Физический смысл уравнений
квантовой механики, электродинамики и уравнения ОТО

Е.Г.Якубовский.

НМСУГ e-mail yakubovski@rambler.ru

Оглавление

Аннотация

Уравнение квантовой механики описывают волновую функцию, квадрат модуля которой, умноженный на приращение координат, равен вероятности данного состояния. Оказывается, что уравнения квантовой механики эквивалентны уравнению движения Ньютона, записанного для непрерывной среды в форме уравнения Навье - Стокса. Имеется связь между скоростью частиц вакуума и волновой функцией, описывающей этот же процесс

$V_l = -\frac{i\hbar}{m}\nabla_l \ln\psi$, где V_l определяемая из уравнения Навье – Стокса скорость частиц вакуума, а ψ волновая функция системы, определяемая из уравнения Шредингера. Причем в локальной системе координат решение уравнения Шредингера записывается в виде

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}}\exp\{-i(E\Delta t - \mathbf{p}_0\Delta\mathbf{r})/\hbar\}[1+0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^3],$$

откуда $\mathbf{V} = -\frac{i\hbar}{m}\nabla\ln\psi = \mathbf{p}_0 / m[1+0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2]$. Причем уравнения Навье – Стокса описывают поведение частиц вакуума, свойства которых описаны во втором разделе статьи. Причем поведение каждой частицы вакуума в отдельности описывают законы движения Ньютона в форме уравнения Навье – Стокса и квантовая механика. Причем квантовая механика также описывает вероятностным образом элементарные частицы, образовавшиеся в результате взаимодействия частиц вакуума. Частицы вакуума гораздо мельче, чем элементарные частицы, причем их совокупность описывается волновой функцией. Т.е. в некотором смысле они образуют элементарные частицы, которые вероятностным образом описываются уравнением квантовой механики. При этом понятны реакции, происходящие между элементарными частицами, это перестройка решения задачи N тел или уравнения Навье – Стокса из одного вида решения в другое. При этом квантовые числа уравнений квантовой механики и уравнения Навье - Стокса сохраняются. При этом для частиц вакуума, описываемых непрерывной средой вводится понятие линии тока, для турбулентного режима координаты линий тока являются пульсирующими. Степень пульсации определяет мнимая часть комплексной скорости. Дискретность энергии счетного количества решений уравнения Навье - Стокса для турбулентного режима доказана в [1] теорема 2 стр. 44, теорема 3, стр. 47. Кроме того в [1] доказано, что турбулентное решение является комплексным теорема 1, стр. 31. Так как частицы вакуума подчиняются уравнению Навье – Стокса к ним применимы классические законы механики

Ньютона и принцип неопределенности не действует. Принцип неопределенности справедлив для элементарных частиц.

Кроме того, частицы вакуума описывают физический смысл напряженности электромагнитного поля и метрического тензора ОТО. Точно также как материальные тела изменяют свойство пространства, изменяя его диэлектрическую и магнитную проницаемость, частицы вакуума изменяют свойства пространства, из декартового делают его римановым, с отличающейся от декартова пространства метрикой, другим поведением времени в разных системах отсчета.

1. Связь волновой функции элементарных частиц со скоростью частиц вакуума.

Опишем частицы вакуума как непрерывную среду, подчиняющуюся уравнению Навье – Стокса. Для модели разреженного газа с малой скоростью движения, моделирующей свойства вакуума, справедливо уравнение Навье - Стокса.

$$\frac{\partial V_l}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_l}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\rho \partial x_l} + \nu \Delta V_l .$$

Причем кинематическая вязкость вакуума считаем равной

$$\nu = i\frac{\hbar}{2m}. \qquad (1.1)$$

При этом скорость потока мельчайших частиц вакуума равна $V_l = -\frac{i\hbar}{m}\nabla_l \ln\psi$, где ψ волновая функция системы. При этом решение уравнения Навье – Стокса должно удовлетворять условию $\frac{\partial V_l}{\partial x_k} - \frac{\partial V_k}{\partial x_l} = 0, \mathrm{rot}\mathbf{V} = 0$. Для выполнения этого условия решение уравнения Навье – Стокса должно удовлетворять условию $V_l = V(x^1 + x^2 + x^3)$. Т.е. получается, что решение уравнения Шредингера, это частный случай решения уравнения Навье – Стокса.

Но каким образом описать решение для водородоподобного атома, используя предлагаемую идеологию. Для этого импульс надо представить в виде $p_k = p_k(x_k)$, при этом для волновой функции справедливо разделение переменных. Логарифм волновой функции $\ln\psi(r,\theta) = \ln R_{nl}(r) + \ln P_l^m(\theta) + \ln\exp(i\, m\varphi)$ является потенциалом для значения импульса, и удовлетворяет условию интегрирования. Т.е. импульс представляет сумму трех функций

$$p_r(r) = \hbar\frac{\partial \ln R_{nl}(r)}{\partial ir}, L_\theta(\theta) = rp_\theta(\theta) = \hbar\frac{\partial \ln P_l^m(\theta)}{\partial i\theta}, L_\varphi = r\sin\theta\cdot p_\varphi = \hbar\frac{\partial im\varphi}{\partial i\varphi} = \hbar m,$$

удовлетворяющих условию интегрирования.

Покажем, что скорость частицы, описываемая законом движения Ньютона для жидкости, непосредственно связана с волновой функцией, описываемой квантовой механикой. Подставим это значение скорости в уравнение Навье – Стокса

$$\frac{\partial i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{m^2}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_l}\frac{\partial\nabla\ln\psi}{\partial x_l} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi}{\partial x_l^2} + \nabla\int_{t_0}^{t}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}V_k dt.$$

Где интеграл берется вдоль линии тока частиц $V_k dt = dx_k$, $\int_{t_0}^{t}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}V_k dt = \int_{(x_1^0,x_2^0,x_3^0)}^{(x_1,x_2,x_3)}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}dx_k$. Причем частная производная от этого интеграла вдоль линии тока, равна

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\int_{(x_1^0,x_2^0,x_3^0)}^{(x_1,x_2,x_3)}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}dx_k = \frac{d}{V_l dt}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}V_k dt = \frac{\partial p}{V_l\rho\partial x^k}V_k = \frac{dp}{V_l\rho dt} = \frac{\partial p}{\rho\partial x^l}$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\nabla[\frac{\partial i\frac{\hbar}{m}\ln\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{m^2}(\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_l})^2/2 + \frac{\hbar^2}{2m^2}\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x_l^2} - \int_{t_0}^{t}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}V_k dt] = 0.$$

Проинтегрируем градиент, получим

$$i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m^2}(\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l})^2=-\frac{\hbar^2}{2m^2}\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2}+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}V_k dt=-\frac{\hbar^2}{2m^2}\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2}+U/m.$$

Умножим на массу $m\psi$, перенесем второй член в правую часть, получим уравнение Шредингера, причем справедливо $\frac{\partial^2\psi}{\partial x_l^2}=\psi[\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2}+\frac{1}{\psi^2}(\frac{\partial\psi}{\partial x_l})^2]$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\psi[\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2}+\frac{1}{\psi^2}(\frac{\partial\psi}{\partial x_l})^2]+\psi\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}V_k dt=$$
$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_l^2}+U\psi;U=m\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}V_k dt$$

Т.е. для скорости частиц вакуума получено уравнение Шредингера, причем волновая функция этого уравнения связанна со скоростью частиц соотношением $V_l=-\frac{i\hbar}{m}\nabla\ln\psi$ или $\psi=c\exp(i\int mV_l dx_l/\hbar)$, где потенциал равен $U=m\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}V_k dt=m\int\limits_{(x_1^0,x_2^0,x_3^0)}^{(x_1,x_2,x_3)}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}dx_k$. Решение можно представить в виде локальной плоской волны

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{V}}\exp[-i(E\Delta t-\mathbf{p}_0\Delta\mathbf{r})/\hbar][1+0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^3].$$

Эта формула является решением уравнения Шредингера в окрестности точки $\mathbf{r}_0$ и при подстановке ψ в этом виде в уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_l^2}+U_0\psi+0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\psi$$

Получаем равенство

$$E\psi==[\frac{p_0^2}{2m}+U_0+0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)]\psi+0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\psi$$

Это уравнение сводится к тождеству $E=\frac{p_0^2}{2m}+U_0$. А величина скорости равна $\mathbf{V}=\frac{\mathbf{p}_0}{m}+0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2$ в окрестности точки $\mathbf{r}_0$.

При этом равенство $V_l = -\frac{i\hbar}{m}\nabla_l \ln\psi$ можно представить в виде $p_{lk}\psi_k = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi_k}{\partial x^l}$, где p_{lk} импульс k состояния частицы, откуда имеем определение оператора импульса $p_l = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^l}, l = 1,...,3$. При этом, волновую функцию суперпозиции состояний можно представить в виде $\psi = \sum_k a_k\psi_k$, где ψ_k собственная функция разных состояний. При умножении волнового числа на константу, собственное число не меняется. Значит, не меняется и импульс частиц вакуума. В результате измерения получится одно из собственных чисел p_{lk}, определяющих одно из состояний, в силу ортогональности собственных функций. В самом деле, имеем, умножая на величину ψ_p, $\psi = \sum_k \psi_k$ уравнение $p_{lk}\psi_k\psi_p^* = \psi_p^*\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi_k}{\partial x^l}$ при условии $k \neq p$ волновые функции ортогональны, значит и правая часть ортогональна. Т.е. в сумме по индексу k останется только член $p_{lp}\psi_p\psi_p^* = \psi_p^*\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi_p}{\partial x^l}$, значит, реализуется только одно из состояний с индексом p. Т.е. импульс частиц вакуума является собственным числом оператора импульса.

Имеем формулу

$$P_l\psi_p = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi_p}{\partial x^l}, \qquad (1.2)$$

т.е. определенная таким образом величина P_l является значением величины импульсов. Запишем комплексно сопряженное уравнение

$$-P_l^*\psi_p^* = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi_p^*}{\partial x^l}. \qquad (1.3)$$

Умножим уравнение (1.2) на величину ψ_P^*, а уравнение (1.3) на величину ψ_p и сложим эти уравнения, получим $2i\,\mathrm{Im}P_l\psi_p\psi_p^* = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi_p^*\psi_p}{\partial x^l}; \mathrm{Im}P_l = -\hbar\frac{\partial\ln\sqrt{\psi_p^*\psi_p}}{\partial x^l}$.

При этом правая часть положительна в случае возрастающей функции $\ln\sqrt{\psi_p^*\psi_p}$ и определяет мнимую часть импульса. Волновая функция оператора мнимой части импульса равна $\sqrt{\psi_p^*\psi_p}$. Но в результате получился не эрмитов оператор, так как он определяет мнимую часть импульса. Оператор, который получается делением (1.2) на волновую функцию ψ_p и делением (1.3) на волновую функцию ψ_p^*, интегрированием и вычитанием, получим $\operatorname{Re}P_l = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial \ln\sqrt{\psi_p/\psi_p^*}}{\partial x^l} = \hbar\frac{\partial \arg\psi_p}{\partial x^l}$, определяет действительную часть импульса, причем волновая функция равна $\exp(i\arg\psi)$.

Или имеем собственное нулевое значение $\operatorname{Im}P_l$ с волновой функцией $\sqrt{\psi_p\psi_p^*}$. Собственное значение $\operatorname{Im}P_l$ обязательно реализуется, в случае, если модуль волновой функции не константа. Причем волновая функция, полученная в результате измерения собственного значения $\operatorname{Im}P_l$, равна функции $\sqrt{\psi_p\psi_p^*}$. При этом волновая функция комплексного импульса равна $p_l = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial(\ln\sqrt{\psi^*\psi} + i\arg\psi)}{\partial x^l} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^l}$ в случае, если пространство действительно. Или имеем собственное нулевое значение $\operatorname{Im}P_l$ с волновой функцией $\sqrt{\psi_p\psi_p^*}$. При этом собственное значение $\operatorname{Im}P_l$ обязательно реализуется, в случае, если модуль волновой функции не константа. Причем на языке квантовой механики волновая функция, полученная в результате измерения собственного значения $\operatorname{Im}P_l$, равна функции $\sqrt{\psi_p\psi_p^*}$. При этом волновая функция комплексного импульса равна $p_l = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial(\ln\sqrt{\psi^*\psi} + i\arg\psi)}{\partial x^l} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^l}$ в случае, если пространство действительно. В случае комплексного пространства имеем

$p_l = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial \ln \psi}{\partial x^l} = \frac{\hbar}{2i}(\frac{\partial \ln \psi}{\partial \mathrm{Re}\, x^l} - i\frac{\partial \ln \psi}{\partial \mathrm{Im}\, x^l})$. Причем действительная и мнимая часть равна $\mathrm{Re}\, p_l = \frac{\hbar}{2}(\frac{\partial \arg \psi}{\partial \mathrm{Re}\, x^l} - \frac{\partial \ln \sqrt{\psi\psi^*}}{\partial \mathrm{Im}\, x^l})$, $\mathrm{Im}\, p_l = -\frac{\hbar}{2}(\frac{\partial \ln \sqrt{\psi\psi^*}}{\partial \mathrm{Re}\, x^l} + \frac{\partial \arg \psi}{\partial \mathrm{Im}\, x^l})$.

Введем понятие локального импульса среды по формуле $p_l = -i\hbar\nabla_l \ln \psi$, где величина ψ волновая функция электрона. Для атома водорода она равна $\psi = R_{kl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$. При этом, используя локальный импульс среды можно записать решение уравнения Шредингера в виде

$$\psi = \exp[-i(E\Delta t - p_l\Delta x^l)][1 + O(\Delta x^l)^3].$$

Где $E = i\hbar\partial_t \ln \psi, p_l = -i\hbar\partial_l \ln \psi$. При этом если локальный импульс действителен, то плотность вероятности равна константе, что определяет действительное значение импульса. Но плотность вероятности в общем случае и в частности в атоме водорода не константа, значит, энергия и импульс имеют комплексное значение. Тогда плотность вероятности зависит от координат. Если энергия и импульс являются комплексными, это означает комплексность координат и времени.

Покажем, что собственное значение энергии может быть комплексным. Так для ямы постоянной глубины U_0 размером a, см. задачу в [7] к параграфу §22. Вне ямы решение имеет вид $\psi_n = b\exp(\pm\chi_n x), \chi_n = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E_n)}$. Внутри ямы решение ищем в виде $\psi_n = c\sin(k_n x + \delta), k_n = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}$.

Условие непрерывности волновых функций ψ_n' / ψ_n на границе ямы, определяет решение

$$\sin\delta = \frac{k_n\hbar}{\sqrt{2mU_0}} \qquad \sin(k_n a + \delta) = -\frac{k_n\hbar}{\sqrt{2mU_0}}$$

Вычисления надо производить аккуратно, с учетом всех тонкостей периодических функций. При этом имеем одинаковые ветви у арксинуса

$\delta = (-1)^p \arcsin\frac{k_n \hbar}{\sqrt{2mU_0}} + \pi p, k_n a + \delta = -(-1)^p \arcsin\frac{k_n \hbar}{\sqrt{2mU_0}} + \pi p$. При условии p нечетном, получаем уравнение, где в неявном виде задано значение энергии

$$k_n a = 2\arcsin\frac{k_n \hbar}{\sqrt{2mU_0}} = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar} a = 2\arcsin\sqrt{\frac{E_n}{U_0}}$$

Откуда определится конечное число действительных и счетное количество комплексных значений энергии E_n во всем пространстве. Комплексное значение E_n получается при значении аргумента у арксинуса больше единицы.

При комплексной энергии образуются квазистационарные состояния с комплексной волновой функцией. Это состояние продлится не долго, частица перейдет на действительные уровни энергии. Обозначим $y = \arcsin(\frac{(4n+2\varphi_n)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}})$, из этого уравнения имеем действительное решение

$$y = -i\ln[i\frac{(4n+2\varphi_n)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}} + \sqrt{1-(\frac{(4n+2\varphi_n)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}})^2}\,] + 2\pi n,$$

откуда имеем

$$k_n a = 4\pi n + 2\varphi_n, \varphi_n = \arg[\sqrt{1-(\frac{(4n+2\varphi_n)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}})^2} + i\frac{(4n+2\varphi_n)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}}].$$

Где величина φ_n определится из нелинейного уравнения и приближенно равна $\varphi_n = \arg[\sqrt{1-(\frac{4n\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}})^2} + i\frac{4n\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}}]$.

Для комплексного корня имеем значение $y = \arcsin(\frac{(4n+1)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}})$.

$y = -i\ln\{i\frac{(4n+1)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}}[1+\sqrt{1-(\frac{a\sqrt{2mU_0}}{(4n+1)\pi\hbar})^2}\,]\} + 2\pi n + O(\frac{a\sqrt{2mU_0}}{(4n+1)\pi\hbar})$, где для арксинуса использовано главное значение, как и для квадратного корня, а для образовавшегося логарифма имеется счетное количество ветвей. Асимптотика решения для комплексного корня равна

$$k_n a = 4\pi n - 2i\ln\{i\frac{(4n+1)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}}[1+\sqrt{1-(\frac{a\sqrt{2mU_0}}{(4n+1)\pi\hbar})^2}\,]\} + O(\frac{a\sqrt{2mU_0}}{(4n+1)\pi\hbar}) =$$
$$= \pi(4n+1) - 2i\ln\frac{(4n+1)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}} + O(\frac{a\sqrt{2mU_0}}{(4n+1)\pi\hbar}).$$

Причем для комплексного корня при большом значении n выполняется $\frac{(4n+1)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}} >> 1$.

Имеем $\chi_n = \sqrt{-a+bi} = \sqrt{a^2+b^2}\exp(i\varphi), \varphi \in [\pi/4, \pi/2]$, при условии, что мнимая часть b положительная. При этом вне стационарной ямы знак величины b определяется знаком $\operatorname{Im}(U_0 - E_n)$, т.е. этот знак положителен в силу отрицательной мнимой части у величины E_n. Имеем условие $\operatorname{Re}\chi_n > 0$ в силу условия на фазу χ_n, и значит, затухание сохранится при колебательном решении. При этом ветви всех функций, входящих в одну формулу, одинаковы. Внутри стационарной ямы волновая функция равна

$$\psi_n = c[\sin(\operatorname{Re}k_n x + \delta)\cosh(\operatorname{Im}k_n x) + i\cos(\operatorname{Re}k_n x + \delta)\sinh(\operatorname{Im}k_n x)] =$$
$$= c\sqrt{\sin^2(\operatorname{Re}k_n x + \delta) + \sinh^2(\operatorname{Im}k_n x)}\exp(i\varphi), 0 < x < a.$$

Получается, что комплексное значение энергии при большом значении n имеет физический смысл.

Чем же это объясняется? Дело в том, что модель действительного пространства для объяснения всех эффектов квантовой механики не достаточна. Возникают комплексные собственные значения. Значит надо строить модель квантовой механики в комплексном пространстве. При этом операторы импульса и энергии не будут эрмитовые. Докажем, что оператор импульса не эрмитов в комплексном пространстве. Он равен $\hat{p}_x\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}$

$$\int \varphi^* \hat{p}_x\psi dxdydz = -i\hbar\int \varphi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdydz = i\hbar\int\psi\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}dxdydz =$$
$$= [-i\hbar\int\psi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x^*}dx^*dy^*dz^*]^*.$$

Если пространство действительно, то получим перестановку волновых функций и комплексно сопряженное значение выражения в квадратных скобках, и значит оператор импульса эрмитов. Но если пространство комплексное, то оператор будет не эрмитов.

Покажем, что уравнение Шредингера определяет уравнение неразрывности. Для этого запишем уравнение Шредингера и комплексно сопряженное уравнение

$$i\hbar\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi^*\Delta\psi + U\psi^*\psi$$
$$-i\hbar\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi\Delta\psi^* + U\psi\psi^*.$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим

$$i\hbar\frac{\partial\psi^*\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}(\psi^*\Delta\psi - \psi\Delta\psi^*).$$

Воспользуемся тождеством

$$\psi^*\Delta\psi - \psi\Delta\psi^* = \mathrm{div}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$$

Получим равенство

$$\frac{\partial\psi^*\psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\mathrm{div}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) =$$
$$= \frac{\hbar}{2m}\mathrm{div}[\psi^*\psi(i\nabla\ln\psi - i\nabla\ln\psi^*)] = -\mathrm{div}(\psi^*\psi\mathbf{V}),$$
$$\frac{\partial\psi^*\psi}{\partial t} + \mathrm{div}(\psi^*\psi\mathbf{V}) = 0 \qquad .(1.4)$$
$$\mathbf{V} = (\mathbf{V}_{NS}^* + \mathbf{V}_{NS})\cdot 0.5 = \frac{\hbar}{2m}(i\nabla\ln\psi^* - i\nabla\ln\psi) =$$
$$= \pi c(i\nabla_k\ln\psi^* - i\nabla_k\ln\psi), \nabla_k = \frac{\partial}{\partial k\mathbf{r}}, k = mc/\hbar, \frac{im\mathbf{V}_{NS}}{\hbar} = \nabla\ln\psi$$

Причем в уравнении неразрывности используется действительная скорость, которая получена как действительная часть комплексной скорости. Т.е. получаем уравнение неразрывности потока с плотностью $\psi^*\psi$ и соответствующей скоростью потока.

Причем величина $\psi^*\psi$ играет роль плотности среды. А величина скорости равна $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}_0}{m} + 0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. Получается, что скорость частиц среды определяется градиентом логарифма волновой функции.

При этом возникает идея определения плотности тел с помощью волновой функции. Для этого необходимо определить коэффициент пропорциональности у квантовой плотности вращающейся частицы – электрона. Определим плотность электрона $\psi^*\psi\rho_e$, где величина ρ_e плотность вещества, атомы которых исследуются. При интегрировании по части пространства квадрата модуля волновой функции получится величина меньше единицы, и окажется, что получится величина плотности вещества. Электрону соответствует радиус $r = a_0$, где a_0 это радиус Бора. При этом удаленной точке соответствует знак $r = \infty$. Относительно электрона атом и удаленная точка лежат по разную сторону сферической области, образующей облако электронов.

При этом основному состоянию атома соответствует нормированная волновая функция $\psi = 2\exp(-r)$. Значит, плотность данного вещества выражается через плотность электрона $\rho_e = \frac{3m_e}{4\pi r_e^{3/2} a_0^{3/2}}$, где согласно формуле (1.5) имеем значение радиуса электрона $r_e = \frac{c}{w} = \frac{\hbar}{2mc} = 1.931 \cdot 10^{-11} cm$.

Плотность данного вещества равна $\rho = \rho_e \int\limits_V |\psi|^2 \, dV$, при этом вклад ядра мал в связи с наличием орбитального момента у основных элементов таблицы Менделеева. Значит равенства нулю вклада волновой функции, равного $r^2 |\psi|^2 = r^{2(l+1)}$ при радиусе, равном нулю, т.е. волновая функция ядра равна нулю и ядро в определении плотности атома не участвует. Кроме того, волновая функция при условии $r < 1/Z$, где Z заряд ядра, пропорциональна $1/Z^2$ см. [7].

$$\rho_e \int_0^{a_0} 4\exp(-2r)r^2 dr = \rho_e[1-(2a_0^2+2a_0+1)\exp(-2a_0)] = \rho(A)$$

Где a_0 безразмерный размер атома элемента с массовым числом A, для атома водорода он равен единице. Где ρ плотность данного вещества, вычисленная в размерности g/cm^3. Вычисленная на основании этой формулы плотность электрона отражена на графике натурального логарифма подсчитанной плотности в зависимости от массового числа A элемента таблицы Менделеева

Величина $f(A) = \lg \dfrac{\rho(A)}{\rho_e \int_0^{a_0} 4\exp(-2r)r^2 dr} = 0$ должна равняться нулю.

Отклонения графика определяются не применимостью волновой функции атома водорода для расчета других элементов таблицы Менделеева. Кроме того, имеется неточность определения размера атома для каждого элемента.

Вычислим, какова скорость собственного вращения квантовой частицы и каков ее размер. Для этого подсчитаем момент инерции электрона при его волновой функции

$$\psi = \exp(-\alpha w \cdot \sqrt{x^2+y^2}/c + iw\sqrt{x^2+y^2}/c + iEt/\hbar) =$$
$$= \exp(-\alpha w \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}\sin\theta/c + iw\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sin\theta/c + iEt/\hbar)$$

Где параметр α определяется из численного эксперимента и оказывается равным нулю. Механический момент импульса определяет оператор спина элементарной массы для сферического объема частицы $\hat{d}\mathbf{J} = (\frac{\mathbf{w}\hat{r}^2 dm}{\sqrt{1-\frac{w^2 r^2 \sin^2\theta}{c^2}}})$

с собственным значением $\hat{d}\mathbf{J}\psi = \frac{\mathbf{w}r^2 dm}{\sqrt{1-\frac{w^2 r^2 \sin^2\theta}{c^2}}}\psi$. При этом при суммировании по объему частицы, получим $\hat{\hbar s}\psi = \pm\frac{\hbar}{2}\psi$, равным $mcr = \hbar/2$, что докажем в дальнейшем, где r радиус сферической частицы. При этом при изменении направления импульса частицы спин сохраняется вдоль импульса частицы. Это свойство называется спиральностью. Поэтому оператор спина не равен $\mathbf{J} = [\mathbf{r},[\mathbf{w},\mathbf{r}]] = \mathbf{w}r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{w},\mathbf{r})$, а предполагается $\mathbf{r}(\mathbf{w},\mathbf{r}) = 0$, что справедливо так как

$$r^2 < \mathbf{e}_l(\mathbf{w}_k, \mathbf{e}_k) >= r^2 w < \mathbf{e}_l \cos(\mathbf{w}_k \hat{,} \mathbf{e}_k) > = r^2 w < \mathbf{e}_l > const = 0 .$$

Согласно свойству спина частицы проекция спина на произвольную ось имеет постоянное полу целое значение, т.е. имеем $\cos(\mathbf{w}_k \hat{,} \mathbf{e}_k) = const$, значит, усреднение второго члена векторного произведения сводится к усреднению радиуса частицы по углам и равно нулю. Когда спин на определенной оси определен и, допустим, равен $1/2$, вероятность проекции спина на расположенную под углом ось равна $w_+ = \cos^2\theta/2, w_- = \sin^2\theta/2$ см. [7], но в данном случае спин не определен.

Определим потенциал, соответствующий данной волновой функции. Для этого воспользуемся уравнением Клейна-Гордона.

$$(-i\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{e\varphi_e}{c})(-i\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{e\varphi_e}{c})\psi + \hbar^2\Delta\psi = m^2c^2\psi .$$

Подстановка волновой функции приводит к уравнению по определению потенциала и собственной энергии частицы (причем в результате вычислений получим $\alpha = 0$).

$$\hbar^2 \frac{\Delta\psi}{\psi} = \hbar^2 (\frac{3iw}{cr} - \frac{w^2}{c^2}) =$$
$$= m^2c^2 - \frac{(E + e\varphi_e)^2}{c^2} = m^2c^2 - \frac{(E+U)^2}{c^2}.$$

Т.е. потенциальную энергию, которая определяется с точностью до начальных условий, и которая определится из уравнения $\frac{U^2 + 2UE}{c^2} = \frac{3iw}{cr}\hbar^2$ и собственное значение энергии $E^2 = m^2c^4 - \hbar^2 w^2 \alpha^2 + \hbar^2 w^2$, причем в результате вычислений получено значение $\alpha = 0$, т.е. поле внутри частиц определяется из квадратного уравнения

$$U = -E + \sqrt{E^2 + 3i\hbar^2 wc/r} = \frac{3i\hbar^2 wc}{2Er}$$

Собственное значение энергии частицы равно $E = \sqrt{m^2c^4 + \hbar^2 w^2}$.

Но каков механизм образования этой потенциальной энергии из частиц вакуума. Под действием магнитного поля реликтового излучения эти частицы вакуума вращаются с радиусом, близким к радиусу элементарной частицы, в данном случае к радиусу электрона.

В вакууме имеется электромагнитное поле, связанное с реликтовым излучением. При этом траектории частиц вакуума закручиваются. В случае движения частицы в постоянном магнитном поле имеем формулу для частоты вращения

$$\omega = \frac{qcH}{\mathrm{E}} = \frac{ecH}{\mathrm{E}}\sqrt{\frac{l}{r_r}}.$$

Где используется эффективный заряд частиц вакуума $q = e\sqrt{\frac{l}{r}}$. При этом радиус вращения определяется по формуле

$$r_r = \frac{\sqrt{V^2 - V_{0t}^2}}{\omega} = \frac{\sqrt{V^2 - V_{0t}^2}\mathrm{E}}{ecH}\sqrt{\frac{r_r}{l}}.$$

В результате двух уравнения, для частицы с собственной вращательной скоростью элементарной частицы $\sqrt{V^2 - V_{0t}^2}/c = r_r\omega/c = \alpha = 1.15\cdot 10^{-7}$ и радиусом электрона, равном $r_e = c/w$ согласно (1.4), причем величина $\omega = w$, где w скорость вращения частиц вакуума, образующих элементарную частицу, имеем $r_r/r_e = r_r w/c = \alpha = 3.35\cdot 10^{-17}$, получим, используя (1.3) получим значение $\alpha = 3.35\cdot 10^{-17}$.

Причем скорость поступательного движения V_{0t} много меньше полной скорости частиц, с учетом скорости вращения, и полная скорость равна V.

Т.е скорость вращения спина электрона совпадает со скоростью вращения частиц вакуума в поле реликтового излучения. Но радиус вращения в поле реликтового излучения меньше, чем радиус вращения спина электрона.

$$r_r = \frac{(V^2 - V_{0t}^2)\mathrm{E}^2}{e^2c^2H^2l} = \frac{(V^2 - V_{0t}^2)m_\gamma^2c^2}{e^2H^2l(1 - V^2/c^2)} = \frac{6\cdot\sqrt{2}\pi(V^2 - V_{0t}^2)c\rho_\gamma r_\gamma\hbar(r_\gamma/l_\gamma)^{1/3}}{e^2H^2(1 - V^2/c^2)} = \tag{1.3}$$
$$= \frac{3\cdot\sqrt{2}c^3\alpha^2\rho_\gamma r_\gamma\hbar(r_\gamma/l_\gamma)^{1/3}}{4e^2\varepsilon} = \alpha r_\gamma$$

Откуда имеем $\alpha = \dfrac{4e^2\varepsilon}{3\sqrt{2}c^3\rho_\gamma\hbar(r_\gamma/l_\gamma)^{1/3}} = \dfrac{4\varepsilon}{3\cdot 137\sqrt{2}c^2\rho_\gamma(r_\gamma/l_\gamma)^{1/3}} = 3.35\cdot 10^{-17}$.

Энергия гамма кванта реликтового излучения, равна величине $kT = 3.8\cdot 10^{-16}\mathrm{erg}$ при температуре реликтового излучения $T = 2.73°K$ см. [9]. Плотность числа реликтовых фотонов составляет примерно 400 штук на кубический сантиметр см. [9]. При этом плотность энергии реликтового излучения равна $\varepsilon = nkT = 1.5\cdot 10^{-13}\mathrm{erg/cm}^3 = H^2/8\pi$.

Величина среднего радиуса вращения частиц вакуума $r_r = 3.35\cdot 10^{-17} r_e$ много меньше радиуса электрона, равного $r_e = \dfrac{e^2}{m_ec^2} = 2.84\cdot 10^{-13}cm < \dfrac{\hbar}{2m_ec} = 1.9\cdot 10^{-11}$ см (1.4). Средний радиус вращения частиц вакуума меньше размера электрона, так как размер электрона соответствует наибольшему радиусу вращения частиц вакуума. При изменении энергии реликтового излучения, частота и радиус частиц со спином изменится, так как напряженность реликтового излучения определяет собственную скорость вращения частиц и их размер.

Остаточное электромагнитное поле определяется формулой $\frac{eA}{m_\gamma c^2} \sim 1$, откуда имеем $eA \sim m_\gamma c^2 = 8.4 \cdot 10^{-55} 9 \cdot 10^{20} = 7.56 \cdot 10^{-34} erg$. При средней энергии фотона реликтового излучения $kT = 3 \cdot 10^{-16} erg$. Т.е. энергия реликтового излучения может уменьшиться в $4 \cdot 10^{17}$ раз.

Получили мнимое значение потенциала внутри частицы при энергии равной $E = \sqrt{m^2c^4 + \hbar^2 w^2}, \alpha = 0$. Спин электрона равен $\hbar/2$. При этом радиальная скорость среды равна нулю, частицы вакуума вращаются с угловой скоростью $w \sin\theta$

$$\hbar/2 = J = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{c/w} \rho r^2 |\psi|^2 \frac{w \cdot r^2}{\sqrt{1 - \frac{w^2 r^2 \sin^2\theta}{c^2}}} \sin\theta dr d\theta d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi}\int_0^{1} \rho x^2 |\psi|^2 \frac{c^5}{\omega^4} \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\theta}} \sin\theta dx d\theta = .$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho \cdot \frac{c^5}{w^4} \frac{x^4}{\sqrt{1 - x^2\sin^2\theta}} \exp(-2\alpha x) \sin\theta d\theta dx = 2\pi\rho \cdot \frac{c^5}{w^4} f(\alpha)$$

$$m = \int_0^{c/w} \rho 4\pi r^2 |\psi|^2 dr = \int_0^1 \rho 4\pi r^2 \exp(-2\alpha w r/c) dr =$$

$$= 4\pi\rho (w/c)^{-3} \int_0^1 x^2 \exp(-2\alpha x) dx = \delta(\alpha) 4\pi\rho (w/c)^{-3}$$

Где функция $1/\sqrt{1-x^2}$ имеет интегрируемую особенность. Величины $\delta(\alpha)$, $f(\alpha)$ в случае действительного аргумента убывающие положительные функции. Подставляя вычисленную плотность электрона, получим

$$\hbar = 4\pi \frac{c^5}{w^4} f(\alpha) \frac{m(w/c)^3}{4\pi\delta(\alpha)} = \frac{c^2 m}{w} f(\alpha)/\delta(\alpha)$$

Получаем уравнение

$$\frac{f(\alpha)}{\delta(\alpha)} = \frac{\hbar w}{mc^2}.$$

Так как $f(\alpha)$ убывающая положительная функция положительного аргумента, а величина $\delta(\alpha)$ убывающая функция, имеется максимум отношения этих функций. Откуда определим частоту вращения электрона.

$$f(\alpha_{\max})/\delta(\alpha_{\max}) = \frac{\hbar w}{mc^2}.$$

В результате вычисления интеграла на алгоритмическом языке MathCAD получено максимальное значение при условии $\alpha_{\max} = 0$, а для отношения получено значение $\frac{\hbar w}{mc^2} = 2 \pm 10^{-14}$, т.е. энергия частицы определяется по формуле $E = mc^2 = \hbar w / 2$, при размере электрона, равном

$$r_e = \frac{c}{w} = \frac{\hbar}{2mc} = 1.931 \cdot 10^{-11} cm, \qquad (1.5)$$

при определении с помощью ОТО электромагнитного радиуса электрона см. (5.10), равного величине $r_{ge} = 2e^2 / mc^2 = 5.63 \cdot 10^{-13}$. Угловая скорость собственного вращения частиц вдвое больше их комптоновской частоты.

Зная величину частоты вращения электрона, можно определить его максимальный радиус $c/w = \hbar/(2mc)$. Так как частицы рассматриваются сферическими, максимальный радиус совпадает с радиусом сферы. Справедлива формула для собственного значения оператора спина частицы $\hbar/2 = mcr$, где определен радиус частицы, равный $r = c/w$.

Отсюда следует другая интерпретация уравнения Шредингера. Квадрат модуля волновой функции определяет плотность среды, а логарифм волновой функции определяет потенциал скорости среды.

Получается, что уравнение Шредингера содержит и уравнение неразрывности с плотностью $\psi^*\psi$. Т.е. для решения уравнение Шредингера необходимо решать только уравнение с потенциальной скоростью, без уравнения неразрывности

$$\frac{\partial V_p}{\partial t} + V_l \frac{\partial V_p}{\partial x_l} = \nu \frac{\partial^2 V_p}{\partial x_l^2} - \frac{\partial U}{\partial x^p} / m, \nu = \frac{i\hbar}{2m}, V_p = -i\frac{\hbar}{m}\nabla_p \psi$$

$$\frac{\partial \psi^* \psi}{\partial t} + \mathrm{div}(\psi^* \psi \mathbf{V}) = 0; \mathbf{V} = \frac{\hbar}{2m}(i\nabla \ln \psi^* - i\nabla \ln \psi), \qquad (1.6)$$

$$\frac{3m_e}{4\pi r_e^{3/2} a_0^{3/2}} \int_0^{r_A} \psi^* \psi r^2 dr = \rho(A)$$

Плотность макро вещества определена по плотности электрона.

Введем оператор

$$\hat{a}\psi = \begin{cases} \dfrac{3m_e}{4\pi r_e^{3/2} a_0^{3/2}} \psi, r < a_0 \\ 0, r > a_0 \end{cases}, \int_0^{a_0} \psi^*(r) \hat{a}\psi(r) r^2 dr = \rho(A),$$

$$\hat{b}\psi(r) = \rho(A)\psi, \int_0^{\infty} \psi^*(r) \hat{b}\psi(r) r^2 dr = \rho(A), r \in [0, \infty]$$

где величина $\rho(A)$ трехмерная макроскопическая плотность вещества с атомным весом A, а интегрировать надо под действием оператора $\hat{a}$ по переменной r по отрезку $[0, a_0]$.

Получим из релятивистского уравнения Навье – Стокса уравнение для скалярного поля. Рассмотрим уравнение Навье - Стокса с кинематической вязкостью $\nu = \frac{i\hbar}{2m}$ записанное в релятивистской форме, причем без учета теплового потока и давления. Тепловой поток частиц вакуума не учитывается, так как согласно формуле (5.12) температура этого потока равна величине $T = 5.47 \cdot 10^{-18} {}^\circ K$. Аналогично пренебрегаем давлением частиц вакуума, по сравнению с электромагнитным полем.

$$\frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{\partial^2 (u_k c - \frac{e}{mc} A_k)}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2 (u_k c - \frac{e}{mc} A_k)}{\partial x^l \partial x_l}\right) - (u^0 c - \frac{e}{mc} A^0) \frac{\partial (u_k c - \frac{e}{mc} A_k)}{\partial x^0} - .$$
$$- (u^l c - \frac{e}{mc} A^l) \frac{\partial [u_k c - e A_k / (mc)]}{\partial x^l} = 0$$

Получили релятивистское инвариантное уравнение Навье – Стокса.

Воспользуемся равенством для четырехмерной скорости $u_k c = -\frac{i\hbar}{m}\nabla_k \ln\psi, k = 0,...,3$. При этом это равенство можно представить в виде $p_l\psi = (\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x^l} - \frac{e}{c}A_l\psi), l = 0,...,3$, откуда имеем определение оператора импульса $\widehat{p}_l = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^l} - \frac{e}{c}A_l, l = 0,...,3$. Т.е. четырехмерный импульс частиц вакуума является собственным числом оператора импульса.

$$\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2(-\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^k} - \frac{e}{mc}A_k)}{\partial x^0\partial x_0} + \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2(-\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^k} - \frac{e}{mc}A_k)}{\partial x^l\partial x_l} +$$

$$+(\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_0} + \frac{e}{mc}A_l)\frac{\partial(-\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^k} - \frac{e}{mc}A_k)}{\partial x^0} +$$

$$+(\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_l} + \frac{e}{mc}A_l)\frac{\partial(-\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^k} - \frac{e}{mc}A_k)}{\partial x^l} = 0$$

Сократим это уравнение на величину $\hbar^2 / m^2$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^k}[\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial x^0\partial x_0} + \frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial x^l\partial x_l} + \frac{\partial\ln\varphi}{\partial x_0}\frac{\partial\ln\varphi}{\partial x^0} + \frac{\partial\ln\varphi}{\partial x_l}\frac{\partial\ln\varphi}{\partial x^l} = 0$$

$$\varphi = \psi\exp[\sum_{k=0}^{3} -\int \frac{ie}{\hbar c}A_k dx^k] = \psi\exp(-\frac{ie}{\hbar c}f), A_k = \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

При этом рассматривается не общий случай потенциала, а случай, если имеется только калибровочное поле, т.е. $\frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^l} = 0$, и функция A_k потенциальна. В этот случай входит поле, зависящее от одной переменной $A_k = \partial_k \ln f_k(x^k)$. Тогда потенциал определяется по формуле $U = \sum_k \ln f_k(x^k) = \ln\prod_k f_k(x^k)$.

При этом справедливо $\psi\exp[\sum_{k=0}^{3} -\int \frac{ie}{\hbar c}A_k dx^k] = \psi\exp[-\int_{s_0}^{s} \frac{ie}{\hbar c}\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial p}{\rho\partial x^k}u^k ds]$,

где u^k четырехмерная скорость потока частиц вакуума, величина ρ интегрирующий множитель потенциала, если он существует, т.е. имеем $A_k = \frac{\partial p}{\rho\partial x^k}$. При этом справедливо

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\int_{s_0}^{s} \frac{ie}{\hbar c}\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial p}{\rho\partial x^k}u^k ds = \frac{\partial}{u^l\partial s}\int_{s_0}^{s} \frac{ie}{\hbar c}\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial p}{\rho\partial x^k}u^k ds = \frac{1}{u^l}\frac{ie}{\hbar c}\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial p}{\rho\partial x^k}\frac{dx^k}{ds} =$$

$$= \frac{ie}{\hbar c}\frac{dp}{u^l\rho ds} = \frac{ie}{\hbar c}\frac{\partial p}{\rho\partial x^l} = \frac{ie}{\hbar c}A_l$$

Согласно квантовой механике переносимый импульс равен $\hbar\mathbf{k}$ с переносимой энергией $\hbar\omega$. Но это соотношение справедливо для спектра вектор потенциала калибровочной части электромагнитного поля. Спектр вектора потенциала равен $a_\mu(\mathbf{k}) = k_\mu c(\mathbf{k}) + e_\mu^a(\mathbf{k})b_a(\mathbf{k})$, где первый член соответствует спектру потенциала калибровочного поля см. [10] и квантовому описанию энергии частиц и поля $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, a_\mu = k_\mu c(\mathbf{k})$. Причем имеем формулу для вектор потенциалов и их спектра $A_\mu(\mathbf{x}) = \int a_\mu(\mathbf{k})\exp(i\mathbf{kx})d^4\mathbf{k}$.

Возможна ситуация, когда величина энергии не равна нулю из-за наличия градиентной калибровочной части электромагнитного поля $eA_l = e\frac{\partial f}{\partial x^l}, e\varphi = -\frac{\partial f}{c\partial t}$ (калибровочное поле соответствует квантовому описанию энергии частиц). Поток и плотность энергии электромагнитного поля равна нулю, так как магнитное и электрическое поле равно нулю. Эту ситуацию нужно исправить, вводя дополнительный член в связи напряженности и вектор потенциалов, и тогда калибровочный потенциал будет соответствовать напряженностям электромагнитного поля.

Получим из релятивистского уравнения Навье – Стокса уравнение Клейна-Гордона. Рассмотрим уравнение Навье - Стокса с кинематической вязкостью

$\nu = \dfrac{i\hbar}{2m}$ записанное в релятивистской форме, причем без учета теплового потока. Если релятивистское уравнение Навье – Стокса записано относительно тепловой функции единицы объема $w = e + p$ в локальной системе покоя см. [3]§133, то в предлагаемой формуле используется плотность в локальной системе покоя

$$\frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^l \partial x_l}\right) - u^0 \frac{\partial u_k}{\partial x^0} - u^l \frac{\partial u_k}{\partial x^l} = \frac{\partial p}{\rho \partial x^k}.$$

Получили релятивистское инвариантное уравнение Навье – Стокса.

Воспользуемся равенством для четырехмерной скорости $u_k = -\dfrac{i\hbar}{m}\nabla_k \ln\psi, k = 0,...,3$. При этом это равенство можно представить в виде $p_l\psi = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^l}, l = 0,...,3$, откуда имеем определение оператора импульса $p_l = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x^l}, l = 0,...,3$. Т.е. четырехмерный импульс частиц вакуума является собственным числом оператора импульса.

$$\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 -\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x^k}}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 -\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x^k}}{\partial x^l \partial x_l} +$$

$$+\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_0}\frac{\partial -\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x^k}}{\partial x^0} + \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l}\frac{\partial -\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x^k}}{\partial x^l} = \frac{\partial p}{\rho \partial x^k}$$

Разделим это уравнение на величину $\dfrac{\hbar^2}{m^2}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x^l \partial x_l} + \frac{\partial \ln\psi}{\partial x_0}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x^0} + \frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x^l} - \frac{2m^2}{\hbar^2}\int_{s_0}^{s} \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} u^k ds\right] = 0.$$

Где величина $dx^k = u^k ds, k = 0,...,3$, при этом интеграл вдоль траектории равен

$$c^2(s)-c^2(s_0)=c^2(x^0,x^1,x^2,x^3)-c^2(x_0^0,x_0^1,x_0^2,x_0^3)=\int\limits_{s_0}^{s}\frac{dc^2}{ds}ds=$$

$$=-\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}u^k ds=-\int\limits_{(x_0^0,x_0^1,x_0^2,x_0^3)}^{(x^0,x^1,x^2,x^3)}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}dx^k.$$

Причем как функция метрического интервала, эта величина инвариантна относительно преобразования Лоренца. Где величина s соответствует значению метрического интервала, и интеграл берется вдоль траектории движения частиц. Причем частная производная от этого интеграла вдоль траектории, равна

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\int\limits_{(x_0^0,x_1^0,x_2^0,x_3^0)}^{(x_0,x_1,x_2,x_3)}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}dx^k=\frac{d}{u^l ds}\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}u^k ds=\frac{\partial p}{u^l\rho\partial x^k}u^k=\frac{dp}{u^l\rho ds}=\frac{\partial p}{\rho\partial x^l}$$

Проинтегрируем это уравнение, получим

$$[\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x^0\partial x_0}+\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x^l\partial x_l}+\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_0}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^0}+\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_l}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^l}]-\frac{2m^2}{\hbar^2}\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}u^k ds=$$

$$=-m^2c^2/\hbar^2$$

Где константу интегрирования обозначили $m^2c^2/\hbar^2$. Умножим это уравнение на величину ψ и воспользуемся равенством $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^0\partial x_0}=\psi[\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x^0\partial x_0}+\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^0}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_0}],\frac{\partial^2\psi}{\partial x^l\partial x_l}=\psi[\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x^l\partial x_l}+\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^l}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_l}]$ получим уравнение Клейна-Гордона с потенциалом.

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^0\partial x_0}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^l\partial x_l}-\frac{2mU}{\hbar^2}\psi=m^2c^2\psi/\hbar^2;$$

$$U=-m\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial p}{\rho\partial x^k}u^k ds=mc^2(x^0,x^1,x^2,x^3)-mc^2(x_0^0,x_0^1,x_0^2,x_0^3)<0$$

При этом время жизни стационарного состояния зависит от координаты частицы $\psi=\frac{1}{\sqrt{V}}\exp[-i(E\Delta t-i\mathbf{p}_0\Delta\mathbf{r})/\hbar][1+0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^3]$.

При этом локальное решение сводится к равенству

$$E^2 = p_0^2 c^2 + 2mUc^2 + m^2 c^4 .$$

Это уравнение приводится к виду

$$E - mc^2 = \frac{p_0^2}{2m} + U = \frac{p_0^2}{2m} + mc^2(x^0, x^1, x^2, x^3) - mc^2(x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3)$$

Сведем уравнение Дирака к детерминированному виду, описывающему импульс частиц вакуума. Уравнение Дирака в случае наличия электромагнитного поля выглядит таким образом

$$\gamma_{ik}^{\mu}(i\hbar\partial_{\mu} - \frac{e}{c}A_{\mu})\psi_k = mc\psi_i$$

Запишем это уравнение в виде

$$[\gamma_{ik}^{\mu}(i\hbar\partial_{\mu}\ln\psi_k - \frac{e}{c}A_{\mu}) - mc\delta_{ik}]\psi_k = 0$$

Представим его в виде нелинейного уравнения для детерминированного импульса движения частиц вакуума

$$\begin{gathered}\{\gamma_{ik}^{\mu}[p_{k\mu}(\Omega_k) + \frac{e}{c}A_{\mu}(\Omega_k)] + mc\delta_{ik}\}\exp[-i\int_{s_0}^{s} p_{k\nu}(\Omega_k)p_{k\mu}(\Omega_k)g^{\nu\mu}ds/(m\hbar)] = 0 \\ \Omega_k = (x_{k0}, x_{k1}, x_{k2}, x_{k3}),\ p_{k\mu}(\Omega_k) = -i\hbar\partial_{\mu}\ln\psi_k(\Omega_k)\end{gathered} \quad (1.8)$$

Дополним это уравнение $m\frac{dx_{k\mu}}{ds} = p_{k\mu}(\Omega_k)$, где величина k означает описание компоненты спинора, а величина μ означает компоненту пространства Минковского.

Т.е. вероятностное уравнение Дирака с помощью подстановки $p_{k\mu}(\Omega_k) = -i\hbar\partial_{\mu}\ln\psi_k$ свели к детерминированному уравнению относительно четырех тел. Дополнительные уравнения $\frac{\partial p_{k\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial p_{k\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0$, определяющие наличие потенциала у импульсов частиц. Итого имеется 4 уравнение Дирака и

$4\cdot 6/2=12$ уравнений, являющихся условием вычисления потенциала ψ_k. Итого 16 уравнений при 16 неизвестных. Для существования потенциала, импульсы надо искать в виде $p_{k\mu}=p_k[n(x^0+x^1+x^2+x^3)/a]g_k(x_k)+h_k(x_k)$. Тогда получится 4 неизвестные функции, которые надо считать с помощью 4 уравнений (1.8).

Таким образом, используя равенство $p_{lk}=-i\hbar\partial_l\ln\psi_k, l=0,...,3; k=1,...,4$, уравнение для стандартной модели можно свести к детерминированным уравнениям относительно импульсов частиц вакуума. Причем фермионы со спином ½ можно свести к движению 4 частиц, по числу компонент спинора.

Таким образом, уравнение для стандартной модели можно свести к детерминированным уравнениям относительно частиц вакуума.

Уравнение Дирака учитывает спин электрона за счет вращения четырех частиц. Каждая частица, это сгусток частиц вакуума. Происходит вращение вокруг четырех осей, трех пространственных и колебание вдоль четырех координат. Пространственные оси можно повернуть с помощью ортогонального преобразования пространства, при этом возникнут те же оси с тем же вращением. Вокруг этих трех осей происходит вращение трех частиц с одинаковой проекцией спина, причем каждая частица вращается вокруг всех осей. Это объясняет, почему проекция спина на любую ось одинакова. Если одно из направлений выделено, то вращение вокруг трех осей, переходит во вращение вокруг одной оси. Вращение вокруг каждой оси описывается моментом $\frac{mVr}{\sqrt{1-V^2/c^2}}=mcr=\hbar/2$, где скорость равна $\frac{V}{\sqrt{1-V^2/c^2}}=c;\frac{V}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. При этом вращение вокруг оси x_3 сводится к вращению в плоскости $x_1 0 x_2$ с радиусом вращения $r=\frac{\hbar}{2mc}$. Или вращение трех частиц можно описать комплексными координатами. Мнимая часть координаты означает колебание вокруг действительной координаты. При этом формулы выглядят, таким образом $mcir = i\hbar/2$, так как мнимая часть координаты, ответственная за колебание равна $ir = i\hbar/(2mc)$. Эти колебания частиц можно объяснить их вращением, что эквивалентно. Вращение вокруг временной оси сводится к пульсациям во времени каждой частицы с амплитудой $it = i\hbar/(2mc^2)$.

2. Свойства частиц вакуума

2.1 Размер и масса частиц вакуума

Кинематической вязкости вакуума ν, полученной из предположения (1.1) соответствует формула

$$\nu = i\frac{\hbar}{m_\gamma} = \frac{\Lambda ic}{3}, \quad (2.1.1)$$

где получается, что длина свободного пробега Λ выражается через массу частицы вакуума (кинематическая вязкость газа равна $\nu = c\Lambda/3$). При этом окажется, что вычисленная далее по тексту масса частицы вакуума равна $m_\gamma = 8.4\cdot 10^{-55}\,\mathrm{g}$.

$$\Lambda = \frac{3\hbar}{m_\gamma c},$$

что позволяет оценить длину свободного пробега, которая будет определена по массе частицы, равна величине $\Lambda = 1.2\cdot 10^{17}\,cm$. Т.е. вакуум является разреженным газом с большой длиной свободного пробега.

Но мнимая кинематическая вязкость вакуума огромна $\nu = i\hbar/m_\gamma = i\dfrac{10^{-27}}{8.4\cdot 10^{-55}} = 1.19\cdot 10^{27}\,cm^2/\sec$. Вязкость вакуума равна $\mu = \rho_\gamma \nu = 1.19\cdot 10^{-2}\dfrac{g}{cm\sec}$, что меньше вязкости твердого тела. Где величина $\rho_\gamma = 10^{-29}\,g/cm^3$ плотность вакуума. Вязкость железа при температуре $30°C$ равна $\mu = 14\cdot 10^{10}\dfrac{g}{cm\sec}$, см. [3], стр.37.

Используется для скорости движения возмущения средний квадрат этой скорости, который равен скорости света. Вакуум состоит из диполей, образованных электрон-позитронными парами.

При этом позитроний не стабилен, что следует из его описания как водородоподобной системы, состоящей из электрона и его античастицы, позитрона. Но при энергии позитрония, равной $7.66 \cdot 10^{-43} \mathrm{erg}$, позитроний является стабильной частицей. Эта энергия частицы соответствует сближению электрона и позитрона и образованию диполя. При этом энергия позитрония изменится, определяясь по формуле $e^2 l_\gamma / [r - (\mathbf{r}, \mathbf{V})/c]^2$ вместо величины e^2 / r, следовательно, волновая функция позитрония изменится и, судя по энергии покоя позитрония, он в этом случае является стабильной частицей. При этом волновая функция вакуума будет представлять одну частицу с малой массой, определенной из дальнейших описаний. Возможен предельный переход при условии $l_\gamma \to 0$, в отличие от энергии электрона, у которого радиус конечен.

Источником массы электрона или позитрона является его электрическая энергия, равная $m_e c^2 = e^2 / r_{ge}$.

По мере уменьшения потенциальной энергии этой частицы, позитрония, электрон и позитрон сближаются на расстояние меньше их радиуса r_e, компенсируя заряды, образуя диполь. По порядку величины, эту связь можно записать в виде $m_\gamma c^2 = e^2 l_\gamma / r_{ge}^2$. Энергия этого диполя определяется по формуле

$$m_\gamma c^2 = eU_\gamma = e^2 \left(\frac{1}{r_{ge+}} - \frac{1}{r_{ge-}}\right) = e^2 \frac{r_{ge-} - r_{ge+}}{r_{ge-} r_{ge+}} = e^2 \frac{l_\gamma}{r_{ge}^2}.$$

При этом волновые функции зарядов пересекаются, но между их центрами есть расстояние l_γ. При рассмотрении взаимодействия положительного заряда с диполем, заряд которого эквивалентен отрицательному, и притягивается к положительному заряду и имеем неравенство $r_{ge-} > r_{ge+}$, т.е. величина энергии в правой части равенства положительна. При взаимодействии с отрицательным зарядом, диполь становится положителен, приближается к отрицательному заряду, и значит, имеем неравенство $r_{ge+} > r_{ge-}$.

$$m_\gamma c^2 = eU_\gamma = e^2(\frac{1}{r_{ge-}} - \frac{1}{r_{ge+}}) = e^2 \frac{r_{ge+} - r_{ge-}}{r_{ge-} r_{ge+}} = e^2 \frac{l_\gamma}{r_{ge}^2}$$

При этом энергия диполя отрицательна, так как справедливо $m_\gamma c^2 - e^2 \frac{l_\gamma}{r_{ge}^2} = 0$.

Величину $r_\gamma = r_{ge}$ назовем образующим радиусом диполя. В случае атома водорода образующий радиус состоит из двух разных диполей, диполя образующего электроном и позитроном, и диполя образующего электронами и ядром атома. Средний эффективный радиус диполя равен $r_\gamma = \sqrt{r_{ge} a_0}$, где a_0 это радиус Бора. В случае ядра атома, образующий радиус кварка равен $r_\gamma = \sqrt{r_{ge} r_d}, r_d = e^2/(9 m_d c^2)$ и образован двумя диполями, кварк и анти кварк, электрон и позитрон. По образующему радиусу диполя определяются эффективные свойства частиц вакуума по формулам (2.1.4),(2.1.6).

Объяснить введение образующего радиуса частицы вакуума можно следующим образом. Описание диполя с приближенной потенциальной энергий $\frac{e^2 l_\gamma}{r^2} \cong \frac{e^2}{r} \frac{l_\gamma}{r_{ge}}$, можно представить как величину заряда $e\sqrt{l_\gamma / r_{ge}}$ электрона, вращающегося в поле ядра с тем же зарядом. Радиус r_B, равный радиусу Бора, полученный решением для атома водорода с таким зарядом $e\sqrt{l_\gamma / r_{ge}}$ ядра и электрона, равен $r_B = \frac{\hbar^2}{mq^2} \frac{m_\gamma}{m_e} = \frac{\hbar^2}{me^2} \frac{r_{ge}}{l_\gamma} \frac{m_\gamma}{m_e} = \frac{a_0 r_{ge}}{l_\gamma} \frac{m_\gamma}{m_e}$. Откуда энергия частицы вакуума, равна $\frac{e^2}{r_B} = \frac{e^2 l_\gamma}{a_0 r_{ge}} \frac{m_e}{m_\gamma}$. Откуда образующий радиус электронов в атоме водорода равен среднему геометрическому между радиусом Бора электрона a_0 и электрическим гравитационным радиусом электрона r_{ge}, т.е. $r_\gamma = \sqrt{a_0 r_{ge}}$.

Аналогичный результат можно экстраполировать для ядра атома с зарядом $e\sqrt{l_\gamma / r_{ge}}$. Радиус ядра с зарядами $e\sqrt{l_\gamma / r_{ge}}$ равен величине

$$r_A = \frac{\hbar^2}{137^2 m_u q_A^2}\frac{m_\gamma}{m_u} = \frac{\hbar^2}{137^2 m_u 100 e^2}\frac{r_{ge}}{l_\gamma}\frac{m_\gamma}{m_u} = \frac{e^2}{100 m_u c^2}\frac{r_{ge}}{l_\gamma}\frac{m_\gamma}{m_u} = \frac{9 r_u r_{ge}}{400 l_\gamma} = \frac{r_u r_{ge}}{45 l_\gamma}\frac{m_\gamma}{m_u}.$$

Заряд ядра q_A равен $q_A = 10e$. Энергия ядра равна $\frac{q_A^2}{r_A} = \frac{45 q_A^2 l_\gamma}{r_u r_{ge}}\frac{m_u}{m_\gamma}$. Откуда имеем образующий радиус кварка, равен среднему геометрическому между размером кварка и электрическим радиусом электрона $r_{\gamma u} = \sqrt{r_u r_{ge} / 45}$, $r_{\gamma d} = \sqrt{r_d r_{ge} / 10}$ где величина $r_u = \frac{4e^2}{9 m_u c^2}$ размер кварка.

Сечение образовавшейся частицы вакуума в системе центра инерции при образовании диполя, со средним расстоянием между частицами, равным величине l_γ, состоящего из электрона и позитрона «радиуса» r_{ge}, равно по порядку величины

$$\sigma = \pi l_\gamma^{2/3} r_\gamma^{4/3} = \pi r_{eq}^2.$$

σ сечение образования электрон-позитронной пары в виде диполя. Причем эквивалентный радиус частицы, состоящей из электрона и позитрона, равен $r_{eq} = 8.3 \cdot 10^{-23} cm > l_{Pl}$, что гораздо больше размера Планка. Параметры l_γ определится из формулы (2.1.6), параметр $r_\gamma = \frac{e^2}{m_{\gamma p} c^2}$, причем эти параметры вычислены в случае электрон, позитронной пары. В этом случае $m_{\gamma p} = m_e$ равно массе электрона или позитрона.

Для связи длины свободного пробега Λ с концентрацией n и сечением частиц σ справедлива формула см.[4]

$$n\sigma = \frac{1}{4\sqrt{2}\Lambda}.$$

Откуда получаем формулу для концентрации частиц вакуума при отсутствии гравитационного поля равной величине. Значение концентрации определяем после вычисления массы частицы вакуума m_γ. Кроме того нужно определить расстояния между электроном и позитроном в составе частицы вакуума l_γ. Электромагнитный радиус электрона равен значению $r_{\gamma p} = r_{ge} = e^2 / m_e c^2 = 2.84 \cdot 10^{-13}$cm.

$$n = \frac{1}{4\sqrt{2}\sigma\Lambda} = \frac{m_\gamma c}{2\sqrt{2}\pi l_\gamma^{2/3} r_\gamma^{4/3} 3\hbar} = \frac{\rho_\gamma}{m_\gamma}$$

Откуда имеем

$$\left(\frac{c}{6\sqrt{2}\pi\rho_\gamma \hbar}\right)^{3/2} \frac{m_\gamma^3}{r_\gamma^2} = l_\gamma \qquad (2.1.2)$$

При этом можно определить массу частицы вакуума, и значит величину размера диполя, образующего частицу вакуума

$$m_\gamma c^2 = e^2 l_\gamma / r_\gamma^2 \qquad (2.1.3)$$

Подставляя в (2.1.3) значение l_γ получим величину массы частицы вакуума m_γ

$$m_\gamma = \frac{c r_\gamma^2}{e}\left(\frac{6\sqrt{2}\pi\rho_\gamma \hbar}{c}\right)^{3/4} = \rho_\gamma r_\gamma^3 \left[\frac{(6\sqrt{2}\pi)^3 137^2 \hbar}{r_\gamma^4 \rho_\gamma c}\right]^{1/4}. \qquad (2.1.4)$$

При этом концентрация частиц вакуума равна

$$n = \frac{\rho}{\rho_\gamma r_\gamma^3}\left[\frac{r_\gamma^4 \rho_\gamma c}{(6\sqrt{2}\pi)^3 137^2 \hbar}\right]^{1/4} \qquad (2.1.5)$$

Где ρ плотность системы из элементарных частиц, например, плотность электрона в атоме равна $\rho = \dfrac{3m_e}{4\pi a_0^3}$, где m_e масса электрона, a_0 радиус Бора.

При этом величина размера диполя равна

$$l_\gamma = \frac{137 \rho_\gamma r_\gamma^5 c}{\hbar}\left[\frac{(6\sqrt{2}\pi)^3 137^2 \hbar}{r_\gamma^4 \rho_\gamma c}\right]^{1/4} \qquad (2.1.6)$$

Построение теории, частным случаем которой является квантовая механика, предполагает определение постоянной Планка из свойств частиц вакуума.

Такая формула существует, постоянная Планка равна моменту импульса частиц вакуума.

Постоянная Планка равняется моменту импульса частиц вакуума

$$\hbar = m_\gamma r_\gamma^2 \omega_\gamma ; \omega_\gamma = \frac{137c}{l_\gamma}.$$

Где предполагается, что частица вакуума имеет спин, равный 0 или 1, так как состоит из двух фермионов с параллельным или анти параллельным спином. Частота вращения огромна, $\omega_\gamma = \frac{137 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{10^{-41}} \cong 5 \cdot 10^{53} / s$, но так как масса мала, получается, что значение момента импульса равно постоянной Планка. Такая большая частота говорит о имеющейся у частиц вакуума энергии. Причем частицы вакуума вращаются с четырехмерной скоростью $u = \frac{137 r_\gamma}{l_\gamma} >> 1$. При этом трехмерная скорость равна $V = \frac{uc}{\sqrt{1+u^2}}$. Частицы вакуума со спином 1 должны вращаться с огромной скоростью, что является маловероятным, значит, спин частиц вакуума равен нулю.

При условии $r_\gamma = r_{ge}$, получаем значение $l_\gamma = 7 \cdot 10^{-42} cm$, масса частицы вакуума будет порядка величины $m_\gamma = 8.44 \cdot 10^{-55} g$, что гораздо меньше пределов погрешности измерения этой массы.

В случае, если частицей вакуума является u кварк и его античастица, эффективная масса частицы вакуума равна $m_{\gamma u} = 1.86 \cdot 10^{-57} g$ и $l_{\gamma u} = 7.67 \cdot 10^{-48} cm$, где образующий радиус диполя, составленный из двух частиц вакуума, электрона и позитрона, кварка и анти кварка, равен

$$r_{\gamma u} = \sqrt{r_{ge} r_u / 45} = 1.4 \cdot 10^{-14} cm; r_u = 4e^2 / (9 m_u c^2) = 3{,}14 \cdot 10^{-14} cm,$$

$$r_{\gamma d} = \sqrt{r_{ge} r_d / 10} = 2 \cdot 10^{-14} cm; r_d = \frac{e^2}{9 m_d c^2} = 3.1 \cdot 10^{-15}; m_{\gamma d} = 3.72 \cdot 10^{-57} g$$

при массе кварка $m_d = 4.79 MeV, m_u = 2.01 Mev$ и заряд, равный $2e/3, e/3$. В случае если частицей вакуума является диполь, образуемый атомом водорода образующий радиус равен $r_{\gamma 0} = \sqrt{r_{ge} a_0} = 3.77 \cdot 10^{-11} cm$. Масса эффективного образующего диполя $m_\gamma = 1.48 \cdot 10^{-50} g$, размер эффективного образующего диполя $l_{\gamma 0} = 2.16 \cdot 10^{-33} cm$. Образован двумя частицами вакуума - электрон, позитрон, и диполь, состоящий из электрона и протона.

Остаточная энергия электромагнитного поля в свободном пространстве равна $T_{\gamma e} = m_\gamma c^2 / k = 5.47 \cdot 10^{-18} {}^\circ K$, где величина k это постоянная Больцмана. Эту величину можно получить, определяя остаточное поле из формулы $\frac{eA}{m_\gamma c^2} \sim 1$, где величина энергии остаточного поля равна $eA = kT_{\gamma e}$. Существующая энергия электромагнитного поля $2.7^\circ K$. Значит, существующая энергия электромагнитного реликтового поля будет уменьшаться.

Но в вакууме, действительная кинематическая вязкость для макротел определяется по формуле $\nu = \frac{\hbar}{m_{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar \gamma}{c}}$, величина из мировых констант, образующих кинематическую вязкость вакуума, величина m_{Pl} это масса Планка, γ гравитационная постоянная, c скорость света в вакууме.

$$\hbar / m_{Pl} \sim 10^{-22} cm^2 / \sec.$$

При этом среднеквадратичная скорость частиц вакуума, ответственных за действительную вязкость вакуума, определяется по формуле $V = c\sqrt{m_\gamma / m_r}$, см. формулу 5.9, где величина m_r масса частиц вакуума, ответственных за действительную вязкость. Длина свободного пробега равна $\Lambda = \frac{3\hbar}{m_{Pl} V}$. При этом плотность этих частиц вакуума равна

$\rho = \frac{m_r}{4\pi\sqrt{2}\Lambda\sigma} = \frac{m_r^3 c^2}{4\pi\sqrt{2}\Lambda e^4} = \frac{m_r^{5/2} c^3 m_{Pl}\sqrt{m_\gamma}}{4\pi\sqrt{2}3\hbar e^4} = \rho_\gamma = 10^{-29} g / cm^3$. Она равна плотности вакуума.

Откуда имеем, что масса частиц вакуума, ответственных за действительную вязкость в вакууме, равна

$$m_r = \sqrt[5]{\left(\frac{\rho_\gamma 12\pi\sqrt{2}\hbar}{c^3 m_{Pl}}\right)^2 \frac{e^8}{m_\gamma}} = \sqrt[5]{\left(\frac{10^{-29}12\pi\sqrt{2}10^{-27}}{27\cdot 10^{30}2.2\cdot 10^{-5}}\right)^2 \frac{4.8^8 10^{-80}}{8.4\cdot 10^{-55}}} = 3.06\cdot 10^{-37} g .$$

Размер этих частиц равен $a_r = \frac{e^2}{m_r c^2} = 0.00087 cm$, но при этом частицы имеют малую массу, слабо рассеивая другие частицы при столкновениях.

При этом, так как материальные системы образуются из элементарных частиц, а те в свою очередь образуются из частиц вакуума, значит вязкость среды определяется по плотности частиц вакуума, и так как в твердом теле концентрация частиц вакуума велика, его кинематическая вязкость велика и не считается по формуле $\nu = \frac{c\Lambda}{3}$, которая справедлива для газа.

2.2 Турбулентное решение в ядре атома

Поведение частиц вакуума квантовая механика описывает приближенно, скорость вычисляется с помощью потенциала, являющегося логарифмом волновой функции $V_l = -\frac{i\hbar}{m}\nabla \ln\psi$, что справедливо для потенциального потока частиц вакуума. Потенциальное решение уравнения Навье – Стокса является приближенным. При этом, число Рейнольдса частицы вакуума в ядре атома водорода равно

$$R = \frac{aV}{i\dfrac{\hbar\rho_\gamma}{m_\gamma \rho} + \nu} = \frac{\rho r_A V}{i\rho_\gamma \hbar / m_\gamma} = \frac{m_p^4 c^3 V r_A m_\gamma}{i\rho_\gamma \hbar^4} =$$

$$= \frac{3 \cdot 1836^4 10^{-27\cdot 4} 81 \cdot 10^{4\cdot 10} 1.4 \cdot 10^{-13} 8.84 \cdot 10^{-64}}{4 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10^{-29-27\cdot 4}} = 1.5 \cdot 10^6$$

Где для скорости частиц вакуума в ядре атома принята величина скорости $c/4$. Плотность среды, равна $\rho = \dfrac{3m_p^4 c^3}{4\pi\hbar^3}$, плотность двигающихся частиц вакуума равна величине $\rho_\gamma = 10^{-29}\, g/cm^3$. При этом кинематическая вязкость квантовой среды равна $i\dfrac{\hbar\rho_\gamma}{m_\gamma \rho} + \nu$.

Величина $i\hbar/(2m)$ в уравнении Шредингера играет роль кинематической вязкости. Добавка к ней величины вязкости среды ν, определяет вязкость макро среды, определяемую по формуле $\dfrac{i\hbar}{2m_b}\rho_l + \mu$.

Величина ν это кинематическая вязкость среды, а величины ρ_l, это плотность среды и ρ_b плотность тела.

Где величина m_b масса двигающейся элементарной частицы или макротела и масса частиц среды, ρ_b плотность двигающегося тела, ρ_l, μ плотность и вязкость макросреды. Для кинематической вязкости имеем выражение в случае отличия плотности среды от плотности тела

$$\frac{i\hbar}{2m_b}\frac{\rho_b}{\rho_l} + \nu$$

Эта формула для макротела определяет кинематическую вязкость по выражению $\dfrac{i\hbar}{2m_b}\dfrac{\rho_b}{\rho_l} + \nu \cong \nu$ в силу большой массы макротела, а для элементарных частиц по выражению $\dfrac{i\hbar\rho_b}{2m_b\rho_l} + \nu$.

Введение комплексной кинематической вязкости определяет уравнение

$$i(\hbar - 2im\nu\rho_l \ / \rho_b)\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{(\hbar - 2im\nu\rho_l \ / \rho_b)^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi,$$

При этом кинематическая вязкость ν соответствует вязкости в твердом теле, жидкости или в газе.

В случае электромагнитного поля атома водорода плотность облака электрона мала $\rho = \rho_e = \frac{3m_e}{4\pi a_0^3} = 0.0017 g / cm^3$ и его кинематическая вязкость частиц вакуума огромна и число Рейнольдса равно $R = 0.0133$ и описывается потенциальным режимом. Принцип неопределенности для частиц вакуума не работает, и поэтому число Рейнольдса в турбулентном режиме может быть меньше единицы. Критическое число Рейнольдса определяется обратной величиной тангенса наклона микро-шероховатостей и равно величине отношения характерного размера тела к высоте шероховатости $R_{cr} = \frac{r_e}{a_0 - r_e} = \frac{1.9 \cdot 10^{-11}}{0.5 \cdot 10^{-8}} = 3.8 \cdot 10^{-3}$ см. [1]. Эти микро-шероховатости определяются разбросом высоты шероховатости за счет наличия частиц вакуума. При этом, так как волновая функция действительная, скорость является мнимой, значит режим не ламинарный. Критическое число Рейнольдса меньше единицы, так как шероховатость огромна, а критическое число Рейнольдса определяется величиной обратной средней величине тангенса наклона шероховатостей. По мере увеличения внешнего поля плотность и энергия частиц вакуума растет, и, следовательно, увеличивается их скорость, что приводит к увеличению числа Рейнольдса, причем в турбулентном режиме.
В ядре атома, при большой концентрации и энергии частиц вакуума, гидродинамическое приближение о потенциальной скорости не работает, и надо использовать турбулентный режим расчета частиц вакуума, и значит, надо описывать ядро атома по-другому, не по закону квантовой механики.

Или надо описывать турбулентный режим с помощью комплексной волновой функции, получая комплексную турбулентную скорость потенциального течения. При этом локальная формула для волновой функции $\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\{-i(E\Delta t - \mathbf{p}_0 \Delta \mathbf{r})/\hbar\}[1 + 0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^3]$ должна содержать комплексное значение $\mathbf{p}_0$, значит, собственное число оператор импульса $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}$ должно являться комплексным, с действительной и мнимой частью, что возможно при комплексных координатах. Т.е. если описывать ядро атома уравнением Шредингера, или Клейна – Гордона, то нужно вводить комплексные координаты. Ведь неотъемлемым свойством турбулентного режима является комплексная скорость см. раздел 4. При этом для описания ядра атома необходимо использовать уравнение Навье – Стокса, из которого как частный случай при потенциальной скорости, следует уравнение Шредингера.

Причем в ядре атома водорода количество частиц вакуума равно $N_u = \frac{m_u}{m_{\gamma u}} = 5 \cdot 10^{28}$. При этом энергия по порядку величины в ядре атома равна (всего имеется $\frac{N_u}{2}$ диполей, количество частиц надо разделить на два, так как учитываются положительно и отрицательно заряженные частицы.)

$$E_p = -\frac{e^2 l}{r_d^2} \frac{N_u}{2} + m_\gamma c^2 N_u / \sqrt{1 - V^2/c^2} =$$

$$= -\frac{e^2 l}{r_d^2} \frac{m_u}{2m_\gamma} + m_\gamma c^2 \frac{m_u}{m_\gamma \sqrt{1 - V^2/c^2}} =$$

$$= -\frac{e^2 m_u}{r_u^2} \frac{137 \cdot r_u r_e c}{90\hbar} + \frac{m_u c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = -m_u c^2 \frac{9m_u}{8 \cdot 45 m_e} + \frac{m_u c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} =$$

$$= -0.1 MeV + 940 MeV; V/c = 1 - 4.79/(2 \cdot 940) = 1 - 0.0026$$

$$E_n = -m_d c^2 \frac{9m_d}{2 \cdot 10 m_e} = -20.6 Mev, m_u = 2 Mev, m_d = 4.79 Mev$$

где для радиуса частицы r_γ вакуума берется средняя геометрическая величина между радиусом d кварка r_d, и радиусом электрона r_e. Причем скорость протонов и кварков отличается, скорость кварков больше. Частицу вакуума в ядре образуют частица и античастицы электрон и позитрон, нижний и верхний кварк, итого получаем величину образующего радиуса, равной $r_\gamma = \sqrt{r_u r_e /10}$. При этом энергия протона равна $-(0.1 \cdot 2 + 20.6) Mev = -20.8 Mev$, при энергии протона в атоме $30 Mev$, вычисленной в [7].

3. Физический смысл напряженности электромагнитного поля

Покажем, что существуют заряженные частицы вакуума, обеспечивающие векторный и скалярный потенциал электромагнитного поля. Ротор меняет знак при переходе из правой декартовой системы координат в левую. Это можно доказать расписав определение ротора в декартовой системе координат и поменяв знак в одном столбце у оператора дифференцирования и этой же компоненте скорости.

$$\nabla_l \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & -\mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & -V_2 & V_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = -\nabla_r \times \mathbf{V}$$

индекс r соответствует правой системе координат, индекс l левой. При этом дивергенция знак не меняет. Распишем величину комплексной скорости в виде

$$\mathbf{V} = (\mathbf{V} + \mathbf{V}^*)/2 + (\mathbf{V} - \mathbf{V}^*)/2,$$

и подействуем оператором дивергенция на обе части равенства

$$\nabla_r \mathbf{V} = \nabla_r (\mathbf{V} + \mathbf{V}^*)/2 + \nabla_r (\mathbf{V} - \mathbf{V}^*)/2.$$

Перейдем в комплексно сопряженное пространство и в плоскости векторов $\operatorname{Re}\mathbf{V}, \operatorname{Im}\mathbf{V}$ возьмем левую дивергенцию. При этом направление мнимой компоненты скорости совпадает с направлением оси, у которой меняем знак. При этом имеем соотношение $\nabla_r \mathbf{V} = \nabla_l \mathbf{V}^*$. Так как при этом в плоскости

$\mathrm{Re}\,\mathbf{V},\mathrm{Im}\,\mathbf{V}$ действительная часть не изменит знака, а мнимая часть изменит знак, получим

$$\nabla_r(\mathbf{V}+\mathbf{V}^*)/2+\nabla_r(\mathbf{V}-\mathbf{V}^*)/2=\nabla_r\mathbf{V}=\nabla_l\mathbf{V}^*=$$
$$=\nabla_l(\mathbf{V}+\mathbf{V}^*)/2-\nabla_l(\mathbf{V}-\mathbf{V}^*)/2=\nabla_r(\mathbf{V}+\mathbf{V}^*)/2-\nabla_r(\mathbf{V}-\mathbf{V}^*)/2.$$

При этом воспользовались тем, что правая и левая дивергенция равны. Откуда получаем $\nabla_r(\mathbf{V}-\mathbf{V}^*)/2=0$, и значит, $(\mathbf{V}-\mathbf{V}^*)/2=i\cdot\nabla_r\times\mathbf{A}$, т.е. мнимая часть комплексной скорости соленоидальная.

Аналогично расписываем скорость, подействовав оператором ротор

$$\nabla_r\times\mathbf{V}=\nabla_r\times(\mathbf{V}+\mathbf{V}^*)/2+\nabla_r\times(\mathbf{V}-\mathbf{V}^*)/2,$$

но при этом величину скорости представим в виде $\mathbf{V}=\mathbf{V}_0+\frac{\partial\mathbf{A}}{c\partial t}$, где величина $\mathbf{A}$ действительна, а скорость c это скорость возмущения в среде. Перейдем в комплексно сопряженное пространство и в плоскости векторов $\mathrm{Re}\,\mathbf{V},\mathrm{Im}\,\mathbf{V}$ возьмем левый ротор, получим соотношение $\nabla_r\times\mathbf{V}=\nabla_l\times\mathbf{V}^*$. При этом направление мнимой компоненты скорости совпадает с направлением оси, у которой меняем знак. Так как при этом действительная часть изменит знак, а мнимая часть нет, ($\nabla_l\times=-\nabla_r\times$ и взята комплексно сопряженная часть), имеем

$$\nabla_r\times\mathbf{V}=\nabla_l\times\mathbf{V}^*=\nabla_l\times(\mathbf{V}+\mathbf{V}^*)/2-\nabla_l\times(\mathbf{V}-\mathbf{V}^*)/2=$$
$$=-\nabla_r\times(\mathbf{V}+\mathbf{V}^*)/2+\nabla_r\times(\mathbf{V}-\mathbf{V}^*)/2$$

т.е. получим $\nabla_r\times(\mathbf{V}+\mathbf{V}^*)=0$. Это соотношение эквивалентно $(\mathbf{V}+\mathbf{V}^*)/2=-\mathrm{grad}\,\varphi$. Итак, имеем

$$\mathbf{V}_0+\frac{\partial\mathbf{A}}{c\partial t}=-\nabla\varphi+i\cdot\nabla\times\mathbf{A};\mathbf{V}_0^*+\frac{\partial\mathbf{A}}{c\partial t}=-\nabla\varphi-i\cdot\nabla\times\mathbf{A}.$$

Из этого равенства имеем

$$\mathbf{V}_0=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{c\partial t}+i\cdot\nabla\times\mathbf{A};\mathbf{V}_0^*=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{c\partial t}-i\cdot\nabla\times\mathbf{A}. \quad (3.1)$$

Комплексный поток частиц вакуума пропорционален соотношению $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H} = [\nabla S\rho_v + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}_v S}{\partial t} - i\nabla \times \mathbf{j}_v S / c]$, что следует из формулы (3.1), где этот вектор описывает скорость поперечной деформации частиц вакуума и является напряженностью электромагнитного поля, имея размерность заряда, деленного на квадрат радиуса. При этом векторный потенциал описывает поступательную скорость частиц вакуума, и определяется по формуле $\mathbf{A} = \mathbf{j}_v S / c = qn_v \mathbf{V}_v S / c$.

Скалярный потенциал определяется величиной концентрации частиц вакуума $\varphi = S\rho_v = qSn_v$. Заряд частицы вакуума равен $q = e\sqrt{l/[r - (\mathbf{r},\mathbf{V})/c]}$, где l размер диполя. Взаимодействуя с другими диполями, образуется электромагнитное поле $\varphi = e/[r - (\mathbf{r},\mathbf{V})/c]$. При этом плотность частиц вакуума определяется по формуле $n_v = 1/(S\sqrt{l[r - (\mathbf{r},\mathbf{V})/c]})$, где величина S эффективная поверхность, определяемая масштабом задачи. При уменьшении радиуса напряженность поля растет, и плотность частиц вакуума растет тоже. При этом должен участвовать минимальный размер частицы l. Из соотношения размерности и симметрии получаем формулу для концентрации частиц вакуума в данной системе. Значит, имеем формулу для создаваемого поля частицами вакуума в свободном пространстве $\varphi = e/[r - (\mathbf{r},\mathbf{V}_v)/c]$, $\mathbf{A} = e\mathbf{V}_v/(c[r - (\mathbf{r},\mathbf{V}_v)/c])$.

Вычислим потенциал электрона в атоме водорода через свойства частиц вакуума. Электрическая энергия электрона, т.е. электрическая энергия разноименно заряженных частиц вакуума по порядку величины равна. Количество частиц надо разделить на два, так как учитываются положительно и отрицательно заряженные частицы. При этом имеем $N_e = \frac{m_e}{m_{\gamma 0}} = 6 \cdot 10^{22}$.

$$q\varphi = -\frac{e^2 l}{a_0^2}\frac{N_e}{2} = -\frac{e^2 l}{a_0^2}\frac{m_e}{2m_\gamma} = -\frac{e^2 m_e}{a_0^2}\frac{137 r_\gamma^2 c}{2\hbar} = -\frac{e^2 m_e}{a_0^2}\frac{137 r_e a_0 c}{2\hbar} = .$$

$$= -m_e c^2 \frac{r_e}{2a_0} = -\frac{e^2}{2a_0} = -m_e c^2 /(2 \cdot 137^2) =$$
$$= -m_e e^4 /(2\hbar^2) = -13.6eV$$

где для радиуса частицы вакуума r_γ берется средняя величина между радиусом Бора a_0, и радиусом электрона r_e.

Частицы вакуума образует электрон и позитрон, диполь также образует протон и электрон, эта частица также является частицей вакуума. Итак, образующий радиус равен $r_\gamma = \sqrt{a_0 r_e}$. Величина числа частиц вакуума в атоме водорода, равна $N_0 = \rho_e 4\pi a_0^3 /(3m_\gamma) = m_e / m_\gamma$.

В случае описания движения электронов плотность облака электронов в атоме водорода $\rho_e = \dfrac{3m_e}{4\pi a_0^3} = 0.00171 g/cm^3$, где a_0 это радиус Бора. При этом плотность частиц вакуума совпадает с величиной $\rho_e = \dfrac{m_\gamma}{\pi r_c^2 \sqrt{l_\gamma r_c}}$, что следует из формулы $n_\gamma = 1/(S\sqrt{l_\gamma [r - (\mathbf{r}, \mathbf{V})/c]})$ и характерный радиус r_c системы равен

$$r_c = (\frac{m_\gamma}{\pi \rho_e \sqrt{l_\gamma}})^{2/5} = [\frac{\sqrt{\rho_\gamma^{3/4} (\hbar/c)^{5/4} [(6\sqrt{2}\pi)^3 137^2]^{1/4} /137}}{\pi \rho_e}]^{2/5} = 1.47 \cdot 10^{-13} cm \cdot$$

Эта величина совпадает с размером ядра. Применим эту формулу для ядра атома $\rho_d = \dfrac{3m_d^4 c^3}{4\pi h^3} = 1.37 \cdot 10^5 g/cm^3$. При этом характерный размер равен

$$r_c = (\frac{m_{\gamma d}}{\pi \rho_d \sqrt{l_{\gamma d}}})^{2/5} = [\frac{\sqrt{\rho_\gamma^{3/4} (\hbar/c)^{5/4} [(6\sqrt{2}\pi)^3 137^2]^{1/4} /137}}{\pi \rho_d}]^{2/5} = 1.06 \cdot 10^{-16} cm.$$

Что соответствует размеру протона, вычисленному из условия, что вся энергия протона электромагнитная $r_p = \frac{e^2}{m_p c^2} = 1.39 \cdot 10^{-16} cm$. Несовпадения множителя объясняется приближенностью формул. Формулы, находящие плотность частицы должны быть статистическими, а не качественными.

Причем характерный размер системы не совпадает с размером системы, по которому вычислена плотность.

Получается, что потенциал поля внутри атома велик, что приводит к большой концентрации частиц вакуума. Но на долю заряженных частиц приходится 10^{-15} объема тела см. [5] глава I раздел 10. Остальная часть объема образует вакуум.

Потенциал поля заряда в вакууме равен $\varphi = \frac{e}{r}$, поле заряда в диэлектрике равно $\varphi = \frac{e}{\varepsilon \cdot r}, \varepsilon > 1$ и меньше, чем поле в вакууме. Концентрация частиц вакуума уменьшается в диэлектрике, по сравнению с концентрацией частиц вакуума в свободном вакууме с зарядом. Но концентрация частиц вакуума в диэлектрике, без внешнего поля больше концентрации частиц вакуума в свободном пространстве без внешнего поля, так как в диэлектрике действуют внутренние поля. Действие внешнего поля в диэлектрике своеобразно. Внутри диэлектрика происходит образование диполей, образованных элементарными частицами, под действием внешнего поля, которые уменьшают поле внутри диэлектрика и, следовательно, уменьшают концентрацию частиц вакуума по сравнению с концентрацией частиц вакуума с тем же внешним полем, но в вакууме.

При этом в этих формулах учтено запаздывание электромагнитного потенциала согласно формуле Лиенара-Вихерта, получим формулу $\varphi = \frac{e}{r - (\mathbf{r},\mathbf{V})/c}, \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{V}/c}{r - (\mathbf{r},\mathbf{V})/c}$. Радиус-вектор $\mathbf{r}$, проведенный из точки нахождения заряда в точку наблюдения, и все величины в правой части равенства взяты в момент времени t', определяющийся из формулы $t' + r(t')/c = t$, где t текущее время. Значит, скорость частиц вакуума $\mathbf{V} = \mathbf{V}_v$ в момент времени t на расстоянии $r(t')$ от электрона равна скорости электронов в момент времени t'.

Причем если размеры излучающей системы малы по сравнению с длиной волны, то имеем $t' = t - R/c$, где R расстояние от излучающей системы до частицы вакуума, или точки, которая соответствует потенциалу поля.

При этом величины потенциала определяются с точностью до неизвестной функции $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \operatorname{grad}\psi, \varphi = \varphi' - \dfrac{\partial\psi}{c\partial t}$. Т.е. имеем соотношение

$$\mathbf{j}_V = \mathbf{j}'_V + \operatorname{grad}\psi_V, \rho_V = \rho'_V - \frac{\partial\psi_V}{c\partial t}.$$

Т.е. получается, что величина тока частиц вакуума определена с точностью до градиента скаляра, а плотность частиц вакуума с точностью производной по времени от неизвестной функции. Т.е. плотность частиц вакуума переменна во времени, а сила тока определена с точностью до пространственной компоненты. Но оказывается, что плотность частиц вакуума и сила тока определены с точностью до волны частиц вакуума. Взяв величину дивергенции от силы тока и производную по времени от плотности тока, получим уравнение неразрывности потока частиц вакуума. При этом относительно величины ψ_V получим волновое уравнение. Относительно заряженных частиц вакуума может свободно распространяться волна со скоростью света, не испытывая затухания, в случае отсутствия материальных тел.

Для комплексной напряженности поля $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$ справедливо (3.3), что следует из уравнений Максвелла

$$\Delta\mathbf{F} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial t^2} = 4\pi(\nabla\rho + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} - i\nabla\times\mathbf{j}/c) \qquad (3.3)$$

тогда подставляя $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H} = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial\mathbf{A}}{c\partial t} + i\cdot\nabla\times\mathbf{A}$, определяет волновое уравнение относительно напряженности. Можно записать (3.3) в виде

$$\Delta \mathbf{U} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = -4\pi \mathbf{u}\,. \tag{3.4}$$

Где величина $\mathbf{U} = \mathbf{E} + i\mathbf{H} = [\nabla S\rho_V + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}_V S}{\partial t} - i\nabla \times \mathbf{j}_V S / c]$ комплексный поток частиц вакуума, что следует из (3.1), а величина $\mathbf{u} = -\nabla\rho - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + i\nabla \times \mathbf{j}/c$ комплексный поток источника электромагнитного поля, электронов.

Это связь двух комплексных потоков, движущегося электрона и потока движения заряженных частиц вакуума. Причем движущиеся электроны описываются решением уравнения Навье – Стокса или задачей множества тел, и состоят из совокупности частиц вакуума. Если имеем двигающееся заряженные частицы, то окружающая среда с частицами вакуума малой плотности придет в детерминированное движение. В четырехмерном пространстве интеграл от потока двигающейся частицы равен вытекающему из этой трехмерной гиперповерхности количеству частиц вакуума, причем вытекающий поток пропорционален градиенту по четырем компонентам от скорости потока частиц вакуума. При этом интеграл по замкнутой трехмерной гиперповерхности преобразуется в интеграл по четырехмерному объему отдельно для каждой l компоненте векторов

$$\int\limits_{\Omega} 4\pi u_l dxdydzdt = -\oint\limits_{S} (\nabla U_l)_n ds_n = -\int\limits_{\Omega} \nabla\nabla U_l dxdydzdt.$$

В результате получается волновое уравнение (3.4) в силу четырехмерного определения градиента и дивергенции.

4. Физический смысл комплексного пространства

4.1 Образование комплексных координат, описывающих пульсирующее решение

Опишем физический смысл комплексного решения. Рассмотрим действительное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений $x_\alpha(t)$.

Пусть начальные данные имеют среднее значение x_α^0 и дисперсию $<[\Delta x_\alpha^0]^2>$. Дисперсия начальных данных в случае уравнения Навье – Стокса определяется шероховатостью поверхности или не точно заданными начальными данными. Тогда для дисперсии решения имеем

$$<[\Delta x_l]^2>=<[x_l-<x_l>]^2>=<x_l^2>-2<x_l><x_l>+<x_l>^2=<x_l^2>-<x_l>^2.$$

Значит имеем

$$<x_l^2>=<x_l>^2+<[\Delta x_l]^2>=|<x_l>+i\sqrt{<[\Delta x_l]^2>}|^2 \qquad (4.1.1)$$

Приведу формулировку обратной теоремы Пифагора. Для всякой тройки положительных чисел a,b и c, такой, что $a^2+b^2=c^2$, существует прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. Значит, математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение образуют катеты, а гипотенузой является корень из среднего квадрата величины. Т.е величина среднего $<x_l>$ ортогональна среднеквадратическому отклонению $\sqrt{<[\Delta x_l]^2>}$, которое образует мнимую часть координаты тела. Таким образом, полученное в результате усреднения во времени декартово пространство с колебательной скоростью высокой частоты (период колебания меньше времени измерения) становится комплексным пространством. Т.е. в случае большой дисперсии величины действительного пространства, его нужно рассматривать как комплексное трехмерное пространство, где мнимая часть соответствует среднеквадратическому отклонению. При этом имеется следующая связь между переменными $\sqrt{<x_l^2>}=(<x_l>+i\sqrt{<[\Delta x_l]^2>})\alpha, |\alpha|=1$, причем комплексное число α выбирается из условия, чтобы мнимая часть имела положительное или отрицательное значение. Этому удовлетворяет среднеквадратичное отклонение. Но иногда среднеквадратичное отклонение положительно, например, в случае диэлектрической проницаемости, где вмешиваются положительные и отрицательные заряды. Тогда имеем формулу $\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{4\pi i \sigma}{\omega}$, где действительная часть пропорциональна положительному среднеквадратичному отклонению диполя, а проводимость пропорциональна среднему значению времени между столкновениями. Но зато проводимость делится на частоту, которая имеет положительный и отрицательный знак.

Следовательно, алгоритм нахождения среднего решения, или среднего в фазовом пространстве решения, и его дисперсию сводится к нахождению комплексного решения. Среднее решение соответствует действительной части решения, а квадрат комплексной части соответствует дисперсии решения. Таков физический смысл комплексного решения, действительная часть - это среднее решение, а мнимая часть – это его среднеквадратическое отклонение. Комплексное решение описывает турбулентный режим течения.

4.2 Определение колеблющейся пульсирующей функции координат перемещения потока.

Мнимая часть скорости соответствует скорости вращения в фазовом пространстве. Так как известен радиус вращения, то можно определить и частоту вращения. В плоскости вращения комплексную скорость с постоянным радиусом вращения и постоянной частотой можно представить в виде $V_x + iV_y = V_0 \exp(i\omega t)$.

В случае переменной по пространству стационарной скорости эту формулу можно представить локально в одной плоскости в виде $V_x(x,y) + iV_y(x,y) = V_0(x,y)\exp[i\int_0^t \omega(x,y,u)du]$, причем частота зависит от времени, так как смещение фазы обеспечивается гармоническими колебаниями в соседних точках. Сумма гармонических колебаний с разными частотами, зависящими от времени, определяет пульсирующий режим в фазовом пространстве, при стационарной комплексной скорости. Т.е. получается, что комплексная скорость описывает пульсирующие во времени координаты точек фазового пространства. Ситуация аналогична наличию нескольких стационарных вихрей, описывающих пульсирующее вращение потока.

Почему столь подробно описано комплексное пространство. Дело в том, что решения обыкновенных дифференциальных автономных уравнений с комплексными положениями равновесия имеет конечное решение только в комплексном пространстве см. [1].

4.3 Трехмерное комплексное пространство

Трехмерную скорость потока можно представить в виде

$$V_l = V_{tl} + iV_{nl} = V_l \exp(i\varphi_l), \varphi_l = \arg(V_{tl} + iV_{nl}).$$

Причем скорости определяются в виде интеграла от касательного ускорения, по формуле

$$V_{tl} = \int_{t_0}^{t} t_l(u) w_t(u) du + V_{tl}(t_0) = \int_{t_0}^{t} t_l(u) \frac{d\sqrt{\sum_{k=1}^{3} V_k(u) V_k^*(u)}}{du} du + V_{tl}(t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} t_l(u) \frac{d\sqrt{\sum_{k=1}^{3} [V_{tk}^2(u) + V_{nk}^2(u)]}}{du} du + V_{tl}(t_0),$$

Интеграл от нормального ускорения определяет нормальную компоненту скорости, по формуле

$$V_{nl} = \int_{\tau_0}^{\tau} w_{nl}(u) du = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{n_l(u) |\mathbf{V}|^2}{\rho(u)} du = \int_{\tau_0}^{\tau} |\mathbf{V}(u)| \frac{n_l(u)}{\rho(u)} ds =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau} |\mathbf{V}| dt_l = \begin{cases} |\mathbf{V}| [t_l(\tau) - t_l(\tau_0)], |\mathbf{V}| = const \\ \int_{\tau_0}^{\tau} |\mathbf{V}| dt_l, |\mathbf{V}| \neq const \end{cases},$$

$$\sum_{k=1}^{3} [V_{tk}^2(u) + V_{nk}^2(u)] = |\mathbf{V}|^2$$

При этом величина локальной скорости $V_{nl}(\tau_0)=0, V_{tl}(\tau_0)=V_l(\tau_0)$. Но проинтегрированная относительно центростремительного ускорения скорость отлична от нуля $V_{nl}(\tau)\neq 0$, обращаясь при постоянной скорости частицы и постоянном радиусе кривизны, за период $T=\dfrac{2\pi R}{|\mathbf{V}|}$, где величина R это радиус кривизны, в ноль при этом тело вернется в помеченную начальную точку. Радиус кривизны должен быть конечен, иначе нормальная компонента скорости обратится в ноль. При переменной скорости частицы за время, когда один из интегралов $\int\limits_{\tau_0}^{\tau} |\mathbf{V}|\,dt_l=0$, которое, при конечном радиусе кривизны одного знака траектории, конечно и равно $T=\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{R(\varphi)d\varphi}{|\mathbf{V}(\varphi)|}=\int\limits_{s_0}^{s_0+s_T}\dfrac{ds}{|\mathbf{V}(s)|}, 2\pi=\int\limits_{s_0}^{s_0+s_T}\dfrac{ds}{R(s)}$, так как касательное направление t_l, при вращении меняет знак. При этом тело сместится относительно помеченной начальной точки. Чтобы смещение было существенным радиус кривизны должен менять свой знак. Причем, когда этот период мал, по сравнению с временем процесса, это вращение воспринимается как мнимое среднеквадратичное отклонение скорости. Отметим, что тангенциальное ускорение и нормальное ускорение образуют скорость, которая направлена по касательной к траектории частицы. Величины t_l, n_l это тангенциальные и нормальные орты. Тангенциальное ускорение определяется по формуле

$$w_t = d\sqrt{\sum_{k=1}^{3}[V_{tk}^2(t)+V_{nk}^2(t)]}/dt\,.$$

Направление скоростей $\Delta V_{tl}, \Delta V_{nl}$ ортогонально и их сумма приводит к приращению модуля скорости движения $\sum\limits_{l=1}^{3}(dV_l)^2=\sum\limits_{l=1}^{3}[(dV_{tl})^2+(dV_{nl})^2]=\sum\limits_{l=1}^{3}|dV_{tl}+idV_{nl}|^2$, так как

$\sum_{l=1}^{3}(w_l)^2 = \sum_{l=1}^{3}[(w_{tl})^2 + (w_{nl})^2]$. Дифференцируемые по времени компоненты этих проекций определяют тангенциальное и нормальное ускорение. При этом вводится понятие тангенциальной и нормальной скорости, которые в декартовом пространстве не ортогональны $(\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_l) \neq 0$, но в шестимерном комплексном пространстве ортогональны и их модуль комплексного вектора $V_l = V_{tl} + iV_{nl}$ равен

$$\sum_{l=1}^{3} |V_l|^2 = \sum_{l=1}^{3}[(V_{tl})^2 + (V_{nl})^2] = \sum_{l=1}^{3} |V_{tl} + iV_{nl}|^2$$

Это доказывается представлением $\mathbf{V}_t = \sum_{l=1}^{3} V_{tl}\mathbf{e}_{tl}, \mathbf{V}_n = \sum_{l=1}^{3} V_{nl}\mathbf{e}_{nl}$ и вычислением модуля как произведения комплексно сопряженных векторов с учетом ортогональности шести действительных ортов.

5. Физический смысл уравнения ОТО

Решение уравнения ОТО и уравнений движения для дискретных тел, определяет метрический тензор, описывающий гравитационное поле. Причем метрический тензор получен при усреднении комплексной скорости частиц вакуума. При этом значение метрического тензора связано с решением уравнения Клейна-Гордона. При этом из значения метрического интервала получено уравнение Клейна-Гордона, причем оно содержит метрический тензор, выраженный через волновую функцию. Причем метрический тензор ОТО получен из свойств частиц вакуума, с учетом квантового эффекта.

Совершенно аналогичная ситуация с уравнением Клейна-Гордона и уравнением ОТО. Допустим метрический тензор ОТО связан с волновой функцией соотношением

$$g_{lk} = g_{lkg} - l_{Pl}^2 \frac{\partial_l \partial_k \psi_q}{\psi_q} \qquad (5.1)$$

Величина постоянной радиуса Планка определяется по формуле $l_{Pl}^2 = \frac{\gamma\hbar}{c^3} = \frac{\hbar^2}{m_{Pl}^2 c^2} = ƛ^2$.

Величина γ - это гравитационная постоянная, величина $\hbar$ это постоянная Планка, постоянная c это скорость света. Тогда уравнение (5.1) запишется в виде

$$g_{lkq} = g_{lk} - g_{lkg} = -ƛ^2 \frac{\partial_l \partial_k \psi_q}{\psi_q} \qquad (5.1a)$$

Где величина g_{lk} это метрический тензор тела, состоящий из непрерывного решения g_{lkg}, решение уравнения ОТО, и независимой квантовой части метрического тензора g_{lkq}, ψ_q волновая функция, описывающая тело. При этом гравитационный член и квантовый нужно рассматривать независимым образом, так как они имеют отличную структуру. Одно описывает детерминированный процесс, а другое вероятностный процесс.

$$ds_q^2 = ds^2 - ds_g^2 = g_{lkq} dx^l dx^k = -ƛ^2 \frac{\partial_l \partial_k \psi_q}{\psi_q} dx^l dx^k = -ƛ^2 \frac{d\partial_k \psi_q}{\psi_q} dx^k =$$
$$= -ƛ^2 \frac{\partial^s \partial_k \psi_q}{\psi_q} dx_s dx^k = dx_k dx^k ; ds_g^2 = g_{lkg} dx^l dx^k .$$

Откуда имеем $-ƛ^2 \partial^s \partial_k \psi_q \delta_s^k = \psi_q$,

$$-ƛ^2 \partial^k \partial_k \psi_q = \psi_q \qquad (5.2)$$

Причем вспомогательную волновую функцию ψ_q определяем в пространстве Минковского. Т.е. получается уравнение Клейна-Гордона см.[6]§10 в котором характерная длина волны элементарных частиц $\frac{\hbar}{mc}$ заменена размером Планка

$\lambda\!\!\!^{-} = \dfrac{\hbar}{m_{Pl}c}$, т.е. в случае гравитационного поля, масса частицы заменена массой Планка.

Величина метрического интервала всей системы равна $ds^2 = ds_g^2 + ds_q^2 = (g_{lkg} + g_{lkq})dx^l dx^k$. Определитель системы g считается с участием гравитационного и квантового метрического тензора, как интегральная характеристика двух разных процессов. Причем координаты у гравитационного поля и квантовой системы общие, а скорости, за счет гравитационного и квантового взаимодействия, разные $u_g^k = \dfrac{dx^k}{ds_g}$, $u_q^k = \dfrac{dx^k}{ds_q}$,кроме того, вводится величина скорости $u^k = \dfrac{dx^k}{ds}$, по суммарному метрическому тензору. Метрический интервал гравитационного и квантового поля определяется по формуле $s_g = \int_0^t \sqrt{g_{lkg}\dfrac{dx_l}{dt}\dfrac{dx_k}{dt}}dt$, $s_q = \int_0^t \sqrt{g_{lkq}\dfrac{dx_l}{dt}\dfrac{dx_k}{dt}}dt$, причем имеем суммарный метрический интервал $s = \int_0^t \sqrt{(g_{lkg} + g_{lkq})\dfrac{dx_l}{dt}\dfrac{dx_k}{dt}}dt$, где метрические тензора определяются с помощью уравнений ОТО и уравнения Клейна - Гордона.

Используя локальное решение квантовой части уравнения ОТО $\psi_q = \exp[iu_{lq}(x_0^0,...,x_0^3)(x^l - x_0^l)/\lambda\!\!\!^{-}] + O(x^l - x_0^l)^3$, где u_{lq} локальная, квантовая, четырехмерная скорость, получим локальное значение метрического тензора

$$g_{lk} = g_{lkg}(x_0^0,...,x_0^3) + u_{lq}(x_0^0,...,x_0^3)u_{kq}(x_0^0,...,x_0^3) + O(x^l - x_0^l)$$

Отсюда можно сделать вывод, что квантовые эффекты проявляются при релятивистских скоростях, когда величина скорости u_{lq} велика.

Но в случае отсутствия гравитационного поля, для одного пробного тела с малой массой, локальное решение превращается в точное решение. В случае отсутствия гравитационного поля скорость постоянна и волновая функция точно равна $\psi_q = \exp(iu_{lq}\Delta x^l / ƛ)$, причем гравитационного поля нет $g_{lkg} = g_{lkg0}$, метрический тензор равен

$$g_{lk} = g_{lkg0} + u_{lq}u_{kq}. \qquad (5.3)$$

Члены метрического тензора $g_{uvg}, -ƛ^2 \frac{\partial_u \partial_v \psi_q}{\psi_q}$ назовем соответственно гравитационным и квантовым. При этом g_{pqg0} метрический член пространства Минковского.

При этом при записи уравнения (5.2) надо использовать значение метрического тензора из (5.1а), даже в декартовой системе координат см. [11]§86, поэтому возникла ковариантная производная.

$$D^k D_k \psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l} \sqrt{-g} (g^{lk} \frac{\partial \psi}{\partial x^k}).$$

Перепишем эту формулу по-другому в виде уравнения Клейна-Гордона

$$-ƛ^2 D^k D_k \psi = -ƛ^2 \psi_{;k}^{;k} = \frac{-ƛ^2}{\sqrt{-\left| g_{uvg} - ƛ^2 \frac{\partial_u \partial_v \psi_q}{\psi_q} \right|}} \frac{\partial}{\partial x^l} [\sqrt{-\left| g_{uvg} - ƛ^2 \frac{\partial_u \partial_v \psi_q}{\psi_q} \right|} \times$$

$$\times (g_{lkg} - ƛ^2 \frac{\partial^l \partial^k \psi_q}{\psi_q}) \frac{\partial \psi}{\partial x^k}] = \psi$$

При вычислении метрического тензора используется сумма гравитационного и квантового метрический тензор g_{uvg}, g_{uvq}. При этом величина ψ_q имеет смысл потенциала, описывающего изменение метрического тензора. В формуле используются разные метрические тензоры, гравитационный и квантовый, их объединяет общая система координат.

В случае отсутствия гравитационного члена, скорость частиц постоянна и волновая функция равна $\psi_q = \exp(iu_{lq}\Delta x^l / ƛ)$. Где величина g_{lkg0}, это метрический тензор пространства Минковского, причем $g_{lk} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^k}{ds} = g_{lk} u^l u^k = (g_{lkg0} + u_{lq}u_{qk}) u^l u^k = 1$. Причем для суммарного метрического тензора используется скорость с метрическим интервалом гравитационного и квантового поля $\psi = \exp(iu_l \Delta x^l / \lambda\!\!\!^{-})$.

$$-\lambda\!\!\!^{-2} D^k D_k \psi = \frac{-\lambda\!\!\!^{-2}}{\sqrt{-\left| g_{uvg0} + u_{uq} u_{vq} \right|}} \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-\left| g_{uvg0} + u_{uq} u_{vq} \right|} (g^{lk}_{g0} + u^{lq} u^{kq}) \frac{\partial \psi}{\partial x^k}) = (g^{lk}_{g0} + u^{lq} u^{kq}) u_l u_k \psi = \psi \qquad .(5.4)$$

Т.е. получено решение в отсутствии гравитационного поля.

При этом в результате получится метрический тензор, равный $g_{lkq} = -\lambda\!\!\!^{-2} \frac{D_l D_k \psi}{\psi}$, где ковариантной производной D_l соответствует суммарный метрический тензор $g_{lk} = g_{lkg} - \lambda\!\!\!^{-2} \partial_l \partial_k \psi_q / \psi_q$.

В самом деле

$$-\lambda\!\!\!^{-2} \frac{D_l D_k \psi}{\psi} dx^l dx^k = -\lambda\!\!\!^{-2} \frac{D^s D_k \psi}{\psi} dx_s dx^k = dx_k dx^k$$

откуда имеем $-\lambda\!\!\!^{-2} \frac{D^s D_k \psi}{\psi} \delta^k_s = 1$, т.е. релятивистское уравнение Клейна-Гордона $-\lambda\!\!\!^{-2} D^k D_k \psi = \psi$. Причем метрический тензор этого уравнения равен $g_{lk} = g_{lkg} - \lambda\!\!\!^{-2} \frac{\partial_l \partial_k \psi_q}{\psi_q}$. Методом итераций надо добиваться, чтобы в уравнения Клейна-Гордона входило определение метрического тензора $-\lambda\!\!\!^{-2} \frac{D_l D_k \psi}{\psi}$.

Для гравитационного поля получится метрический тензор

$$g_{lk0} = g_{lkg} - \lambda\!\!\!^{-2} \frac{\partial_l \partial_k \psi_q}{\psi_q} = g_{lk} + \lambda\!\!\!^{-2} \frac{p_l\, p_k}{\hbar^2} = \begin{cases} g_{00} + \lambda\!\!\!^{-2} \frac{E^2}{\hbar^2 c^2}, l = k = 0 \\ g_{l0} - \lambda\!\!\!^{-2} \frac{E p_l}{\hbar^2 c}, l = 1,\ldots,3, k = 0 \\ g_{lk} + \lambda\!\!\!^{-2} \frac{p_l p_k}{\hbar^2}, l,k = 1,\ldots,3 \end{cases}.$$

и метрический интервал для свободного пространства равен

$$ds^2 = g_{lk}dx^l dx^k + d(\frac{E}{m_{Pl}c}t - \frac{p_l x^l}{m_{pl}c})^2 / 2,$$

Т.е. собственное время изменилось на величину

$$cd\tau = cdt\sqrt{g_{00} + (\frac{E}{m_{pl}c^2} - \sum_{l=1}^{3} \frac{p_l \beta_l}{m_{Pl}\sqrt{1-\beta^2}})^2 / 2} = cdt\sqrt{1 - \frac{2\gamma m}{c^2 r} + \frac{m^2}{m_{Pl}^2}(1-\beta^2)/2}\,.$$

Для микрочастиц эта поправка к изменению темпа времени мала, для макротел значительна, причем при испарении массы черной дыры поправка мала, но до испарения существенна. У массивных тел время течет быстрее, чем у тел с малой массой. При этом особенность члена g_{00} при условии $r = r_g$ в метрике Шварцшильда устраняется, а для g_{11} не устраняется, значит, определитель этой метрики стремится к бесконечности, что является не допустимым. Значит, тела с радиусом r удовлетворяющим $r < r_g$ имеют вероятность существования меньше единицы. Т.е. не при всех измерениях этот объект существует в масштабе времени изменения, характерного для галактик.

Чтобы частица находилась вечно в черной дыре, время у нее должно остановиться. Чтобы тело массы m притягивало частицу со скоростью $V = \omega r$, останавливая собственное время частицы, частица должна находиться на расстоянии $r = \dfrac{r_g}{1 + m^2(1-k^2r^2)/2m_{Pl}^2}$. Задавая этот радиус можно определить частоты вращения частицы с остановленным собственным временем. Эта частота определится из уравнения $1 - 2(r_g - r)m_{Pl}^2 / m^2 r = k^2 r^2$.

При этом частота вращения частиц с остановленным собственным временем в черной дыре определится из уравнения

$$\omega = \frac{c}{r}\sqrt{1 - \frac{2(r_g - r)m_{Pl}^2}{m^2 r}} \tag{5.5}$$

При этом, так как собственное время частицы остановилось, угол поворота частицы равен нулю. При этом частота вращения и скорость вращения не нулевая. Причем угловая скорость и скорость вращения связаны соотношением $V = \omega \cdot r$. У частиц, имеющих отличающуюся от вычисленной частоту вращения, собственное время не остановится, и они могут изменять свое положение в пространстве, т.е. испариться из черной дыры. Откуда наименьший радиус черной дыры с остановкой собственного времени определится из уравнения $r = \frac{c}{\omega}\sqrt{1 - \frac{2(r_g - r)m_{Pl}^2}{m^2 r}}$.

$$(\frac{\omega}{c})^2 r^3 - r(2\frac{m_{Pl}^2}{m^2} + 1) + \frac{2r_g m_{Pl}^2}{m^2} = 0. \qquad (5.6)$$

Откуда имеем минимальный радиус

$$r = r_g[\frac{2m_{Pl}^2}{m^2 + 2m_{Pl}^2} - (\frac{\omega}{c})^2 r_g^2 (\frac{2m_{Pl}^2}{m^2 + 2m_{Pl}^2})^4]. \qquad (5.7)$$

В случае массивной черной дыры, максимальный ее радиус немного меньше $c/\omega = r_g$. Т.е. скорость углового вращения черной дыры равна $\omega = c/r_g$ при величине $\beta = \frac{\omega r}{c} = \sqrt{1 - \frac{2(r_g - r)m_{Pl}^2}{m^2 r}}, r = r_g(1-\varepsilon), 0 < \varepsilon << 1$.

При этом величины, меньшие чем величина r, удовлетворяющие (5.6) соответствуют черной дыре с остановленным временем, а частицы с большим радиусом испаряются. Минимальный радиус не испарившейся части черной дыры равен, как это следует из (5.7) $r = r_g[1 - (\frac{\omega}{c})^2 r_g^2]$, т.е. частота вращения удовлетворяет $\omega < c/r_g$.

При максимуме частоты вращения не испарившейся части черной дыры имеем максимальный радиус черной дыры равный $r = \frac{c}{\omega}\sqrt{\frac{2m_{Pl}^2}{m^2} + 1} = \sqrt{2}\frac{m_{Pl}}{m} r_g = \sqrt{2}\frac{2\gamma m_{Pl}}{c^2} = 2\sqrt{2} l_{Pl}$ размеру Планка, при минимальном нулевом радиусе.

Размеры не испарившейся части черной дыры гораздо больше и могут стремиться к бесконечности, при нулевом значении произведения $m_q \omega_q$.

Но нулевая угловая скорость вращения невозможна, так как не испарившаяся часть черной дыры имеет угловую скорость $\omega = c / r_g$, и импульс момента инерции равен по порядку величины $mr_g^2\omega = m_q r^2 \omega_q$. Максимальный радиус, который может иметь не испарившаяся часть черной дыры с остановленным собственным временем, определяется из формулы

$$r = \frac{c}{\omega_q}\sqrt{\frac{2m_{Pl}^2}{m^2}+1} = \sqrt{2}\frac{m_{Pl}}{m}\frac{c}{\omega}\frac{r^2}{r_g^2} = \sqrt{2}\frac{m_{Pl}}{m} r_g \frac{r^2}{r_g^2} = \sqrt{2}\,2 l_{Pl}\frac{r^2}{r_g^2}.$$

Величину постоянной Планка надо заменить величиной $m\nu$, так как кинематическая вязкость вакуума $\hbar / m + \nu = \hbar / m + \hbar / m_{Pl}$ и при большой массе тела второй член больше. Значит, в уравнении, описывающем черную дыру, вместо величины $l_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar\gamma}{c^3}}$ использовать величину $l_{Pl}\sqrt{\frac{m\nu}{\hbar}} = l_{Pl}\sqrt{\frac{m}{m_{Pl}}}$

Откуда имеем порядок значения максимального радиуса черной дыры при большой массе (для примера взята масса Солнца)

$$r = \frac{r_g^2}{2l_{Pl}\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m_{Pl}}{m}} = \frac{\gamma^2 m_{pl}^{1/2} m_s^{3/2}}{2c^4 l_{Pl}\sqrt{2}}\left(\frac{m}{m_s}\right)^{3/2} =$$

$$= 10^{-16-42+33-5/2+33\cdot 3/2}\left(\frac{m}{m_s}\right)^{3/2} \sim 10^4\left(\frac{m}{m_s}\right)^{3/2}$$ св.л.

Т.е. получается, что радиус медленно вращающейся черной дыры может быть огромным, превышающим в $\frac{r_g}{l_{Pl}}\sqrt{\frac{m_{Pl}}{m}}$ ее гравитационный радиус и для черной дыры с массой Солнца может равняться $10^{22} cm$.

Но при быстром вращении черной дыры, это значение корня использовать нельзя, реализуется другое значение корня, и радиус черной дыры мал. Где величина m_s масса Солнца, m - масса черной дыры. При этом согласно исследователям Гвидо Ризолити (Guido Risaliti) и его коллегам из Гарвард-Смитсоновского центра астрофизики (Cfa) определили, что скорость вращения поверхности черной дыры составляет $0.8c$, где c скорость света.

Скорость частиц вакуума образует тензор ОТО с учетом квантовых эффектов. Общая теория относительности построена для макротел, являющихся совокупностью частиц вакуума, и они вращаются с мнимой скоростью и поступательно движутся с действительной скоростью. Определим квадрат комплексной координаты материальных частиц, из которых состоит вакуум, двигающихся с поступательной скоростью $V_{s\alpha}, s=1,...,3, \alpha$ номер частицы. При этом частицы вакуума будут вращаться с переменной мнимой скоростью $iw_{s\alpha}(t,x_1,..,x_3)$. Считаем, что скорости частиц вакуума равномерно распределены в малом объеме, причем скорость вращения равна $w_{s\alpha} = w_{s\alpha}(t,x_1,...,x_3)$ и имеется скорость поступательного движения $V_{s\beta} = V_{s\beta}(t)$, поступательное движение малого объема прямолинейно и зависит только от времени

$$
\begin{gathered}
ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=-N}^{N} \sum_{s=1}^{3} (id\Delta w_{s\alpha} + d\Delta V_{s\beta})^2 t_q^2 /(2N) = \\
= \sum_{\alpha,\beta=-N}^{N} \sum_{s=1}^{3} (i\frac{\partial \Delta w_{s\alpha}}{\partial x^k} dx^k + i\frac{\partial \Delta w_{s\alpha}}{\partial t} dt + \frac{d\Delta V_{s\beta}}{dt} dt)^2 t_q^2 /(2N) = \\
= -\sum_{\alpha=-N}^{N} \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial \Delta w_{s\alpha}}{\partial x^k} \frac{\partial \Delta w_{s\alpha}}{\partial x^l} t_q^2 /(2N) dx^k dx^l + \\
+ \sum_{\alpha,\beta=-N}^{N} \sum_{s=1}^{3} [2\frac{\partial i\Delta w_{s\alpha}}{\partial x^k} \frac{d\Delta V_{s\beta}}{dt} - 2\frac{\partial \Delta w_{s\alpha}}{\partial x^k} \frac{\partial \Delta w_{s\alpha}}{\partial t}] dx^k dt \cdot t_q^2 /(2N) + \\
+ \sum_{\alpha,\beta=-N}^{N} \sum_{s=1}^{3} [(\frac{d\Delta V_{s\beta}}{dt})^2 + 2\frac{\partial i\Delta w_{s\alpha}}{\partial t} \frac{d\Delta V_{s\beta}}{dt} - (\frac{\partial \Delta w_{s\alpha}}{\partial t})^2] dt^2 t_q^2 /(2N) = \quad (5.8) \\
= -\sum_{k,l=1}^{3} h_{kl} dx^k dx^k + \sum_{k=1}^{3} h_{k0} dx^k c dt + h_{00} c^2 dt^2
\end{gathered}
$$

Величина c скорость света, равная

$$2c^2 \sum_{\beta=-N}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{1-V_\beta^2/c^2}}-1\right)/N = 2c^2 \sum_{\beta=-N}^{N} (u_{0\beta}-1)/2N = \sum_{\beta=-N}^{N} V_{rel\beta}^2/2N =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} V_{rel}^2 \exp(-V_{rel}^2/2c^2) dV_{rel} /(c\sqrt{2\pi}) = c^2 ,$$

$$V_{rel\beta}^2 = 2c^2(u_{0\beta}-1) \in [0,\infty]; \frac{V_\beta}{c} = \sqrt{1-\frac{1}{(1+\frac{V_{rel\beta}^2}{2c^2})^2}}$$

константа $t_q = \frac{\hbar^2}{m_e e^2 c} = \frac{\hbar^3}{137 m_e e^4}$ это постоянная квантовой механики. Т.е. получаем формулу инвариантного интервала общей теории относительности в системе координат, где средняя локальная скорость частиц вакуума равна нулю.

При этом из соотношения для средней скорости равной нулю, получен метрический тензор ОТО и СТО. Т.е. получено релятивистское определение скорости. Величина g_{kl} определена с учетом среднего локального течения, состоящего из четырехмерной скорости

$$g_{kl} = \sum_{\alpha=-N}^{N} \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial \Delta w_{s\alpha}}{\partial x^k} \frac{\partial \Delta w_{s\alpha}}{\partial x^l} t_q^2 /(2N) + u_k u_l$$
$$g_{k0} = -\sum_{\alpha=-N}^{N} \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial \Delta w_{s\alpha}}{\partial x^k} \frac{\partial \Delta w_{s\alpha}}{c\partial t} t_q^2 /(2N) + u_k u_0 , \qquad (5.9)$$

при этом коэффициент при временной компоненте метрического тензора равен

$$g_{00} = \sum_{\beta=-N}^{N} \sum_{s=1}^{3} \left(\frac{d\Delta V_{s\beta}}{cdt}\right)^2 t_q^2 /(2N) + u_0^2 - \sum_{\alpha=-N}^{N} \sum_{s=1}^{3} \left(\frac{\partial \Delta w_{s\alpha}}{c\partial t}\right)^2 t_q^2 /(2N). \quad (5.10)$$

Где суммируя первые члены (5.9) и (5.10), получим наряду с гравитационным членом и квантовый член. При этом члены со средней локальной скоростью опишут совокупность частиц вакуума или скорость тел в локальной системе координат. Этот член с локальной средней скоростью см. формулу соответствует квантовым эффектам гравитационного поля.

При этом воспользовались соотношением $\sum_{\alpha=-N}^{N}\frac{\partial w_{s\alpha}}{\partial x^k}=0, \sum_{\alpha=-N}^{N}\frac{\partial w_{s\alpha}}{\partial t}=0$.

При этом имеем, используя вместо кинетической энергии системы полную энергию

$$g_{rr}=\sum_{s=1}^{3}(\frac{i\Delta w_s}{\Delta r})^2 t_q^2=\frac{(i\Delta w)^2+2U/m}{c^2}+u_r^2=-(1+\frac{2\gamma M}{c^2})+u_r^2=,$$
$$=-(1+r_g/r)+u_r^2, r_g=2\gamma M/c^2$$

$$g_{00}=\sum_{s=1}^{3}(\frac{\Delta V_s}{c\Delta t})^2 t_q^2=\int_0^\infty[\frac{(\Delta V)^2+2U/m}{c^2}+u_0^2]\exp[-m_\gamma(\Delta V)^2/(2m_\gamma c^2)]d\Delta V=$$
$$=1-2\gamma M/(rc^2)+u_0^2=1-r_g/r+u_0^2$$

Где M, масса частицы создающей гравитационное поле.

В формулах (5.9) и (5.10) содержится квантовый член, соответствующий средней локальной скорости частиц вакуума, описывающий также скорость пробного тела малой массы. Значит, частицы вакуума правильно описывают квантовое решение уравнений ОТО.

Скорость $w_{s\alpha}$ стационарна, т.е. от времени не зависит. Общая теория относительности не допускает физической сингулярности определителя, при средней локальной скорости частиц вакуума, равной нулю, образованного метрическим тензором, поэтому имеем $h_{00}h_{rr}=const$, откуда определяется более точная формула $h_{rr}=-\frac{1}{1-r_g/r}, h_{00}=1-r_g/r$ при средней локальной скорости частиц вакуума u_l, равной нулю.

Используя характерный радиус элементарных частиц и массивных тел, получаем уравнение $\lambda_\alpha=\frac{\gamma m_\alpha}{c^2}+\frac{e^2}{m_\alpha c^2}$, описывающее сумму гравитационного радиуса электромагнитного и гравитационного поля, имеет в общем случае два корня, равных

$$m_\alpha=\frac{\lambda_\alpha c^2}{4\gamma}\pm\sqrt{(\frac{\lambda_\alpha c^2}{4\gamma})^2-\frac{e^2}{\gamma}}.$$

Причем при большой величине $\frac{\lambda_\alpha c^2}{2\gamma}$, что соответствует размеру элементарных частиц, имеем два действительных корня $m_\beta = \frac{\lambda_\alpha c^2}{2\gamma}, m_\alpha = \frac{2e^2}{\lambda_\alpha c^2}$, т.е. при величине

$$\lambda_\alpha = r_{ge} = \frac{2e^2}{m_e c^2}, \tag{5.11}$$

равной радиусу электрона, получим две частицы. Одна с массой электрона, а другая массивная частица с массой $m_\beta = \frac{\lambda_\alpha c^2}{2\gamma} = \frac{e^2}{m_e \gamma} = \frac{\hbar c}{137 m_e \gamma} = \frac{m_{Pl}^2}{137 m_e} \approx \frac{(2.2 \cdot 10^{-5})^2}{137 \cdot 10^{-27}} = 3.53 \cdot 10^{15} g$. Другая частица имеет размер $\lambda_\beta = \frac{2e^2}{m_\beta c^2} = \frac{2\gamma m_e}{c^2} = \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-7-27}}{9 \cdot 10^{20}} = 1.4 \cdot 10^{-54} cm$, т.е. малую поверхность рассеяния. Если подставить значение массы m_β в уравнение для радиуса $\lambda_\beta = \frac{2\gamma m_\beta}{c^2} = \frac{2e^2}{m_e c^2}$, т.е. получим радиус первой частицы, т.е. электрона. Т.е. такая подстановка не корректна.

По этим формулам каждой элементарной частице можно поставить в соответствие массивную частицу, имеющую малую поверхность рассеяния, т.е. трудно обнаруживаемую, в связи с малыми размерами и не рассеивающие электромагнитное излучение. Эти частицы являются кандидатами в частицы темной материи.

При этом массе частицы, равной $m = m_{Pl} / \sqrt{137} = \sqrt{\frac{\hbar c}{137\gamma}}$, соответствует такая же масса парной частицы. При этом длина Планка равна $l_{Pl} = \lambda_\alpha = \frac{\sqrt{137} e^2}{m_{Pl} c^2} = \frac{\sqrt{137}\hbar}{m_{Pl} c 137} = \sqrt{\frac{\hbar\gamma}{137 c^3}}$. Величина времени Планка равна $t_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar\gamma}{137 c^5}}$. При этом константы Планка определены с точностью до множителя. Соображения, описанные выше, позволяют оценить этот множитель.

В случае отсутствия внешнего потенциала для частиц вакуума имеем $g_{kl} = \delta_{kl}$. При этом имеем что $\sum_{s=1}^{3} (\frac{\Delta w_s}{\Delta x_k})^2 t_q^2 = 1$, $\sum_{s=1}^{3} (\frac{\Delta V_s}{c\Delta t})^2 t_q^2 = 1$ и скорость $w_{s\alpha}$ стационарна, т.е. от времени не зависит.

Что приводит к предположению существования кванта времени, пространства и скорости

$$\Delta x_k = l_q / N = l_{Pl} / \sqrt{137}, \Delta t = t_q / N = t_{Pl} / \sqrt{137},$$

$$\Delta V = \sqrt{\sum_{s=1}^{3} (\Delta w_s)^2} = c / N = 10^{-14} cm / \sec,$$

$$l_q = \hbar^2 / m_e e^2, t_q = l_q / c, \alpha = \frac{1}{137.035989} \quad .$$

$$N = \hbar^2 \sqrt{137} / (l_{Pl} m_e e^2) = \frac{\sqrt{137} a_0}{l_{Pl}} =$$

$$= \frac{\sqrt{137.035989} \cdot 0{,}5291772109\,2 \cdot 10^{-8}}{1.616199 \cdot 10^{-33}} = \frac{137.035989^{3/2} m_{Pl}}{m_e} =$$

$$= 3.8328658 \cdot 10^{25} = \begin{cases} 2^{85} / [(1+\alpha)(1+\alpha^{1.5})^3 (1+\alpha^2)^2 (1+\alpha^{2.5})^5 (1+\alpha^3)^2](1 \pm 10^{-6}) \\ 696^9 (1 \pm 0.9 \cdot 10^{-4}) \end{cases}$$

Константа N определена с точностью измерения по данным CODATA 2010,2012 $a_0 = 0{,}5291772109\,2(17)10^{-8} cm$, величина $l_{Pl} = 1.616199(97)10^{-33} cm$. При этом эта константа равна степени двойки, с поправкой на множитель, зависящий от мировых констант.

Пределом квантовой теории гравитации является не классическая механика, а квантовая механика. Поэтому $N \cdot l_{Pl} / \sqrt{137}$ должна быть характерной конечной величиной квантовой механики l_q.

Причем среднее от квадратов случайной величины равно квадрату среднего плюс дисперсия. Значит, величина скорости света может оказаться больше скоростей отдельных частиц при большой дисперсии действительной скорости вращения частиц вакуума.

При этом добавка к скорости поступательного движения аддитивной величины скорости инерциальной системы координат, не приведет к изменению метрического тензора. Используется формула суммирования скоростей Галилея, так как получается метрический тензор пространства Минковского с помощью комплексной скорости в обычной евклидовой метрике. И только после этого возникает формула релятивистского сложения скоростей.

При этом температура вакуума равна среднему квадрату скорости частиц вакуума

$$kT = 2m_\gamma c^2 \sum_{\beta=-N}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - V_\beta^2 / c^2}} - 1\right) / N = 2m_\gamma c^2 \sum_{\beta=-N}^{N} (u_{0\beta} - 1)/2N =$$

$$= m_\gamma \int_{-\infty}^{\infty} V_{rel}^2 \exp(-V_{rel}^2 / 2c^2) dV_{rel} / (c\sqrt{2\pi}) = m_\gamma c^2, \qquad (5.12)$$

$$V_{rel\beta}^2 = 2c^2(u_{0\beta} - 1) \in [0, \infty]; \frac{V_\beta}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + \frac{V_{rel\beta}^2}{2c^2})^2}}$$

Откуда имеем значение температуры

$$T = \frac{8.4 \cdot 10^{-55} 9 \cdot 10^{20}}{1.38 \cdot 10^{-16}} = 5.47 \cdot 10^{-18} {}^\circ K. \qquad (5.13)$$

Отметим, что в микромире метрический тензор изрезан. Скорость частиц вакуума, зависит от потенциалов, действующих на них. Внутри тела действует множество потенциалов, которые изменяют скорость и концентрацию частиц вакуума, и, следовательно, меняют метрический тензор. Это говорит о связи метрического тензора не только с гравитационным полем, но и с полем сильного, слабого, и электромагнитного взаимодействия.

Выводы

Существует микро масштаб, который описывает свойства частиц, меньших чем элементарные частицы. Это во первых теория струн и петлевая гравитация. Но они основаны только на теоретических предположениях этих масштабов длин и времени. Предлагается, основанная на связи между уравнением Шредингера и Навье – Стокса и следующей из этой связи свойствах кинематической вязкости вакуума ввести понятие частиц вакуума. Свойства этих частиц вакуума получены на основании физических формул, основываясь на знании кинематической вязкости вакуума и экспериментальной плотности вакуума. Свойства этих частиц вакуума описывают физический смысл электромагнитного поля и метрического тензора ОТО. Они определяют значение нижнего уровня энергии электрона в атоме водорода и энергию нуклонов в ядре атома. При этом пространство время частиц вакуума эвклидово с представлением Ньютона о пространстве времени. Отличие от пространства Ньютона в том, что это пространство комплексное. Из свойств этого пространства на масштабах квантовой механики получены свойства пространства Минковского и Римана.

Волновая функция квантовой механики описывает потенциал скорости частиц вакуума по формуле $V_l = -i\frac{\hbar}{m}\nabla_l \ln\psi$, где V_l скорость частиц вакуума, а ψ волновая функция системы. Частицы вакуума группируются в полях электромагнитного взаимодействия, причем их совокупность образует элементарные частицы. Но поведение частиц вакуума квантовая механика описывает приближенно, скорость вычисляется с помощью потенциала скорости, что справедливо для потенциального потока частиц вакуума. По мере увеличения внешнего поля плотность и энергия частиц вакуума растет, и, следовательно, увеличивается их скорость, что приводит к увеличению числа Рейнольдса и переходу в турбулентный режим. В ядре атома, при большой концентрации и энергии частиц вакуума, гидродинамическое приближение о потенциальной скорости не работает, и надо использовать турбулентный режим расчета частиц вакуума, и значит, надо описывать ядро атома по-другому. При этом для описания ядра атома необходимо использовать уравнение Навье – Стокса, из которого как частный случай при потенциальной скорости, следует уравнение Шредингера. Описание решения уравнения Навье – Стокса в турбулентном режиме, см. [1]. Отметим, что как доказано в [1], имеется счетное количество решений уравнения Навье – Стокса, со счетным количеством собственных энергий в турбулентном режиме. Выскажем замечания по поводу развития идеи описания элементарных частиц с помощью частиц вакуума. Представляет интерес описание стандартной модели с помощью частиц вакуума. С помощью частиц вакуума можно описывать ядро атома, причем взаимодействие между огромным количеством диполей при большой плотности частиц вакуума в ядре приводит к возможности их описания с помощью электромагнитных сил см. конец раздела 2 .

Можно определить зависимость метрического тензора и волновой функции от координат, и вычислить детерминированную и вероятностную часть метрического тензора, но это возможно только для неподвижных объектов. Можно определить метрический тензор и для двигающихся объектов. При этом метрический тензор нашей Солнечной системы, состоит из детерминированной гравитационной части, имеющей первый порядок малости и вероятностной части, имеющей второй порядок малости. Порядок малости определяется отношением трехмерной скорости к скорости света. По определенному гравитационному полю определяется с помощью детерминированного уравнения движения зависимость $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0), \mathbf{u} = \mathbf{u}(s, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$, описывающая движение частицы малой массы, где выделенные жирным шрифтом описаны переменные, которые являются четырехмерными векторами. Причем это движение частицы малой массы от массы частицы не зависит, и в четырехмерном фазовом пространстве можно определить траектории движения, без учета взаимного влияния. Решая уравнение Клейна-Гордона, находим зависимость волновой функции от координат. Подставляем вместо координат значение координат траектории движения, опишем зависимость метрического тензора от метрического интервала s и начальных условий хаотической части метрического тензора, которая будет определена с плотностью вероятности $|\psi|^2$.

Интерес представляет описание не стационарного метрического тензора черной дыры, нахождение ее хаотической части, при большой скорости приближения к черной дыре.

Причем в микромире с его большими скоростями, гравитационное поле мало, но вероятностные значения поправок к метрическому тензору существенны, изменяя метрический тензор до значения $g_{lk} = g_{lk0} + u_l u_k$, где g_{lk0} метрический тензор пространства Минковского. Порядок величины поправок совпадает с порядком собственной энергии атома водорода, т.е. может появиться аддитивная составляющая энергии. Эти поправки могут приводить к отличию метрики пространства от метрики Минковского и изменить описание электрона в атоме и описание ядра атома.

Список литературы

1. *Якубовский Е.Г.* Исследование решений уравнения Навье – Стокса, "Энциклопедический фонд России", 2014, 60с., http://russika.ru/sa.php?s=868
2. *Л.Д.Ландау, Е.М. Лифшиц* Гидродинамика, т.VI, М.-, «Наука», 1988г.,
3. *Кикоин И.К.* Таблицы физических величин. Справочник. М.: «Атомиздат», 1976г.,1009с.
4. *Матвеев А.Н.* Молекулярная физика. М.: «Высшая школа»,1981, -400с.
5. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т.III, Электричество. -М: «Физматлит», 2004. -656с.
6. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика, т.IV, М.,- «Наука»,1989 г., 727
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика Нерелятивистская теория т.III, Наука, М.,1969,768с.

8. *Е. Якубовский* Обобщение уравнений ОТО и квантовой механики. Решение обобщенных уравнений. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 120с.
9. *Горбунов Д.С., В.А. Рубаков* Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего взрыва. -М.: издательство ЛКИ, 2008, 552с.
10. *Рубаков В.А.* Классические калибровочные поля. Бозонные теории. М., 2005, -296с.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля т.II, М.,- «Наука», 1973,564с.