Общее решение уравнения Навье-Стокса и уравнения Шредингера с давлением или потенциалом в виде полинома второй степени по трем переменным

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Уравнение Шредингера связано с уравнением Навье-Стокса. Получим из уравнения Шредингера уравнение Навье-Стокса в декартовой системе координат. Как промежуточный вариант получается первый интеграл уравнений Навье-Стокса. Определяются разделяющие константы в первом интеграле в случае декартовой системы координат по потенциальной энергии и определяется решение уравнений Навье-Стокса и Шредингера в новых условиях. Описано комплексное, турбулентное течение и ламинарное действительное течение в трубопроводах. Но описание профиля в виде полинома давления имеет свои проблемы. Надо задавать коэффициенты у формулы, описывающей давления.

Также описано решение уравнения Шредингера. Получена зависимость координатной волновой функции от декартовых трехмерных координат. Вычислен орбитальный момент в координатном представлении. В случае отрицательной собственной энергии спин частиц описывается с помощью комплексной матрицы размерности два на два, в случае положительной собственной энергии матрицы имеют координатное представления. Матрица образует временное представление и три пространственных комплексных числа. Пространственные комплексные числа уточняют значение энергии, вычисленное с помощью декартовых координат.

Уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+U\psi$$

Вычислим потенциальное решение уравнения Навье-Стокса в декартовой системе координат. Если взять волновую функцию в виде

$$\psi(t,x_1,x_2,x_3)\exp(-iEt/\hbar)=\exp[-iEt/\hbar+\sum_{k=1}^{3}\int_0^{x_k}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_k}dx_k],$$

то получим дифференциальное уравнение относительно логарифма волновой функции. Получаем первые интегралы уравнения Навье-Стокса

$$-E=-i\hbar\frac{\partial\ln\psi}{\partial t}=\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3}[(\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_k})^2+\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x_k^2}]-U=\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3}(k_i^2+\frac{\partial k_i}{\partial x_k})-U;$$
$$-E=\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3}(k_i^2+\frac{\partial k_i}{\partial x_k})-U;k_i=\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_k}.$$

Получены первые интегралы уравнения Навье-Стокса, зависящие от трех переменных. Продифференцируем уравнение по координате, получим

$$\frac{\partial V_n}{\partial t}=\sum_{k=1}^{3}[-V_k\frac{\partial V_n}{\partial x_k}+\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 V_n}{\partial x_k^2}]-\frac{\partial U}{m\partial x_n}$$
$$V_n=\frac{-i\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_n}$$

Получим уравнение Навье-Стокса с кинематической вязкостью $\nu=\frac{i\hbar}{2m}$.

Волновая функция равна

$$\psi_k(t,x_1,x_2,x_3)\exp(-iEt/\hbar)=\exp[-iEt/\hbar+\sum_{s=1}^{3}\int_0^{x_k}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_s}dx_s+2i\int_0^{x_k}\frac{\partial\ln A_k(u_k)}{\partial u_k}du_k]=$$
$$=\exp[-iEt/\hbar+\sum_{s=1}^{3}\int_0^{x_k}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_s}dx_s+\int_0^{x_k}\frac{\partial\ln C_k(u_k)}{\partial u_k}du_k]=$$
$$=\exp(-iEt/\hbar)\psi(x_1,x_2,x_3)C_k(u_k),u_1=x_2+ix_3;u_2=x_3+ix_1,u_3=x_1+ix_2.$$

Величина момента импульса равна $L_k=J_k\omega_k=m|u_k|^2\omega_k$. Где волновая функция описывает координатную зависимость, а векторный потенциал $C_k(u_k)$ описывает изменение спирального момента.

Вычислим величину ротора через одну комплексную переменную.

$$B_x = \frac{\partial \operatorname{Re} \ln A_x(y+iz) + i \operatorname{Im} \ln A_x(y+iz)}{\partial z} - \frac{\partial \operatorname{Im} \ln A_x(y+iz) - i \operatorname{Re} \ln A_x(y+iz)}{\partial y} =$$

$$= i(-i\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y})[\operatorname{Re} \ln A_x(y+iz) + i \operatorname{Im} \ln A_x(y+iz)] = 2i\frac{\partial \ln A_x(y+iz)}{\partial(y+iz)} = \frac{\partial \ln C_x(u_x)}{\partial u_x}$$

$$L_x = m\omega_x u_x^2 = m\omega_x \ln C_x(u_x), \frac{\partial^2 L_x}{\partial u_x^2} = 2m\omega_x, \omega_x = mc^2/\hbar$$

Величины координат рассматриваются безразмерные, для чего их надо умножить на ω/c. При этом величина векторного потенциала может иметь три проекции

$$U(u_l) = c_0 + c_1 u_l + c_2 u_l^2, \sqrt{-(P_l - P_{l+1})} + au_l + b + \sum_{s=1}^{n_r} \frac{1}{u_l - \beta_{sl}} =$$

$$= q_l = -i\frac{\partial \ln C_l}{\partial u_l}; C_l(u_l) = \prod_{s=1}^{n_r} (u_l - \beta_{sl}) \exp[-i(P_l - P_{l+1})t/\hbar + iau_l^2/2 + ibu_l]$$

Данное решение для уравнения Навье-Стокса описывает классическую систему. Но волновая функция пропорциональна трем комплексным константам при комплексной фазе.

Решение уравнения Навье-Стокса $a = \pm\sqrt{T_0 c_2}, b = [\pm\frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-(E_l - E_{l+1})}]\sqrt{T_0}$,

$E_l - E_{l+1} = T_0(c_0 - \frac{c_1^2}{4c_2} \mp \sqrt{c_2/T_0})$ см. (4).

В случае квантовой механики имеет физический смысл только одна проекция этого момента и координаты u_k описывают проекции этого момента. В самом деле квадрат вектора вращения равен $V_i^2 = e_{ikl} w_k x_l e_{ipq} w_p x_q = (\delta_{kp}\delta_{lq} - \delta_{kq}\delta_{;p}) w_k x_l w_p x_q = w_k^2 x_l^2 - (w_k x_k)^2$. Считаем, что все проекции частоты одинаковы, тогда модуль скалярного произведения равен

$$V_i^2 = w^2[2\sum_{k=1}^{3} x_k^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1] = w^2\{2\sum_{k=1}^{3} x_k^2 + i[(x_1+ix_2)^2 + (x_2+ix_3)^2 + (x_3+ix_1)^2\} =$$

$$= w^2 \sum_{k=1}^{3} (2x_k^2 + iu_k^2)$$

Так как частоты у всех импульсов совпадают, определятся все равные проекции на разные оси. Частоты совпадают, так как массы имеет единственное значение, а частота определяется по формуле $w = mc^2 / \hbar$.

Отметим, что квантовые числа $E_l - E_{l+1}, a, b, u_{lo}$ плюс матрица спина. Состояние системы зависит от действительных констант, зависящих от $x_{1u} = kh, x_{2u} = ph, x_{3u} = qh$. Причем каждому состоянию соответствуют свои целые числа k, p, q и переход в другое состояние сопровождается изменением целых чисел.

В случае разных частот, т.е. матрицы массы, разной в разных ортогональных направлениях $w_k = m_k c^2 / \hbar$

$$
\begin{gathered}
V_i^2 = w_k^2 x_l^2 - (w_k x_k)^2 = w_k^2 x_l^2 - w_k^2 x_k^2 + \\
+ i[(w_1 x_1 + i w_2 x_2)^2 + (w_2 x_2 + i w_3 x_3)^2 + (w_3 x_3 + i w_1 x_1)^2]
\end{gathered}
$$

При этом сохраняется сумма квадратов проекции момента импульса, так как она коммутирует с оператором момента импульса, т.е. существует модуль момента импульса и его три проекции. Построение решения аналогично случаю одинаковых частот.

Оператор импульса коммутирует с оператором момента импульса $i\frac{\partial}{\partial x_k} i\frac{\partial}{\partial u_1} = i\frac{\partial}{\partial x_k} 2i(\frac{\partial}{\partial x_2} - i\frac{\partial}{\partial x_3}) = 2i(\frac{\partial}{\partial x_2} - i\frac{\partial}{\partial x_3}) i\frac{\partial}{\partial x_k} = i\frac{\partial}{\partial u_1} i\frac{\partial}{\partial x_k}$. Также операторы момента импульса коммутируют между собой и с модулем оператора импульса. Но так как частота у разных проекций одинакова, получается одна величина проекции на любую ось.

Тогда уравнение Шредингера запишется в виде

$$
-i\hbar\frac{\partial \ln \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}[(\frac{\partial \ln \psi}{\partial x_k})^2 + \frac{d^2 \ln \psi}{dx_k^2} + [\frac{\partial \ln C_k(u_k)}{\partial u_k}]^2 + \frac{d^2 \ln C_k(u_k)}{du_k^2}] - U(u_k) \quad (1)
$$

В случае разделяющегося потенциала получим уравнения

$$-E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3} (p_k^2 + \frac{\partial p_k}{\partial x_k}) - U(x_1,x_2,x_3) - E_2; -P_k = \frac{\hbar^2}{2m}(q_k^2 + \frac{\partial q_k}{\partial u_k}) - U(u_k) - P_{k+1}, P_3 = 0$$
$$p_l = \frac{\partial \ln \psi_l(x_l)}{\partial x_l}_l; q_k = \frac{\partial \ln C_k(u_k)}{\partial u_k}; u_1 = x_2 + ix_3; u_2 = x_3 + ix_1, u_3 = x_1 + ix_2 \quad . (2)$$

Потенциалы при этом в общем случае окажутся комплексными. Вводя потенциал $C_l(u_l) = [A_l(u_l)]^{-i/2}$, получим формулу $B_l(u_l) = \frac{\partial C_l(u_l)}{\partial u_l}$ и зависимость волновой функции от векторного потенциала

$$\psi_k(t,x_1,x_2,x_3) = \exp[-iEt/\hbar + \int_0^{x_k} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_k} dx_k + \int_0^{u_k} \frac{\partial \ln C_k(u_k)}{\partial u_k} du_k] =$$
$$= \exp(-iEt/\hbar)\psi(x_1,x_2,x_3)C_k(u_k), u_1 = x_2 + ix_3; u_2 = x_3 + ix_1, u_3 = x_1 + ix_2$$

Продифференцируем уравнение по координате, получим

$$\frac{\partial V_k}{\partial t} = \sum_{n=1}^{3} (-V_n \frac{\partial V_k}{\partial x_n} + \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 V_k}{\partial x_n^2}) - \frac{\partial U}{m\partial x_k}$$
$$\frac{\partial Q_k}{\partial t} = -Q_k \frac{\partial Q_k}{\partial u_k} + \frac{i\hbar}{2m}\frac{d^2 Q_k}{du_k^2} - \frac{\partial U}{m\partial u_k}$$
$$V_n = \frac{-i\hbar}{m}(\frac{\partial \ln \psi}{\partial x_n}), Q_n = \frac{-i\hbar}{m}\frac{\partial \ln C_n}{\partial u_n}$$

Попробуем решить уравнение Навье-Стокса в общем виде

$$-E = \sum_{k=1}^{3} (u_k^2 + \frac{\partial u_k}{\partial x_k}) - U \qquad (3)$$

Приведем его к безразмерному виду относительно числа Рейнольдса потока.

Решим безразмерное уравнение (3). При условии $V_k(x_1,x_2,x_3) = u_k(x_1,x_2,x_3)\sqrt{T_0} = [\sqrt{-(E_k - E_{k+1})} + \alpha_k(x_1,x_2,x_3) + \sum_{s=1}^{n_r} \frac{1}{x_k - \beta_{sk}}], E_4 = 0$.

Тогда получим уравнение

$$\sum_{k=1}^{3}\ \{2\sqrt{-(E_k-E_{k+1})}[\alpha_k(x_1,x_2,x_3)+\sum_{s=1}^{n_r}\ \frac{1}{x_k-\beta_{ks}}]+\alpha_k^2(x_1,x_2,x_3)+2\alpha_k(x_1,x_2,x_3)\sum_{s=1}^{n_r}\ \frac{1}{x_k-\beta_{ks}}+$$

$$+2\sum_{\substack{k,n=1\\k\neq n}}^{n_r}\ \frac{1}{x_k-\beta_{ks}}\frac{1}{x_k-\beta_{kn}}+\frac{\partial\alpha(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_k}\}-U(x_1,x_2,x_3)=0$$

.

Тогда в случае радиального квантового числа $n_r=0$, получаем уравнение

$$\sum_{k=1}^{3}\ [2\sqrt{-(E_k-E_{k+1})}\alpha_k(x_1,x_2,x_3)+\alpha_k^2(x_1,x_2,x_3)+\frac{\partial\alpha_k(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_k}]-U(x_1,x_2,x_3)=0.$$

Это уравнение в случае $U_u(x_1,x_2,x_3)=\sum_{s,p,q=0}^{2N}c_{spq}(x_1-x_{1u})^s(x_2-x_{2u})^p(x_3-x_{3u})^q$ полинома $2N$ степени содержит $(2N+1)^3$ уравнения, являющееся коэффициентами полинома. Коэффициенты этого уравнения в случае полинома второй степени равны $c_{200u}=\dfrac{U_{s+2,pqu}+U_{s,pqu}-2U_{s+1,pqu}}{2h^2}$

$$c_{100u}=\frac{U_{s+2,pqu}-U_{s,pqu}}{2h},a_{000u}=U_{spqu}=U(x_{10}+sh,x_{20}+ph,x_{30}+qh)$$

$$a_{110}=\frac{\partial^2U}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{U_{s+2p+2qu}+U_{spqu}-U_{s+2pqu}-U_{sp+2qu}}{4h^2}$$

$$c_{210}=\frac{\partial^3U}{\partial x_1^2\partial x_2}=\frac{U_{s+2p+2qu}+U_{sp+2qu}-U_{s+2pqu}-U_{spqu}-2U_{s+1p+2qu}+2U_{s+1pqu}}{16h^3}$$

$$c_{111}=\frac{\partial^3U}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}=\frac{U_{s+2p+2q+2u}+U_{sp+2q+2u}+U_{spq+2u}-U_{sp+2q+2u}-U_{spq+2u}-U_{spqu}}{24h^3}$$

$$c_{220}=\frac{\partial^4U}{\partial x_1^2\partial x_2^2}=[\frac{\partial^4U[x_1,x_{20}+(p+2)h,x_3)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2U(x_1,x_{20}+ph,x_3)}{\partial x_1^2}-$$

$$-2\frac{\partial^2U[x_1,x_{20}+(p+1)h,x_3]}{\partial x_1^2}]/4h^2$$

$$=\frac{U_{s+2p+2qu}+U_{s+2pqu}-2U_{s+2p+1qu}+U_{sp+2qu}+U_{spqu}-2U_{sp+1qu}+U_{s+1p+2qu}+U_{s+1pqu}-2U_{s+1p+1qu}}{48h^4}$$

$$c_{221}=\frac{\partial^5U}{\partial x_1^2\partial x_2^2\partial x_3}=[\frac{\partial^4U[x_1,x_2,x_{30}+(q+2)h]}{\partial x_1^2\partial x_2^2}-\frac{\partial^4U(x_1,x_2,x_{30}+qh)}{\partial x_1^2\partial x_2^2}]/2h$$

$$c_{222}=\frac{\partial^6 U}{\partial x_1^2\partial x_2^2\partial x_3^2}=[\frac{\partial^4 U[x_1,x_2,x_{30}+(q+2)h]}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4 U(x_1,x_2,x_{30}qh)}{\partial x_1^2\partial x_2^2}-$$

$$-2\frac{\partial^4 U[x_1,x_2,x_{30}+(q+1)h]}{\partial x_1^2\partial x_2^2}]/4h^2$$

Общий потенциал, разбивается на полиномы, аппроксимирующие функцию общего потенциала. Получим решение на отдельно взятом потенциале в виде полинома $2N$ степени по каждой переменной. Это решение непрерывное, так как потенциал на границах общий. Функции $\alpha_{ku}(x_1,x_2,x_3)=\sum_{s,p,q=1}^{N}b_{kspq}(x_1-x_{1u})^s(x_2-x_{2u})^p(x_3-x_{3u})^q$ являются полиномом степени N содержит $3(\mathrm{N}+1)^3$ неизвестных коэффициентов. Плюс три неизвестных коэффициента $\sqrt{-(E_k-E_{k+1})}$. Итого имеем уравнение $(2N+1)^3=3(N+1)^3+3$. Из равенства количества неизвестных количеству уравнений имеем $N=1$. Задача имеет не единственное решение, так как необходимо решать квадратное уравнение. При другом радиальном числе прибавится степень уравнения и на столько же прибавится количество неизвестных коэффициентов β_k. Среди коэффициентов потенциала $U(x_1,x_2,x_3)$ степени $2N$ могут быть $p\le N-1$ неизвестных коэффициента, остальные коэффициенты надо задавать. Тогда количество неизвестных давления равна $[2(N-p)+1]^3$, а количество неизвестных в функции $\alpha_k(x_1,x_2,x_3)$ равна $3(\mathrm{N}-\mathrm{p}+1)^3$,остальные надо задавать. При этом имеем $N=p+1$.

Решим одномерную задачу в случае $p=0$, $n_r=0$. Имеем уравнение

$$2\sqrt{-E_z}(az+b)+a^2z^2+2abz+b^2+a-T_0(c_0+c_1z+c_2z^2)=0.$$

Величина $\frac{dp}{\rho dz}$ в одномерном случае интегрируется с интегралом, равным полиному. При этом также как нормированное давление умножено на нормировочный множитель, нормированная скорость также умножена на нормировочный множитель $V_k(x_1,x_2,x_3)=u_k(x_1,x_2,x_3)\sqrt{T_0}$. Нормированное значение собственной энергии также имеет нормировочный множитель $E_z = T_0 \varepsilon_z$. Универсальный смысл имеют нормированные значения параметров, но меряем мы не нормированные значения параметров, причем при бесконечности коэффициента пропорциональности они могут стремиться к бесконечности. Нормированные значения всегда конечны. Эта система уравнений имеет два решения

$$a = \pm\sqrt{T_0 c_2}, E_z = T_0(c_0 - \frac{c_1^2}{4c_2} \mp \sqrt{c_2 / T_0}), b = (\pm\frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-E_z})\sqrt{T_0}. \qquad (4)$$

При использовании действительной кинематической вязкости отрицательная энергия квантовых систем соответствует положительной энергии $E_z = -\frac{me^2}{2\hbar^2 n^2} = \frac{e^2}{8\nu^2 mn^2}$. Волновая функция равна $\psi = \exp\{[\pm\sqrt{c_2} z^2 / 2 \pm (\frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-E_z})z]\sqrt{T_0}\}$ в случае $c_2 < 0$ имеет комплексную фазу и на конечном отрезке этот режим реализуется. При условии положительного $c_2 > 0$ надо выбрать отрицательное значение $a = -\sqrt{T_0 c_2} < 0$, тогда волновая функция имеет максимум, и на бесконечности координаты стремится к нулю.

Решение уравнения Навье-Стокса имеет вид $V_z(z) = u_z(z)\sqrt{T_0} = (\sqrt{c_2} z / L + \frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-E_z})\sqrt{T_0}$ и справедливо для ограниченной области и при изменении давления $U(z) = p(z) = (c_0 + c_1 z / L + c_2 z^2 / L^2)T_0$. В уравнение Навье-Стокса входит градиент давления $\frac{dp(z)}{dz} = (c_1 / L + 2c_2 z / L^2)T_0$. Он равен нулю при условии $z = -c_1 L/(2c_2)$, Такое же условие для нулевого числа Рейнольдса потока с возможно мнимой добавкой. Нулевой градиент давления соответствует нулевой силе, действующей на поток частиц жидкости, при дальнейшем увеличении координаты длины трубы эта сила становится отрицательной, что соответствует стенке в потоке. Это резкое изменение свойств потока, из положительного градиента давления, он меняет знак и становится отрицательным. Это соответствует появлению сильного торможения жидкости, переходу через отрицательное давление $p(L)=(c_0-\frac{c_1^2}{4c_2})T_0$ при изменении знака c_2, и значит эта задача эквивалентна наличию стенки в трубопроводе. Если параметры давления таковы, что они связаны условием $1+\frac{c_1}{2c_2}-\mathrm{Re}\sqrt{-E_z/c_2}\le 0$ происходит гидравлический удар. Условие реализуемости давления, положительность значения $p(L)=(c_0-\frac{c_1^2}{4c_2})T_0$ т.е. отрицательный дискриминант давления при положительном c_2 при сохранении положительности давления, т.е. давление имеет положительный минимум. В случае c_2 меньше нуля, положительное давление имеет максимум и положительно при положительном дискриминанте на отрезке $\frac{z}{L}\in[\frac{-c_1}{2c_2}-\sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2}-\frac{c_0}{c_2}},\frac{-c_1}{2c_2}+\sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2}-\frac{c_0}{c_2}}]$. Условие реализуемости положительного давления на всей длине трубопровода $\frac{-c_1}{2c_2}+\sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2}-\frac{c_0}{c_2}}\ge 1$.

Но проблемы на этом не кончаются. Надо пересчитать мнимую скорость часть скорости в действительную часть с учетом шероховатости, как с постоянным тангенсом наклона, так и с постоянной высотой шероховатости. Для этого надо использовать методы, разработанные в [2]. В [2] удалось добиться совпадения экспериментальных графиков Никурадзе для коэффициента сопротивления трубопровода с круглым сечением при всех числах Рейнольдса и степени шероховатости с точностью 10%.

Решение полученные в [2] справедливы для постоянного градиента давления в каждом сечении трубопровода. Эти решения надо уточнить для параболического профиля давления, используя решение для постоянного градиента давления.

В случае $n_r=1$ для трехмерного случая получаем систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{3}\{2\sqrt{-(E_k-E_{k+1})}[\alpha_k(x_1,x_2,x_3)+\frac{1}{x_k-\beta_{k1}}]+\alpha_k^2(x_1,x_2,x_3)+2\alpha_k(x_1,x_2,x_3)\frac{1}{x_k-\beta_{k1}}+$$
$$+2\sum_{p=1}^{3}\frac{1}{x_k-\beta_{k1}}\frac{1}{x_p-\beta_{p1}}+\frac{\partial\alpha(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_k}\}-U(x_1,x_2,x_3)=0 .$$

Умножаем на наибольший знаменатель, получим

$$\sum_{k=1}^{3}\{2\sqrt{-(E_k-E_{k+1})}[\alpha_k(x_1,x_2,x_3)+\frac{1}{x_k-\beta_{k1}}]+\alpha_k^2(x_1,x_2,x_3)+2\alpha_k(x_1,x_2,x_3)\frac{1}{x_k-\beta_{k1}}+$$
$$+2\sum_{\substack{p=1\\k\neq p}}^{3}\frac{1}{x_k-\beta_{k1}}\frac{1}{x_p-\beta_{p1}}+\frac{\partial\alpha_k(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_k}\}\prod_{p=1}^{3}(x_p-\beta_{p1})-\prod_{p=1}^{3}(x_p-\beta_{p1})U(x_1,x_2,x_3)=0$$

Которая в случае $U(x_m)$ полинома $2N$ степени добавится 3 уравнения, так как потенциал умножаем на полином 3 степени. Функция $\alpha_k(x_1,x_2,x_3)$ является полиномом степени N и возводится в квадрат. Плюс добавится 3 неизвестных коэффициента β_{1s}. Из равенства количества неизвестных количеству уравнений имеем $N=1$. Задача имеет не единственное решение, так как надо решать квадратное уравнение.

При другом радиальном числе прибавится степень уравнения и на столько же прибавится количество неизвестных коэффициентов β_k. Среди коэффициентов потенциала $U(x_m)$ степени $2N$ могут быть $p\le N-1$ неизвестных коэффициента, остальные коэффициенты надо задавать. Тогда степень полинома равна $N=p+1$. Это решение описывает бассейн в виде прямоугольного параллелепипеда с особенностями при определенных значениях возможно комплексной скорости, т.е. пульсации мнимой части скорости с амплитудой, равной мнимой части.

Решим одномерную задачу при условии $n_r=1$.

$$2\sqrt{-E_z}[(az+b)(z-\beta)+1]+(a^2z^2+2abz+b^2)(z-\beta)+2az+2b+a(z-\beta)-$$
$$-T_0(c_0+c_1z+c_2z^2)(z-\beta)=0 .$$

Это уравнение сводится к следующей системе уравнений

$$\begin{gathered} a^2 = T_0 c_2 \\ 2\sqrt{-E}a - \beta a^2 + 2ab + T_0(\beta c_2 - c_1) = 0 \\ 2\sqrt{-E}b + b^2 = 2\sqrt{-E}\beta a + 2ab\beta - 3a - T_0(\beta c_1 - c_0) \\ 2\sqrt{-E}\beta b + b^2\beta = 2\sqrt{-E} - 2b - a\beta + T_0\beta c_0 \end{gathered}. \qquad (5)$$

Из второго уравнения определим значение энергии, а третье и четвертое уравнение запишем в виде

$$\begin{gathered} 2\sqrt{-E} = \beta a - 2b + T_0(c_1 - \beta c_2)/a \\ 2\sqrt{-E}\beta^2 a + 2ab\beta^2 - 3a\beta - T_0\beta(\beta c_1 - c_0) = . \\ = 2\sqrt{-E} - 2b - a\beta + T_0\beta c_0 \end{gathered}$$

Тогда величина энергии равна

$$\begin{gathered} 2\sqrt{-E} = \beta a - 2b + T_0(c_1 - \beta c_2)/a \\ 2\sqrt{-E}(\beta^2 a - 1) = -2ab\beta^2 + 2a\beta + T_0\beta^2 c_1 - 2b \end{gathered}$$

Разрешаем это уравнение относительно значения энергии

$$\begin{gathered} 2\sqrt{-E} = \frac{-2ab\beta^2 + 2a\beta + T_0\beta^2 c_1 - 2b}{\beta^2 a - 1} = \beta a - 2b + T_0(c_1 - \beta c_2)/a \\ a = \sqrt{T_0 c_2} \end{gathered}.$$

Это уравнение запишется в виде

$$4b + 3a\beta = T_0[(c_1 - \beta c_2)/a].$$

Уравнение имеет решение $\beta = \dfrac{T_0 c_1 - 4b\sqrt{T_0 c_2}}{4T_0 c_2} = \dfrac{c_1}{4c_2} - \dfrac{b}{\sqrt{T_0 c_2}}$. Из 3 и 4 уравнения (5) определим значение энергии и коэффициента b, для чего разрешим 3 и 4 уравнение (5) относительно энергии

$$2\sqrt{-E}=\frac{-b^2+2ab\beta-3a-T_0(\beta c_1-c_0)}{b-\beta a}=$$

$$=\frac{-b^2+2ab(\frac{c_1}{4c_2}-\frac{b}{\sqrt{T_0c_2}})-3a-T_0[(\frac{c_1}{4c_2}-\frac{b}{\sqrt{T_0c_2}})c_1-c_0]}{b+\frac{b}{\sqrt{T_0c_2}}a-\frac{c_1}{4c_2}a}.$$

$$2\sqrt{-E}=\frac{-b^2\beta-2b-a\beta+T_0\beta c_0}{\beta b-1}=$$

$$=\frac{(\frac{b^3}{\sqrt{T_0c_2}}-b^2\frac{c_1}{4c_2})-\frac{2b}{\sqrt{T_0c_2}}-a(\frac{c_1}{4c_2}-\frac{b}{\sqrt{T_0c_2}})+T_0c_0(\frac{c_1}{4c_2}-\frac{b}{\sqrt{T_0c_2}})}{-\frac{b^2}{\sqrt{T_0c_2}}-1+\frac{c_1}{4c_2}b}$$

Получим уравнение 4 степени относительно параметра b, решая которое определим значение этого параметра и значение собственной энергии.

$$\{-b^2+2ab(\frac{c_1}{4c_2}-b)-3a-T_0[(\frac{c_1}{4c_2}-b)c_1-c_0]\}[-\frac{b^2}{\sqrt{T_0c_2}}-1+\frac{c_1}{4c_2}b]=$$

$$=[(\frac{b^3}{\sqrt{T_0c_2}}-b^2\frac{c_1}{4c_2})-\frac{2b}{\sqrt{T_0c_2}}-a(\frac{c_1}{4c_2}-\frac{b}{\sqrt{T_0c_2}})+T_0c_0(\frac{c_1}{4c_2}-\frac{b}{\sqrt{T_0c_2}})](b+\frac{b}{\sqrt{T_0c_2}}a-\frac{c_1}{4c_2}a)$$

Но при некоторых значениях потенциала получатся потенциальное комплексное решение уравнения Навье-Стокса с учетом нелинейности, так как коэффициенты полинома $\alpha_m(x_m)$ возводятся в квадрат. В частности, в случае положительности члена с потенциальной энергией и для члена с наибольшим индексом, для решенной задачи требуется не-отрицательность собственной энергии для получения комплексного решения задачи квантовой механики. Для задачи с полюсом скорости, действительное решение квантовой механики определяет отрицательную энергию, причем нахождение корней полинома 4 степени может содержать в общем случае две пары комплексных корней, причем в каждой паре имеются комплексно-сопряженные члены.

В случае задачи гидродинамики имеем положительную ветвь собственной энергии, и комплексной энергии соответствуют комплексные скорости, а положительной действительной собственной энергии соответствуют действительные скорости. Причем комплексная скорость не определяет конечную волновую функцию.

Проблеме турбулентных комплексных решений уравнения Навье-Стокса посвящены статьи [1], [2], [3]. Но проблемы комплексного турбулентного решения уравнения Навье-Стокса на этом не кончаются. Надо пересчитывать мнимую часть числа Рейнольдса потока в действительную часть. Мнимая часть числа Рейнольдса потока существенным образом зависит от степени шероховатости. Необходимо усреднить по степени шероховатости, причем усреднение по средней высоте шероховатости зависит от тангенса наклона шероховатости и безразмерного давления или числа Рейнольдса см. [2] стр. 71.

Таким образом можно решить уравнение Шредингера и получить потенциальное решение уравнения Навье-Стокса с учетом нелинейности и комплексной числа Рейнольдса потока. Но в уравнении Навье-Стокса неизвестным является давление, или потенциал, который можно определить из уравнения неразрывности. В уравнении Шредингера потенциал является известным, и уравнение неразрывности определяется автоматически, оно следует из уравнения Шредингера. Каков же выход из ситуации. Наряду с первыми интегралами надо рассматривать уравнение неразрывности для решения уравнения Навье-Стокса, но для комплексной скорости, определяемой по формуле

$$V_k(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{-(E_k-E_{k+1})}+\alpha_k(x_1,x_2,x_3)+\sum_{s=1}^{n_r}\frac{1}{x_k-\beta_{sk}}=$$

$$=\sqrt{-(E_k-E_{k+1})}+\sum_{k=1}^{3}a_k(x_k-x_{ku})+b+\sum_{s=1}^{n_r}\frac{1}{x_k-x_{ku}-\beta_{sk}}, \qquad .$$

$$E_k=E_k(c_{000},...,c_{222}),a_k=a_k(c_{000},...,c_{222}),b=b(c_{000},...,c_{222}),\beta_{sk}=\beta_{sk}(c_{000},...,c_{222})$$

Уравнение неразрывности с комплексной скоростью имеет вид см. [4] (используется квадрат волновой функции, а не квадрат ее модуля в случае комплексной скорости)

$$\frac{\partial \ln \psi^2}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \ln \psi^2}{\partial x^k} V_k + div\mathbf{V}/2 + i\frac{3U}{\hbar} = 0$$

$$-i\frac{E}{\hbar} - \sum_{k=1}^{3} i\frac{mV_k^2}{\hbar} + div\mathbf{V}/2 + i\frac{3U}{2\hbar} = 0, \hbar = -2imv$$

$$p = 2\varepsilon/3 + \sum_{k=1}^{3} \frac{2\rho V_k^2}{3}, \varepsilon = \frac{\rho E}{m} = nE, div\mathbf{V} = 0,$$

$$p = \rho U/m = U_u(x_1, x_2, x_3) = \rho \sum_{s,p,q=0}^{2} c_{spq}(x_1 - x_{1u})^s (x_2 - x_{2u})^p (x_3 - x_{3u})^q / m$$

Где ε это плотность энергии, ρ плотность несжимаемой жидкости. Продифференцируем это уравнение по величине $x_k, k = 1,...,3$, взяв нулевую, первую и вторую производную и положим $x_k = x_{ku}$. Тогда получим 27 уравнений относительно коэффициентов $c_{spq}(x_{1u}, x_{2u}, x_{3u})$, определяя которые найдем значение давления.

Литература

1. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION I. THE GENERAL SOLUTION OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 60-66. https://world-science.ru/pdf/2016/3/14.pdf
2. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION II. THE USE OF LAMINAR SOLUTIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 67-83.https://world-science.ru/pdf/2016/3/15.pdf
3. YAKUBOVSKIY, E. G. "STUDY OF NAVIER–STOKES EQUATION SOLUTION III. THE PHYSICAL SENSE OF THE COMPLEX VELOCITY AND CONCLUSIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 84-87. https://www.world-science.ru/pdf/2016/3/16.pdf
4. Якубовский Е.Г. Квантовое уравнение неразрывности в случае комплексной скорости. «Энциклопедический фонд России», 2018, 3 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1505462732.pdf