pi} \frac{4\pi a_B^4}{3c} - \frac{m_{\text{eff}}}{m_e} k(\Delta T)^2, \Delta T = T_c - T \end{aligned}$$

Где величина T_c , температура перехода в сверхпроводящее состояние, величина N максимальное значение квантового числа молекулы или атома.

Член $\frac{m_{\text{eff}}}{m_e} k(\Delta T)^2$ соответствует изменению термодинамического потенциала

вблизи точки перехода, а значит и изменению энергии системы. Тепловая энергия определена с точностью до множителя, учитывающего эффективную массу электрона. Откуда максимальная напряженность магнитного поля, касательного к поверхности среды, и размер или плотность куперовской пары определится, (сверхпроводящее состояние обусловлено наличием куперовской пары) когда вещество еще находится в сверхпроводящем

состоянии,

равна

$$H^2 = \sum_{n=1}^N \left[\frac{12e^4 c m_e m_{eff}^2 v^2 \mu'' |\rho_l|^2}{n^2 (\mu'^2 + \mu''^2) \hbar^4 \omega a_B^4 |\rho_b|^2} + \frac{12e^4 c m_e m_{eff} \hbar v \mu' |\rho_l|}{n^2 (\mu'^2 + \mu''^2) \hbar^4 \omega a_B^4 |\rho_b|} \right] + \frac{3 \hbar m_{eff} k (\Delta T)^2}{\mu'' m_e^2 c a_B^4} =$$

$$= \sum_{n=1}^N \left[\frac{12 \pi c^5 m_e^6 v^2 \mu''}{n^2 137^6 \hbar^5 (\mu'^2 + \mu''^2)} \left| \frac{m_{eff} \rho_l}{m_e \rho_b} \right|^2 + \frac{12 \pi c^5 m_e^5 \hbar v \mu'}{n^2 137^6 \hbar^5 (\mu'^2 + \mu''^2)} \left| \frac{m_{eff} \rho_l}{m_e \rho_b} \right| + \frac{3 \hbar m_{eff} \mu'' k (\Delta T)^2}{(\mu'^2 + \mu''^2) m_e^2 c a_B^4} \right]$$

Откуда имеем квадратное уравнение относительно отношения плотностей

$$\frac{m_e v}{\hbar} \left| \frac{m_{eff} \rho_l}{m_e \rho_b} \right|^2 - \left| \frac{m_{eff} \rho_l}{m_e \rho_b} \right| \frac{\mu''}{\mu'} + \frac{\hbar m_{eff} k (\Delta T)^2 137^2}{4 \pi m_e^2 c^2 m_e v \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}} = 0.$$

Откуда получим

$$\left| \frac{\rho_l}{\rho_b} \right| = \frac{m_e}{m_{eff}} \frac{\frac{\mu''}{\mu'} - \sqrt{\left(\frac{\mu''}{\mu'}\right)^2 - \frac{m_{eff} k (\Delta T)^2 137^2}{\pi m_e^2 c^2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}}}}{2 \frac{m_e v}{\hbar}} \cong \frac{m_{eff} k (\Delta T)^2 \hbar \mu'}{4 \pi \mu'' c^2 m_e^3 v \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}} 137^2, \Delta T \rightarrow 0.$$

Для максимальной критической напряженности магнитного поля, сохраняющее сверхпроводящее состояние, имеем равенство

$$H_c^2 = \sum_{n=1}^N \left[\frac{12 \pi c^5 m_e^6 v^2 \mu''}{n^2 137^6 \hbar^5 (\mu'^2 + \mu''^2)} \left| \frac{m_{eff} \rho_l}{m_e \rho_b} \right|^2 + \frac{12 \pi c^5 m_e^5 \hbar v \mu'}{n^2 137^6 \hbar^5 (\mu'^2 + \mu''^2)} \left| \frac{m_{eff} \rho_l}{m_e \rho_b} \right| \right] +$$

$$+ \frac{3 \hbar k (\Delta T)^2 \mu''}{(\mu'^2 + \mu''^2) m_e c a_B^4} = \frac{3 m_{eff}^4 c \mu'^2}{4 \pi^2 137^2 \hbar^3 m_e^2 \mu'' (\mu'^2 + \mu''^2) \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}} k^2 (\Delta T)^4 + \quad .77$$

$$+ \frac{3 c^3 m_{eff}^2 m_e k (\Delta T)^2 \mu'^2}{\pi 137^4 \mu'' (\mu'^2 + \mu''^2) \hbar^3} + \frac{3 \hbar m_{eff} k (\Delta T)^2 \mu''}{m_e^2 c a_B^4 (\mu'^2 + \mu''^2)}$$

При этом магнитная индукция стремится к нулю, значит, величины μ', μ'' стремятся к нулю, но отношение μ' / μ'' конечно. При этом формула имеет вид

$$H_c^2 = 2.2 \cdot 10^7 k (\Delta T)^2 \frac{m_{eff} \mu''}{m_e (\mu'^2 + \mu''^2)}.$$

Где отношение $\frac{m_{eff} \mu''}{m_e (\mu'^2 + \mu''^2)}$ конечно. Где первые и вторые члены для напряженности поля малы.

Литература

1. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела М.: «Наука», 1978г., 791с.
2. Вергелес С.Н. Лекции по квантовой электродинамике. М.-, «ФИЗМАТЛИТ», 2008г.,368с.
3. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц Электродинамика сплошных сред т.VIII, М.: «Наука», 1992г., 662с.
4. Е. Якубовский Обобщение уравнений ОТО и квантовой механики. Решение обобщенных уравнений. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012г, 121с.
5. J. Prausnitz, R. Lichtenthaler, E. de Azevedo Molecular Thermodynamics of Fluid-Phase Equilibria 1999 by Prentice Hall PTR,860р.
6. Л.Д.Ландау, Е.М. Лифшиц Гидродинамика, т.VI, М.-, «Наука», 1988г., 736стр
7. Е. Якубовский Турбулентное течение в цилиндрических трубах. Экспериментальное подтверждение комплексного решения, LAMBERT Academic Publishing, 2013г.,61с.
8. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: Государственное Издательство Физико-математической литературы, 1963г., ч.II,400с.
9. И.К. Кикоин Таблицы физических величин Справочник М.: «Атомиздат», 1976г., 1009с.