Локализованное решение уравнений Шредингера-Лапласа

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Аннотация

Найдены решения уравнения движения Шредингера-Лапласа в виде локализованной частицы. Они решены, при условии, что потенциал зависит только от радиуса и получено решение, на бесконечности радиуса совпадающее с законом Кулона. При этом волновая функция электрона локализована. Причем оказалось, что в окрестности нуля радиуса имеется счетное количество решений. Современная наука не научилась предсказывать, каковы свойства электрона вблизи его центра.

В работе по определению поправок к энергии электрона в задаче решения уравнения Максвелла-Дирака см. [16] для вычисления энергии электрона понадобилось прибегать к перенормировкам. В работе [17] говорится, что использование самодействия электрона приводит к расходимости поправок к энергии электрона. В предлагаемой статье удалось избежать перенормировок за счет перехода в комплексное пространство для значения энергии и определения плотности вероятности, как квадрата волновой функции. При действительной волновой функции определение плотности вероятности как квадрата модуля волновой функции и как квадрата волновой функции совпадают. При этом возникают проблемы с нормировкой. Но для нелинейных уравнений в частных производных волновая функция определяется без произвольных констант, поэтому нормировать волновую функцию невозможно. Показано, что при радиусе, стремящемся к нулю, имеется счетное количество комплексных асимптотик решения для потенциала. При этом асимптотика потенциала при радиусе, стремящемся к бесконечности единственна.

Уравнение Шредингера-Лапласа имеют вид см. [3],[4]

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V\psi$$

$$\Delta V=e^2\psi^2\frac{m^3e^6}{\hbar^6}\qquad .$$

$$E=\int\psi(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V\psi)d^3x/a_0$$

Приведем первые два уравнения к безразмерному виду, для чего нормируем потенциал $V=V_0\frac{me^4}{\hbar^2},E=E_0\frac{me^4}{\hbar^2},r=\xi\frac{\hbar^2}{me^2},t=\tau\frac{\hbar^3}{me^4}$. Получим уравнение

$$\begin{gathered}i\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=-\frac{1}{2}\Delta_\xi\psi+V_0\psi\\ \Delta_\xi V_0=-\psi^2\\ E_0=\int\psi(-\Delta_\xi\psi+V_0\psi)d^3y\end{gathered}\qquad(1)$$

Где формулу для плотности вероятности изменили, чтобы она описывала и комплексное значение энергии. Где волновая функция и потенциал зависит только от радиуса. Запишем формулу для скалярного поля и волновой функции

$$\psi(r)=\sum_{n=1}^{N}a_n\exp(-n^2r^2/r_0^2)=\sum_{n=1}^{N}a_ng_n(r)$$

$$V(r)=\sum_{k=1}^{N}b_k\frac{1-\exp(-k^2r^2/r_0^2)\cos 2kr/r_0}{r}=\sum_{k=1}^{N}b_kh_k(r).$$

$$r_0=\frac{\hbar^2}{me^2}$$

Потенциал при радиусе, равном нулю будет иметь нулевое значение. Подставим эти функции в уравнение Шредингера-Лапласа, умножим на величину $\exp(-m^2r^2/r_0^2)$, и проинтегрируем по пространству, получим после преобразования уравнение

$$\begin{gathered}Q_{mn}\frac{da_n}{dt}=\sum_{n=1}^{N}G_{mn}a_n+\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}F_{mnk}a_nb_k,m=1,...,N\\ \sum_{k=1}^{N}P_{mk}b_k+\sum_{n,k=1}^{N}H_{mnk}a_na_k=0,\end{gathered}\quad .\quad(2)$$

Основная часть коэффициента перед a_n в первой формуле при использовании оператора Лапласа равен $n^4/(n^2+m^2)$. При этом имеем асимптотику коэффициентов в m уравнении $a_n = \frac{\alpha_m(n^2+m^2)}{n^4+1}, b_n = \frac{1}{N+1}[1+\frac{\beta_m(n^2+m^2)}{n^4+1}]$.

$$G_{mn} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty g_m(\xi)\Delta_\xi g_n(\xi)\xi^2 d\xi, F_{mnk} = \int_0^\infty g_m(\xi)g_n(\xi)h_k(\xi)\xi^2 d\xi$$

$$P_{mk} = \int_0^\infty g_m(\xi)\Delta_\xi h_k(\xi)\xi^2 d\xi, H_{mnk} = \int_0^\infty g_m(\xi)g_n(\xi)g_k(\xi)\xi^2 d\xi$$

Получим нелинейную систему уравнений, которая имеет частное решение a_n^0, b_n^0. Частное решение определится из подстановки в m уравнение значения $a_n^0 = \frac{\alpha_m(n^2+m^2)}{n^4+1}, b_n^0 = \frac{1}{N}[1+\frac{\beta_m(n^2+m^2)}{n^4+1}]$, откуда определятся коэффициенты α_m, β_m. Тогда имеем значение коэффициентов $a_n^0 = \frac{2\alpha_n n^2}{n^4+1}, b_n^0 = \frac{1}{N}(1+\frac{2\beta_m n^2}{n^4+1})$. При подстановке коэффициентов в уравнение (1), получим уравнения

$$\alpha_m\{\sum_{n=1}^N \frac{G_{mn}(n^2+m^2)}{n^4+1} + \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{F_{mnk}(n^2+m^2)}{n^4+1} \times$$
$$\times \frac{1}{N}[1+\frac{\beta_m(k^2+m^2)}{k^4+1}]\}, m=1,...,N;$$
$$\sum_{k=1}^N P_{mk}\frac{1}{N}[1+\frac{\beta_m(k^2+m^2)}{k^4+1}] +$$
$$+\sum_{n,k=1}^N \frac{H_{mnk}(n^2+m^2)(k^2+m^2)}{(n^4+1)(k^4+1)}\alpha_m^2 = 0,$$

Из этой системы нелинейных уравнений однозначно определятся коэффициенты α_m, β_m. Причем величина α_m имеет разные знаки и возможно мнимая. Если пользоваться плотностью вероятности с модулем волновой функции, то величина модуля $|\alpha_m^2|$ при некоторых значениях m

окажется отрицательной, и, следовательно, не определяется и необходимы перенормировки.

Но при мнимой волновой функции ее квадрат может быть отрицателен. Квадрат волновой функции нельзя рассматривать как плотность вероятности. Его нужно рассматривать как весовой коэффициент, который может быть комплексным и отрицательным. При этом энергия может оказаться комплексной с положительной или отрицательной действительной частью.

Ищем решение системы нелинейных уравнений в виде $a_n = a_n^\alpha + a_n^0, b_n = b_n^\alpha + b_n^0; b_{N+1} = b_{N+1}^\alpha + 0$.

Тогда имеем систему линейных уравнений относительно коэффициентов a_n^α, b_n^α с правой частью равной нулю в первом уравнении. Т.е. собственная энергия системы равна нулю. Решаем систему равнений

$$\sum_{n=1}^{N} A_{mn} a_n^\alpha + \sum_{k=1}^{N+1} B_{mk} b_k^\alpha = 0, m = 1,...,2N$$
$$\sum_{k=1}^{N+1} b_k^\alpha = 0 \quad .$$

Где коэффициенты A_{mn}, B_{mk} зависят от переменных a_n^α, b_n^α. Добиваемся, чтобы определитель этой системы равнялся нулю. Тогда коэффициенты a_n^α, b_n^α определяются с точностью до множителя из линейной системы уравнений. Этот множитель определим, чтобы определитель этой системы нелинейных уравнений равнялся нулю. Тогда определится $2N + 1$ решение по определению коэффициентов $a_n^\alpha, b_n^\alpha, \alpha = 1,...,2N + 1$ со стационарной собственной энергией. Причем в силу условия $\sum_{k=1}^{N+1} b_k^\alpha = 0$ решение для кулоновского потенциала на бесконечности радиуса определится однозначно. Но в окрестности нуля радиуса имеется счетное количество решений. Причем плотность вероятности обнаружить частицу при большом значении радиуса равна нулю.

Найдено счетное количество решений, описывающее систему со стационарной энергией. Это вклад в поступательную скорость движения в фазовом пространстве.

Причем имеется счетное количество решений со стационарной энергией и так как $\sum_{k=0}^{N} b_k^{\alpha} = 0$ решение для кулоновского потенциала на бесконечности радиуса определится однозначно. Но в окрестности нуля радиуса имеется счетное количество решений. Причем плотность вероятности обнаружить частицу при большом значении радиуса равна нулю.

По данному алгоритму определения частного решения был рассчитаны коэффициенты a_n^0, b_n^0. Коэффициенты α_n, β_n с ростом индекса стремятся к нулю. Сумма элементов $\sum_{n=1}^{N} b_n^0 = b$ в зависимости от количества членов N ряда приведена в таблице

N	20	30	40	50	60
b	-0.6529	-0.6498	-0.6487	-0.6483	-0.64826

При этом надо увеличить величину $b = r_0 = 0.6482\epsilon$, следовательно, увеличив r_0 в $1/0.64826$ получим коэффициент $b = 1$

$$U = -\frac{e^2}{r}.$$

При этом для проверки точности расчета, рассчитанные коэффициенты должны удовлетворять условию

$$\int (\psi \Delta_{\xi} V_0 + \psi^3) d^3 x = 0$$

$$\int \psi(-\Delta_{\xi} \psi + V_0 \psi) d^3 x = 0$$

Первое и второе уравнение повышает точность вычисления при увеличении количества членов ряда.

Отметим, что стационарного решения $\exp(-iEt/\hbar)$ у нелинейной задачи нет, и стационарная энергия считается по другим формулам.

Получено счетное количество локальных значений волновой функции и счетное значение потенциала электрона, причем этот потенциал при малом значении радиуса имеет счетное количество значений, а при больших радиусах значение потенциала единственно. Это говорит о том, что распределение частиц вакуума вблизи нуля потенциала произвольно, а на расстоянии от центра электрона единственно. Т.е. грубо говоря частицы имеют разную форму, но одинаковый заряд и вдали от центра электрона они проявляются одинаково и все электроны выглядят одинаково. Но по мере приближения к центру электрона их свойства являются разными у всех электронов. Современная наука не умеет выбрать каковы свойства электрона вблизи центра из счетного количества значений.

Планеты имеют сферическую форму с шероховатостью поверхности и разными свойствами внутри планеты. Так же и электроны, вычисленные в релятивистском приближении, имеют разную шероховатость и внутреннее распределение частиц вакуума. Высота шероховатости, как среднеквадратичное значение высоты поверхности, описывает мнимым числом, равным среднеквадратичному отклонению. Заряд является мнимым (см. [5] раздел 1.4, где описан физический смысл комплексных величин), и весь состоит из среднеквадратичного отклонения с нулевым средним значением. Среднее значение величины описывается ее действительной частью. При таком определении заряда он, как и масса, участвует в общей формуле статического взаимодействия.

Величина заряда и массы элементарных частиц определяется по формуле (где используется масса Планка)

$$\frac{e}{\sqrt{\hbar c}}\left(\ln\frac{m_{pl}}{m}+2\pi i n\right).$$

При этом величина заряда пропорциональна целому числу и является мнимым, а значение массы может быть комплексным. Но с размерами элементарных частиц и макротел имеется различие. Размеры элементарных частиц определяются счетным количеством волновых функций с большой дисперсией, которая определяется с точностью до целого множителя. Для макротел среднее значение однозначно и велико с пренебрегаемой малой дисперсией.

Аналогично решается задача в релятивистском случае, но в этом случае векторный потенциал зависит от углов сферической системы координат.

Литература

1. *A.O. Barut, J. Klaus* Nonperturbative Quantum Electrodynamics: The Lamb Shift. Foundation of Physics, vol. 13, No 2,1983 https://docs.google.com/file/d/0B4Db4rFq72mLODF5RnRraTBCWEE/edit?pref=2&pli=1
2. *M. Babiker* Source-field approach to radioactive corrections and semiclassical radiation theory. Physical Review A, vol. 12, No 5, 1975 https://docs.google.com/file/d/0B4Db4rFq72mLODJDcml1VlJoR1E/edit?pref=2&pli=1
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля т.II, Наука, М.,1973,564с.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. т.III, Наука, М.,1989,768с.
5. Якубовский Е.Г. Описание элементарных частиц, гравитационного и электромагнитного поля с помощью частиц вакуума в комплексном пространстве. «Энциклопедический фонд Росси», 2017, 255 стр. http://russika.ru/sa.php?s=1226