Вычисление присоединенной массы

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

В гидродинамике вводится понятие присоединенная масса. Алгоритм ее вычисления в книге [1] не изложен. Зная, что процессы в жидкости подчиняются преобразованию Лоренца с фазовой скоростью звука, вместо скорости света, эту присоединенную массу можно вычислить в зависимости от скорости тела. Учтена форма и ориентация тела с помощью комплексного радиуса тела.

При ускоренном движении тела в жидкости, на него будет оказывать влияние сила, равная массе жидкости в объеме тела, умноженная на величину ускорения с обратным знаком. Это аналог выталкивающей силы для статического случая, которая не зависит от формы тела, а определяется ее объемом. Но как показал эксперимент и вычисления, приведенная масса для двигающегося тела зависит от формы тела. Для статической отрицательной силы Архимеда движение жидкости не учитывается, учет движения жидкости увеличивает эту отрицательную силу. Максимум этой силы равен нулю, а минимум не ограничен при движении со скоростью меньше фазовой скорости звука. Это значит, что добавка к массе тела положительная и не ограничена.

Для сферы приведенная масса равна $m = \rho V_0 / 2$, где V_0 объем сферы. Для произвольного тела масса комплексная и равна $m = \rho | V_0 | \exp(i \arg V_0) / 2$ (сведение произвольного тела к сфере см. [3]), где модуль этой величины определяет средний радиус тела, а фаза зависит от ориентации. Произвольное тело сводится к сфере одинакового радиуса, но фаза объема зависит от ориентации. Действительная масса определяется по формуле $m = \rho | V_0 | \sqrt{\cos^2(\arg V_0) + |\sin \arg V_0| \frac{R_{cr} \tan\delta + 1}{2}} / 2$ вычисление действительной величины по комплексной см. [4], где $\tan\delta$ среднеквадратичный тангенс угла наклона поверхности. Так как критическое число Рейнольдса определяется молекулярными шероховатостями имеем $R_{cr}\tan\delta \ge 1$ см. [4]. Граничные условия удовлетворяются так как при умножении комплексно сопряженных величина, фаза экспоненты сокращается в формуле (2). Формула определяется через средний радиус и без учета коэффициента Ламе равна $\pi R_0^2 = bl = S$. Приведенная масса равна $m = \frac{2}{3}\pi\rho R_0^3 = \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\rho S^{3/2} = \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\rho(bl)^{3/2}$. Так формула для прямоугольной пластинки $m = \frac{\pi\rho b^2 l^2}{4\sqrt{b^2+l^2}}(1-0.425\frac{bl}{b^2+l^2})$. В случае квадрата формулы совпадают с точностью до коэффициента $0.437 \approx 0.376$. В случае круглого диска формула определяет приведенную массу с точностью $8 \approx 2\pi$ по формуле $m = \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\rho S^{3/2} = \frac{2\pi}{3}\rho a^3$. Значения присоединенной массы занижены, использование коэффициента $\sqrt{\cos^2(\arg V_0) + |\sin\arg V_0|\frac{R_{cr}\tan\delta+1}{2}} > 1$ увеличивает значение присоединенной массы, причем она зависит от степени шероховатости. Для кругового цилиндра с отличной геометрии от сферы, имеем $m = \rho\pi a^2 L$, что соответствует статической выталкивающей силе Архимеда. Формула для среднего радиуса работает $m = \rho\int_0^L S(z)dz = \rho SL = \rho\pi a^2 L$ и соответствует массе объема тела.

Для объемного тела средний радиус определяется по формуле $\frac{4\pi}{3}R_0^3 = V_0$ Получаем формулу для приведенной массы $m = \rho V_0/2$. Для сферы получаем точное значение присоединенной массы.

Зависимость присоединенной массы от направления при потенциальном течении в основном определяется по формуле $\frac{a^2(\theta_1-\theta_0,\varphi_1-\varphi_0)a(\theta_{av}-\theta_0,\varphi_{av}-\varphi_0)}{\max\limits_{\theta,\varphi} a^3(\theta,\varphi)}$, где величина $r = a(\theta,\varphi)$ определяет уравнение границы тела при постоянном модуле (2). Используется теорема о среднем значении интеграла $\theta_{av} \approx \theta_1, \varphi_{av} \approx \varphi_1$.

Формула для кинетической энергии изменится $2T = -\rho \int\int \varphi^* \frac{\partial \varphi}{h_r \partial r} dS$, где h_r коэффициент Ламе, который вне переходной зоны равен единице см. [3].

Формула для потенциала гидродинамической задачи для идеальной жидкости для тела, имеющего уравнение границы $r = a(\theta, \varphi)$ имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{2} U \frac{a^2(\theta - \theta_0, \varphi - \varphi_0) a(\theta_1 - \theta_0, \varphi_1 - \varphi_0)}{r^2} \cos\theta . \qquad (1)$$

Распределение потенциала при удовлетворении граничным условиям под углами $\theta = \theta_1, \varphi = \varphi_1$ имеет такой вид. При удовлетворении граничным условиям во всех точках тела имеем потенциал $\varphi = \frac{1}{2} U \frac{a^2(\theta - \theta_0, \varphi - \varphi_0) a(\theta_1 - \theta_0, \varphi_1 - \varphi_0)}{r^2} \cos\theta$ и линии одинакового потенциала надо строить для этого потенциала. Формула справедлива для углов $\theta = \theta_1, \varphi = \varphi_1$, поэтому перепишем ее в виде $\varphi = \frac{1}{2} U \frac{a^{3/2}(\theta - \theta_0, \varphi - \varphi_0) a^{3/2}(\theta_1 - \theta_0, \varphi_1 - \varphi_0)}{r^2} \cos\theta$, используя все граничные условия. Линии тока надо строить, продифференцировав потенциал (1). Кинетическая энергия определяется при удовлетворении граничным условиям в направлении углов $\theta = \theta_1, \varphi = \varphi_1$ считается по формуле, откуда получаем зависимость приведенной массы от углов

$$\begin{aligned} 2T = -\rho \int\int \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = \frac{\rho U^2 a^2(\theta_1 - \theta_0, \varphi_1 - \varphi_0)}{2} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a(\theta - \theta_0, \varphi - \varphi_0) \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\varphi \end{aligned} . \qquad (2)$$

Формулу можно приближенно записать в виде

$$\begin{aligned} 2T = -\rho \int\int \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = \frac{\rho U^2 a^3(\theta_1 - \theta_0, \varphi_1 - \varphi_0)}{2} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{2\pi\rho U^2 a^3(\theta_1 - \theta_0, \varphi_1 - \varphi_0)}{3} \end{aligned} .$$

Причем для плоской фигуры данная формула не приспособлена.

Для сферы эта величина равна $2T=\frac{2\pi}{3}\rho a^3U^2, m=\frac{2\pi}{3}\rho a^3$ в произвольном направлении. Для цилиндра эта формула выглядит таким образом $\varphi=U\frac{a(\varphi-\varphi_0,z-z_0)a(\varphi_1-\varphi_0,z_1-z_0)}{r}\exp(i\varphi)$, где используются проекции на оси x_1,x_2. Решение получено в плоскости, ортогональной оси z. Формула для кинетической энергии имеет вид

$$2T=-\rho\int\int\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial r}dS=\rho U^2a^2(\varphi_1-\varphi_0,z_1-z_0)\int_0^{2\pi}\int_0^L\exp(-i\varphi+i\varphi)dzd\varphi/2$$

Делим на 2, так как определяются две проекции, на оси x_1,x_2. Для кругового цилиндра приведенная масса равна $2T=\pi\rho a^2LU^2, m=\pi\rho a^2L$ и одинакова в разных направлениях, при удовлетворении граничным условиям в любой точке. Вычисленное значение коэффициента пропорциональности для приведенной массы зависит от направления.

Справедлива закономерность между критическим числом Рейнольдса и максимальным действительным значением присоединенной массы, как для сферы, так и для произвольного тела

$$m=\frac{m_l}{\sqrt{1-\frac{\mu^2R_{cr}^2}{(\rho ac_F)^2}}}=\frac{m_l}{\sqrt{1-\frac{V_{cr}^2}{c_F^2}}}.$$

Где величина c_F это фазовая скорость жидкости, величина a, это характерный размер тела, который определяется по объему тела $4\pi a^3/3=V$. величина μ динамическая вязкость жидкости, ρ плотность жидкости, R_{cr} - критическое число Рейнольдса. Если выполняется условие $V_{cr}>c_F$, то преодолеть непрерывным образом звуковой барьер не удастся, присоединенная масса будет стремиться к бесконечности и действительная скорость перестанет расти, а значит не будет образовываться и мнимая часть. Существуют тела, для которых нельзя преодолеть звуковой барьер, а для некоторых тел это возможно. Критерием является отношение $V_{cr}>c_F$

или $\frac{\mu^2 R_{cr}^2}{(\rho a c_F)^2} > 1$. При выполнении этих условий звуковой барьер не преодолим.

Это связано с определением критического числа Рейнольдса. Оно определяется средним тангенсом наклона шероховатости $\frac{1}{R_{cr}} = \frac{da}{ds} = \frac{dl_{eff}}{ds} \cdot \frac{a}{l_{eff}} = \frac{1}{2300} \cdot \frac{a}{l_{eff}}$, где величина l_{eff} эффективный, гидродинамический размер тела, включая среду, a истинный геометрический размер тела, причем $\frac{dl_{eff}}{ds} = |\tan\varphi| = \frac{1}{2300}$ молекулярный тангенс наклона шероховатости.

Дальнейшее изменение присоединенной массы происходит за счет роста мнимой части скорости по формуле

$$m = \frac{m_l}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2 (R_{cr} + i \operatorname{Im} R)^2}{(\rho a c_F)^2}}}.$$

Формула $R = R_{cr} + i \operatorname{Im} R$, определяет турбулентное течение как комплексное, начиная с критического числа Рейнольдса. Критическое число Рейнольдса определяет максимальную действительную часть скорости потока. Мнимая часть скорости означает среднеквадратичное отклонение скорости. Причем мнимая часть скорости дает вклад в поступательную часть скорости см. [4] стр. 8-13. Причем использование комплексной скорости приведет к преодолению звукового барьера, так как комплексный знаменатель в ноль не обращается, а скорость растет за счет роста мнимой части. Значение знаменателя растет с ростом мнимой части, так как квадрат мнимой растущей части положителен.

Поэтому уравнение движения тела в жидкости имеет вид $M \frac{du_k}{dt} + \frac{dP_k}{dt} = f_k$.

Где первый член описывает движение тела, а второй член импульс жидкости. Импульс жидкости считается по формуле $P_k = \frac{mu_k}{\sqrt{1-u^2/c_F^2}}$, где используется масса жидкости в объеме тела, скорость жидкости равна скорости тела и вместо скорости света в вакууме в релятивистском знаменателе стоит фазовая скорость звука. Причем для кинетической энергии справедливо $T = \frac{mc_F^2}{\sqrt{1-u^2/c_F^2}} - mc_F^2$, где кинетическая энергия считается для присоединенной массы m, равной массе жидкости в комплексном объеме тела, причем эта кинетическая энергия жидкости, являющейся внешней частью тела. Форма тела учитывается фазой комплексного объема, а объем тела учитывается модулем комплексного объема. Масса частицы получается комплексная. Для сферы фаза объема нулевая, и масса действительная. Для релятивисткой частицы удовлетворяется формула (2), определяющая присоединенную массу.

Комплексный k-мерный объем считается по формуле

$$V_k = \int_0^{2\pi}\int_0^{Z} z^{k-1}dzd\varphi = \begin{cases} 2\pi Z, k=1 \\ \pi Z^2, k=2 \\ 2\pi Z^3/3, k=3 \end{cases}.$$

Где величина Z комплексная, и определяет половину действительного объема в трехмерном случае. Присоединенная масса трехмерного объема равна половине массы жидкости в объеме тела, что соответствует массе в случае сферического тела с комплексным радиусом. В цилиндрическом случае масса соответствует комплексной массе в объеме тела. Комплексный радиус считается с помощью преобразования координат см. [3].

Данную формулу надо применять к жидкости и нельзя применять к движущемуся телу. В вакууме для движущегося тела необходимо использовать релятивистский знаменатель со скоростью света в вакууме. Движущееся тело состоит из частиц вакуума, которые группируясь подчиняются преобразованию Лоренца, но релятивистский знаменатель появился из-за того, что тело помещено в среду, состоящую из частиц вакуума, причем масса тела определяется массой частиц вакуума. Для жидкой среды, состоящей из элементарных частиц, справедливо преобразование Лоренца с фазовой скоростью звука. Твердое тело состоит из элементарных частиц, двигающихся в среднем со звуковой скоростью, плюс колеблющиеся частицы, причем в твердом теле несколько значений скорости звука. Осуществляя линейное преобразование пространства анизотропного тела, удается построить изотропное пространство и преобразование Лоренца см. [2] стр. 59, но это свойства описания внутренней части тела. В несжимаемой жидкости, состоящей из элементарных частиц, звуковые волны описываются волновым уравнением, причем можно ввести уравнение Максвелла для жидкости см. [2] стр. 34-37 и, следовательно, для них справедливо преобразование Лоренца. Но справедливо ли преобразование Лоренца с фазовой скоростью звука в жидкости для тела, находящегося в жидкости, т.е. имеется ли у макротел релятивистский знаменатель со скоростью звука? Нет не имеется. Количество частиц вакуума в единице частиц вакуума, одном кванте, не равно числу Авогадро и не является константой, поэтому зависимость импульса от скорости является нелинейной в уравнении 2 закона Ньютона и является функцией от средней скорости частиц вакуума, или скорости элементарной частицы. Количество элементарных частиц в одном моле равно числу Авогадро, значит нелинейный множитель равен постоянной константе - массе частицы, и импульс линейно зависит от скорости, т.е. у макротел релятивистского знаменателя с фазовой скоростью звука нет. Так как макротела состоят из частиц вакуума релятивистский знаменатель с фазовой скоростью света во 2 втором законе Ньютона есть. Скорость макротел не складывается по релятивистской формуле с фазовой скоростью звука вместо скорости света, а справедлив закон сложения скоростей с фазовой скоростью света. Для среды справедливо преобразование Лоренца с фазовой скоростью звука проявляющееся в присоединенной массе.

Надо отметить что потенциал частицы величина дискретная и зависит от целых чисел и определяется логарифмом волновой функции квантовой механики с постоянной Планка, равной $\hbar = im\nu$, где используется кинематическая вязкость среды и масса двигающегося тела. Значит присоединенная масса определяется не однозначно, зависит от скорости частицы и от квантовых чисел.

Подставляя значение импульса жидкости в объеме тела, получим

$$M\frac{du_k}{dt} + \frac{d}{dt}\frac{mu_k}{\sqrt{1-u^2/c_F^2}} = f_k$$

$$M\frac{du_k}{dt} + \left(\frac{m\delta_{kn}}{\sqrt{1-u^2/c_F^2}} + \frac{mu_k u_n/c_F^2}{(1-u^2/c_F^2)^{3/2}}\right)\frac{du_n}{dt} = f_k .$$

Формула для релятивистского знаменателя в случае анизотропного тела сложна см. [2] стр. 59 и ее не выписываем. Присоединенная масса в изотропной жидкости равна $m_{kn} = \frac{m\delta_{kn}}{\sqrt{1-u^2/c_F^2}} + \frac{mu_k u_n/c_F^2}{(1-u^2/c_F^2)^{3/2}}$, где присоединенная масса m равняется массе жидкости в объеме тела. Выполняется соотношение (2), т.е. формула для кинетической энергии точная, и формула с релятивистским знаменателем правильно описывает присоединенную массу. Кинетическая энергия присоединенной массы равна кинетической энергии жидкости в объеме тела.

Следовательно все предыдущие формулы справедливы для идеальной потенциальной жидкости и только формула с релятивистским знаменателем правильно описывает движение тела в жидкости и кинетическую энергию жидкости.

Уравнение движения тела в жидкости имеет вид

$$(M\delta_{kn}+m_{kn})\frac{du_n}{dt}=f_k\,.$$

В книге [1] выведена формула, определяющая скорость движения в идеальной жидкости

$$\frac{dMu_k}{dt}=\rho V_0\frac{dv_k}{dt}-m_{kn}\frac{d}{dt}(u_n-v_n)\,.$$

Где u_k скорость тела в потоке жидкости, v_k скорость жидкости в объеме тела, если бы тела не было. Интегрируя это выражение, получим скорость тела в потоке, если бы тело не нарушало поток жидкости

$$(M\delta_{kn}+m_{kn})u_n=(m_{kn}+\rho V_0\delta_{kn})v_n\,.$$

При плотности тела, равной плотности жидкости $M=\rho V_0$ тело движется со скоростью жидкости. При этом тело не возмущает жидкость и тело не создает тягу. Если бы тело возмущало жидкость, со стороны жидкости действовали бы дополнительные силы.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: «Наука», 1983г., 735 стр.
2. Якубовский Е.Г. По поводу преобразований Лоренца. «Энциклопедический фонд России», 2017, 94 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1504051609.pdf
3. Якубовский Е.Г. Преобразование произвольного тела в сферу комплексного радиуса. «Энциклопедический фонд России», 2017, 18 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1492726821.pdf
4. Якубовский Е.Г. Исследование решения уравнения Навье – Стокса II «Энциклопедический фонд России», 2017, 61 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1509211918.pdf