

Первые интегралы уравнений Навье-Стокса  
в градиентном представлении скорости

Якубовский Е.Г.

Уравнение Шредингера связано с уравнением Навье-Стокса. Получим из уравнения Шредингера уравнение Навье-Стокса в сферической системе координат. Получается первый интеграл трех уравнений Навье-Стокса для потенциального течения. Если воспользоваться разделением переменных, то этот первый интеграл распадается на три интеграла, каждый из которых является одномерным. Определяются разделяющие константы каждого из интегралов в случае декартовой системы координат по потенциальной энергии и определяется решение уравнений Навье-Стокса и Шредингера в новых условиях. Это же можно сделать в случае сферической системы координат, но получатся более сложные соотношения.

Уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi$$

Если взять волновую функцию в виде

$$\psi(r, \theta, \varphi) \exp(-iEt / \hbar) = \exp[-iEt / \hbar + \int_0^r \frac{\partial \ln \psi}{\partial r} dr + \int_0^\theta \frac{\partial \ln \psi}{\partial \theta} d\theta + \int_0^\varphi \frac{\partial \ln \psi}{\partial \varphi} d\varphi],$$

то получим дифференциальное уравнение относительно логарифма волновой функции. Если представить волновую функцию с разделяющимися переменными, то получим три уравнения, каждое относительно одной неизвестной, при этом потенциал надо представить в виде суммы трех потенциалов  $U(r, \theta, \varphi) = U(r) + \frac{\hbar^2}{mr^2} [U(\theta) + \frac{U(\varphi)}{\sin^2 \theta}]$ . Продифференцировав эти

уравнения по независимой переменной, получим уравнения, являющиеся усеченные уравнения Навье-Стокса.

$$\begin{aligned}
 -E = -i\hbar \frac{\partial \ln \psi}{\partial t} = & \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \frac{\partial \ln \psi}{\partial r} \right)^2 + \frac{d^2 \ln \psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \ln \psi}{\partial r} \right] - U + \\
 & + \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left[ \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial \theta^2} + \left( \frac{\partial \ln \psi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial \ln \psi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right] + \\
 & + \frac{\hbar^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left[ \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{\partial \ln \psi}{\partial \varphi} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \quad (1)$$

Продифференцируем это уравнение по радиусу, получим уравнение

$$\begin{aligned}
 m \frac{\partial V_r}{\partial t} = & \left[ -mV_r \frac{\partial V_r}{\partial r} - i\hbar \frac{d^2 V_r}{dr^2} / 2 - \frac{i\hbar}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{i\hbar V_r}{r^2} \right] - \frac{\partial U}{\partial r} + \\
 - \frac{i\hbar}{2r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{i\hbar \partial V_r}{2r^2 \partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - mV_\theta \frac{\partial V_r}{r \partial \theta} + \frac{i\hbar \partial V_\theta}{r^2 \partial \theta} + m \frac{V_\theta^2}{r} + \frac{i\hbar V_\theta}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \\
 - \frac{i\hbar}{2r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \varphi^2} - V_\varphi \frac{\partial V_r}{r \sin \theta \partial \varphi} + \frac{i\hbar}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{mV_\varphi^2}{r}, \\
 V_r = -i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \ln \psi}{\partial r}, V_\theta = -i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \ln \psi}{r \partial \theta}, V_\varphi = -i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \ln \psi}{r \sin \theta \partial \varphi}
 \end{aligned}$$

Это уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_\theta \frac{\partial V_r}{r \partial \theta} + V_\varphi \frac{\partial V_r}{r \sin \theta \partial \varphi} - \frac{V_\theta^2 + V_\varphi^2}{r} = \\
 = -\frac{i\hbar}{2m} \left[ \Delta V_r - \frac{2V_r}{r^2} - \frac{2 \partial \sin \theta V_\theta}{\sin \theta r^2 \partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right] - \frac{\partial U}{m \partial r}
 \end{aligned}$$

Дифференцируя по углам, получим остальные уравнения Навье-Стокса. Уравнения Навье-Стокса в случае наличия потенциала скорости допускают первый интеграл (1).

В случае разделения переменных у волновой функции они допускают три первых интеграла

$$\begin{aligned}
 -E &= \frac{\hbar^2}{2m} \left[ V_r^2(r) + \frac{dV_r(r)}{dr} + \frac{2V_r(r)}{r} \right] - U(r) - \frac{\hbar^2 \lambda}{2mr^2} \\
 V_\theta(\theta) \cot \theta / 2 + \frac{\partial V_\theta(\theta)}{\partial \theta} / 2 + V_\theta^2(\theta) / 2 - U(\theta) &= -\lambda / 2 - \frac{s^2}{2 \sin^2 \theta} \\
 V_\varphi^2(\varphi) / 2 + \frac{\partial V_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} / 2 - U(\varphi) &= s^2 / 2 \\
 V_r(r) = \frac{\partial \ln \psi}{\partial r}, V_\theta(\theta) = \frac{\partial \ln \psi}{\partial \theta}, V_\varphi(\varphi) = \frac{\partial \ln \psi}{\partial \varphi}
 \end{aligned}$$

Для частных случаях эти уравнения допускают решения в квадратурах, например, для атома водорода, эти уравнения имеют решение в безразмерном виде  $V_r(r) = \frac{\partial \ln R_{nl}(r)}{\partial r}$ ,  $V_\theta(\theta) = \frac{\partial \ln P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta}$ ,  $V_\varphi(\varphi) = m$ . Угадывая вид решения для скорости, можно проинтегрировать эти дифференциальные уравнения для разных потенциалов и квантовых числах.

Так, например, сделав во втором уравнении подстановку  $V_\theta(\theta) = p(\theta) \sin \theta$  получим дифференциальное уравнение

$$p(\theta) \cos \theta - \sin^2 \theta \frac{\partial p(\theta)}{\partial \cos \theta} / 2 + p^2(\theta) \sin^2 \theta / 2 - U(\theta) = -\lambda / 2 - \frac{s^2}{2 \sin^2 \theta}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (2) из [1] на стр. 6 (нумерация формул перепутана надо смотреть формулу (2) на стр.6), если изменить знак неизвестной функции при нулевом угловом потенциале и определить  $z = \cos \theta, s = 0$ .

$$\text{Получим } p(\theta) = -\frac{\partial \ln P_l^m(\cos \theta)}{\partial \cos \theta} = -\sum_{k=1}^l \frac{1}{\cos \theta - \alpha_k} \text{ при целом орбитальном}$$

квантовом числе. Подстановка этой суммы и приведение дроби к общему знаменателю определит при условии  $\lambda = l(l+1), m = 0$  функцию Лежандра. При условии  $l = 0$  получаем  $p(\cos \theta) = 0, P_1^0(\cos \theta) = 1$ . При условии  $l = 1$  получим решение  $p(\cos \theta) = -\frac{1}{\cos \theta}, \alpha_1 = 0, P_1^0(\cos \theta) = \cos \theta$ . В случае произвольного  $\lambda, s = 0$

решение надо искать в виде  $p(\theta) = -\frac{\mu}{\cos \theta} - \sum_{k=1}^l \left[ \frac{1}{\cos \theta - \alpha_k} + \frac{1}{\cos \theta + \alpha_k} \right]$  см. [1].

Пользуясь аналогией решения для атома водорода, можно получить новое решение и для разной зависимости потенциала от радиуса по аналогичному принципу, вычислив при этом собственную энергию.

Для контроля вычислений проведем вывод уравнения Навье-Стокса в декартовой системе координат. Волновая функция равна

$$\psi(t, r, \theta, \varphi) = \exp[-iEt / \hbar + \int_0^{x_k} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_k} dx_k]$$

Тогда уравнение Шредингера запишется в виде

$$-i\hbar \frac{\partial \ln \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{k=1}^3 \left[ \left( \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{d^2 \ln \psi}{dx_k^2} \right] - U \quad (2)$$

Продифференцируем уравнение по координате, получим

$$m \frac{\partial V_n}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \left[ -mV_k \frac{\partial V_n}{\partial x_k} - \frac{i\hbar}{2} \frac{d^2 V_n}{dx_k^2} \right] - \frac{\partial U}{\partial x_n}$$

$$V_n = \frac{-i\hbar}{m} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_n}$$

Разделим это уравнение на массу, получим

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 V_k \frac{\partial V_n}{\partial x_k} = -\frac{i\hbar}{2m} \sum_{k=1}^3 \frac{d^2 V_n}{dx_k^2} - \frac{\partial U}{m \partial x_n}.$$

Получим уравнение Навье-Стокса с кинематической вязкостью  $\nu = -\frac{i\hbar}{2m}$ .

Первый интеграл уравнения Навье-Стокса в случае потенциальной скорости равен (2). При разделении переменных он распадается на три первых интеграла, которые запишем в безразмерном виде

$$-E = V_k^2(x_k) + \frac{dV_k}{dx_k} - U(x_k) - E_n, k = 1$$

$$-E_n = V_n^2(x_n) + \frac{dV_n}{dx_n} - U(x_n), n = 2, 3 \quad (3)$$

$$V_k = \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_k}, k = 1, \dots, 3$$

Решим второе уравнение (3). При условии  $V_m(x_m) = \sqrt{-E_m} + \alpha_m(x_m) + \sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{x_m - \beta_k}$ .

Тогда получим уравнение

$$2\sqrt{-E_m}[\alpha_m(x_m) + \sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{x_m - \beta_k}] + \alpha_m^2(x_m) + 2\alpha_m(x_m) \sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{x_m - \beta_k} + \alpha_m'(x_m) - U(x_m) = 0$$

.

Тогда в случае радиального квантового числа  $n_r = 0$ , получаем уравнение

$$2\sqrt{-E_m} \alpha_m(x_m) + \alpha_m^2(x_m) + \alpha_m'(x_m) - U(x_m) = 0.$$

Это уравнение в случае  $U(x_m)$  полинома  $2N$  степени содержит  $2N+1$  уравнения, так как образуется полином  $2N$  степени. Функция  $\alpha_m(x_m)$  является полиномом степени  $N$  содержит  $N+1$  неизвестных коэффициентов. Плюс один неизвестных коэффициента  $E_m$ . Из равенства количества неизвестных количеству уравнений имеем  $N=1$ . Задача имеет не единственное решение, так как необходимо решать квадратное уравнение. При другом радиальном числе прибавится степень уравнения и на столько же прибавится количество неизвестных коэффициентов  $\beta_k$ . Среди коэффициентов потенциала  $U(x_m)$  степени  $2N$  могут быть  $p \leq N-1$  неизвестных коэффициента, остальные коэффициенты надо задавать. Тогда степень полинома равна  $N = p+1$ .

Решим задачу в случае  $p=0$ ,  $n_r=0$ . Имеем уравнение

$$2\sqrt{-E_m}(ax+b) + a^2x^2 + 2abx + b^2 + a - c_0 - c_1x - c_2x^2 = 0.$$

Эта система уравнений имеет два решения  $a = \pm\sqrt{c_2}$ ,  $E_m = c_0 - \frac{c_1^2}{4c_2} \mp \sqrt{c_2}$

$b = \pm \frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-E_m}$ . При величине  $c_2 < 0$ , решение будет комплексным,

турбулентным, причем потенциальная энергия имеет максимум. При условии  $c_2 > 0$  минимума потенциальной энергии решение будет комплексным,

турбулентным, если  $E_m = c_0 - \frac{c_1^2}{4c_2} \mp \sqrt{c_2} > 0$ . Волновая функция равна

$\psi = \exp(\pm \sqrt{c_2} x_m^2 / 2 + (\pm \frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-E_m}) x_m)$  в случае  $c_2 < 0$  имеет комплексную фазу

и на конечном отрезке реализуется. При условии положительного  $c_2 > 0$  надо выбрать отрицательное значение  $a = -\sqrt{c_2} < 0$ , тогда волновая функция имеет максимум, и на бесконечности координаты стремится к нулю.

Решение уравнения Навье-Стокса имеет вид

$V_m(x_m) = \pm \sqrt{c_2} x_m / L \pm \frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-E_m}$  и справедливо для ограниченной области и

при перепаде давления  $U(x_m) = p(x_m) = c_0 + c_1 x_m / L + c_2 x_m^2 / L^2$  при энергии потока

$$E_m = c_0 - \frac{c_1^2}{4c_2} \mp \sqrt{c_2} / L.$$

Получив решение для трех направлений скорости нужно использовать уравнение неразрывности для вычисления связи между тремя решениями  $\text{div}\mathbf{V} = 0$ . В случае прямоугольного параллелепипеда в трех направлениях

сечения реализуется равенство нулю дивергенции скорости  $\sum_{k=1}^3 \pm \sqrt{c_{2k}} / L_k = 0$  и

наряду с постоянной компонентой скорости потока

$$\frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-E_m} = \text{const}, c_1 / L \ll 1, c_2 / L^2 \ll 1 \text{ имеется линейный по координате член.}$$

Это решение для прямоугольного параллелепипеда, у которого на трех гранях скорость равна  $\pm \frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-E_m}$ , на остальных гранях скорость равна

нулю, при этом выполняется  $\sum_{k=1}^3 \pm \sqrt{c_{2k}} / L_k = \text{div}\mathbf{V}(0) = 0$ , т.е. втекаемые и

вытекаемые потоки компенсируются. Кроме того, должно выполняться

условие  $\sqrt{c_2} + \frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-E_m} = 0$ , т.е. скорость на гранях прямоугольного

параллелепипеда, противоположных граням, в которых поток втекает, равна

нулю. Такой своеобразный бассейн с вращением жидкости по сложному закону.

В случае  $n_r = 1$  получаем систему уравнений

$$[2\sqrt{-E_m}\alpha_m(x_m) + \alpha_m^2(x_m)](x_m - \beta_1) + 2(\sqrt{-E_m} + 1)\alpha_m(x_m) + [\alpha_m'(x_m) - U(x_m)](x_m - \beta_1) = 0.$$

Которая в случае  $U(x_m)$  полинома  $2N$  степени содержит  $2N + 2$  уравнения, так как образуется полином  $2N + 1$  степени. Функцию  $\alpha_m(x_m)$  возводится в квадрат и умножается на линейную функцию и является полиномом степени  $N$  содержит  $N + 1$  неизвестных коэффициентов. Плюс два неизвестных коэффициента  $\beta_1, E_m$ . Из равенства количества неизвестных количеству уравнений имеем  $N = 1$ . Задача имеет не единственное решение, так как надо решать квадратное уравнение. При другом радиальном числе прибавится степень уравнения и на столько же прибавится количество неизвестных коэффициентов  $\beta_k$ . Среди коэффициентов потенциала  $U(x_m)$  степени  $2N$  могут быть  $p \leq N - 1$  неизвестных коэффициента, остальные коэффициенты надо задавать. Тогда степень полинома равна  $N = p + 1$ . Это решение описывает бассейн в виде прямоугольного параллелепипеда с особенностями при определенных значениях возможно комплексной координаты, т.е. пульсации мнимой части координаты с амплитудой, равной мнимой части. В случае скорости, изменяющейся по закону  $V_k(x_k) = \frac{1}{x_k - \beta_{1k}}$  в точке с координатой  $x_k = \text{Re } \beta_{1k}$  наблюдается колебание с амплитудой  $-1/\text{Im } \beta_{1k}$  с амплитудой, меньшей, чем больше мнимая часть  $\text{Im } \beta_{1k}$ . Энергия вихря пропорциональна квадрату скорости, так как она мнимая, то энергия вихря отрицательная. Поэтому получается, чем больше мнимая часть знаменателя, тем энергия вихря больше  $E = -1/(\text{Im } \beta_{1k})^2$ . При встрече двух вихрей наблюдается не синхронное вращение потока, а не колебание, т.е. бурление потока.

Покажем, что уравнение Шредингера определяет уравнение неразрывности в случае комплексной скорости. Для этого запишем уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi^2}{2\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi \Delta \psi + U \psi^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \operatorname{div}(\psi \nabla \psi) + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \psi)^2 + U \psi^2.$$

Получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^2}{2\partial t} &= \frac{i\hbar}{2m} \operatorname{div}(\psi \nabla \psi) - \frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \ln \psi)^2 + U \psi^2 / i\hbar. = \\ &= \frac{\hbar}{2m} \operatorname{div}[\psi^2 (i \nabla \ln \psi)] - \frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \ln \psi)^2 + U \psi^2 / i\hbar. = \\ &= -\operatorname{div}(\psi^2 \mathbf{V}) / 2 + \frac{\psi^2}{i\hbar} (-mV^2 / 2 + U), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{nl}^2}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi_{nl}^2 \mathbf{V}_{nl}) + i \frac{\psi_{nl}^2}{\hbar} 2(-mV^2 / 2 + U) &= 0 \\ \frac{\partial \langle \ln \psi_{nl}^2 \rangle}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \langle \frac{\partial \ln \psi_{nl}^2}{\partial x^k} V_{knl} \rangle + \operatorname{div} \langle \mathbf{V}_{nkl} \rangle + i \frac{6E_{nl}}{\hbar} &= 0 \\ E_{nl} = \langle \frac{mV_{nl}^2}{2} + U \rangle = \langle U \rangle / 2; \mathbf{V} = -i \frac{\hbar}{m} \nabla \ln \psi; \end{aligned}$$

Где воспользовались теоремой вириала, кинетическая энергия равна половине потенциальной с обратным знаком. Получаем уравнение неразрывности потока с концентрации частиц вакуума  $\psi^2$  и соответствующей скоростью потока с дополнительным мнимым членом, зависящим от потенциала частиц.

Скорость частиц вакуума комплексная  $\mathbf{V} = -i \frac{\hbar}{m} \nabla \ln \psi$ , так как волновая функция комплексная.

Так как квадрат плотности волновой функции пропорционален комплексной концентрации среды, имеем следующее уравнение неразрывности для движения элементарных частиц в газовой среде. Где изменение комплексной концентрации среды вызывает двигающаяся частица



$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \ln n}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \ln n}{\partial x^k} V_k \right\rangle + \langle \operatorname{div} \mathbf{V} \rangle + i \frac{3 \langle U \rangle}{\hbar} &= 0 \\ \left\langle \frac{d \ln n}{dt} \right\rangle + \langle \operatorname{div} \mathbf{V} \rangle + i \frac{6 E_{nl}}{\hbar} &= 0 \end{aligned}$$

Действительная часть комплексной скорости среды описывает среднее значение концентрации, а мнимая часть ее среднеквадратичное отклонение.

$$\begin{aligned} n(x, y, z, t) &= n_0(x, y, z) \exp\left[-6i E_{nl}(t - t_0) / \hbar - \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{V} dt\right] = \\ &= n_0(x, y, z) \exp\left[-6i \omega(t - t_0) - \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{V} dt\right] \end{aligned} \quad (4)$$

Причем модуль концентрации изменяется во времени, меняется действительная и мнимая часть, т.е. среднее значение переходит в среднеквадратичное отклонение и реализуется обратный процесс. Потенциальная энергия может быть, как электромагнитный, так и гравитационной. Причем при изменении концентрации среды меняется и потенциал. Модуль величины концентрации меняется, при убывании концентрации в одном месте, она растет в другом, суммарное количество энергии и потенциала сохраняется. В момент образования Вселенной все величины были комплексные, т.е. колебались во времени, образуя среднеквадратичное отклонение, т.е. мнимую часть. Потенциал не является исключением, он был комплексным. Образуется комплексный потенциал в одном месте, имеется комплексно-сопряженный потенциал в другом месте, концентрация частиц вакуума возрастает или убывает, таким образом образовались элементарные частицы и из них макротела. Наличие отрицательной дивергенция скорости вызывает рост концентрации среды, положительная дивергенция скорости вызывает уменьшение концентрации. Приращение скорости вызывает отток частиц из точки с нулевой дивергенцией.

Данное решение при отрицательном значении дивергенции описывает повышение плотности среды. Для неизменном модуле плотности среды

дивергенция скорости должна быть мнимая или нулевая. В случае мнимой фазы в формуле (4), модуль плотности среды равен константе и происходит колебание плотности среды за счет собственного вращения – спина.

Но при некоторых значениях потенциала получатся потенциальное комплексное турбулентное решение уравнения Навье-Стокса с учетом нелинейности, так как коэффициенты полинома  $\alpha_m(x_m)$  возводятся в квадрат. Это произойдет при отрицательном потенциале. При условии, что член потенциала с наибольшей степенью отрицателен гарантированно получится комплексное решение. В частности для решенной задачи требуется положительность собственной энергии для получения комплексного решения. Проблеме турбулентных комплексных решений уравнения Навье-Стокса посвящены статьи [2], [3], [4]. Но проблемы комплексного турбулентного решения уравнения Навье-Стокса на этом не кончаются. Надо пересчитывать мнимую часть скорости потока, или мнимую часть числа Рейнольдса потока в действительную часть. Мнимая часть числа Рейнольдса потока существенным образом зависит от степени шероховатости. Необходимо усреднить по степени шероховатости, причем усреднение по средней высоте шероховатости зависит от тангенса наклона шероховатости и безразмерного давления или числа Рейнольдса см. [3] стр. 71.

Таким образом можно решить уравнение Шредингера и получить потенциальное решение уравнения Навье-Стокса с учетом нелинейности и комплексной скорости.

#### Литература

1. Якубовский Е.Г. Полиномы Лежандра не целого порядка. «Энциклопедический фонд России», 2017, 11 стр. [http://russika.ru/userfiles/390\\_1505253784.pdf](http://russika.ru/userfiles/390_1505253784.pdf)
2. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION I. THE GENERAL SOLUTION OF NONLINEAR

- ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 60-66. <https://world-science.ru/pdf/2016/3/14.pdf>
3. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION II. THE USE OF LAMINAR SOLUTIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 67-83. <https://world-science.ru/pdf/2016/3/15.pdf>
4. YAKUBOVSKIY, E. G. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION III. THE PHYSICAL SENSE OF THE COMPLEX VELOCITY AND CONCLUSIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 84-87. <https://www.world-science.ru/pdf/2016/3/16.pdf>