Неустойчивость собственных значений нелинейных уравнений со второй производной по времени

Якубовский Е.Г.
e-mail yakubovski@rambler.ru

Координаты положения равновесия обыкновенной системы нелинейных дифференциальных уравнений со второй производной по времени не устойчивы во времени, так как собственное число при второй производной во времени при использовании линеаризованного решения возводится в квадрат, и имеется положительный и отрицательный корень из квадрата собственного числа. Устойчивы только колеблющиеся или вращающиеся решения с мнимым собственным числом. Так как координаты положения равновесия соответствуют собственным значениям в квантовой механике, это означает что у уравнения ОТО и Клейна-Гордона, сводящегося к нелинейному уравнению со второй производной по времени, нет неподвижных устойчивых собственных значений, а имеются колеблющиеся и вращающиеся решения. Именно этим объясняется короткое время жизни большинства элементарных частиц, в общем случае они не устойчивы. Но имеются частицы, колеблющиеся и вращающиеся, имеющие мнимые собственные числа, и они обеспечивают существование материи. Связь между уравнением Клейна-Гордона и уравнения Навье-Стокса с учетом спина и электромагнитного поля см. [1]. Побочный эффект данного рассмотрения - это существование дискретного времени при неопределенной энергии системы. Это соотношение получается из импульсного рассмотрения системы, когда реализуется другой предельный случай соотношения неопределенности, собственного значения времени при неопределенной энергии.

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2}+\sum_{l,n=1}^{L}[a_{0nl}(x_1,...,x_3)+\sum_{s=1}^{L}a_{1nls}(x_1,...,x_3)U_s+...]\frac{\partial^2 U_k}{\partial x_l\,\partial x_n}+$$
$$+\sum_{l=1}^{L}[b_{0l}(x_1,...,x_3)+\sum_{s=1}^{L}b_{1ls}(x_1,...,x_3)U_s+...]\frac{\partial U_k}{\partial x_l}+ \qquad .$$
$$+[c_0(x_1,...,x_3)+\sum_{s=1}^{L}c_{1s}(x_1,...,x_3)U_s+...]U_k=d_k(x_1,...,x_3),k=0,...,3$$

Решение ищем с помощью подстановки в дифференциальное уравнение функции $\mathbf{U}(t,x_1,...,x_3)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{b}_n(t)\varphi_n(x_1,...,x_3)$. При этом величина $d_k(x_1,...,x_3)$, это внешнее воздействие. Для решения этого уравнения подставляем разложение функции решения в уравнение в частных производных, умножаем на величину $\varphi_s(x_1,...,x_3)$ и интегрируем по пространству. Получим дифференциальное уравнение (1). Функции $\varphi_n(x_1,...,x_3)$ выберем синусоидальными, тогда если решение непрерывная функция, и коэффициенты ряда убывают как величина $1/n^2$, и процесс редукции возможен.

Исследуем нелинейное обыкновенное уравнение со второй производной по времени, где при действительных аргументах $b_1,...,b_N$ уравнение имеет однозначную правую часть

$$\frac{d^2 b_s}{dt^2}=F_s(b_1,...,b_N),s=1,...,N\,. \qquad (1)$$

Системы уравнений, содержащие первую производную по времени в правой части, приводятся к виду (1). Допустим, имеем уравнение

$$\frac{d^2 b_s}{dt^2}=F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt}),s=1,...,N\,.$$

Продифференцируем его по времени, получим

$$\frac{d^3 b_s}{dt^3}=\frac{\partial F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt})}{\partial b_k}\frac{db_k}{dt}+\frac{\partial F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt})}{\partial b_k}\times$$

$$\times F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt})$$

Введя новые переменные $y_n = b_n, y_{n+N} = \frac{db_n}{dt}, n = 1,...,N;$, получим систему уравнений с новыми координатами равновесия

$$\frac{d^2 y_s}{dt^2} = F_s(y_1,..., y_{2N}), s = 1,...,2N\,. \qquad (2)$$

Если величина $F_s(b_1,...,b_N,0,...,0) = 0, s = 1,...,N$ допускает конечное количество совокупностей корней, то систему можно представить в виде

$$\frac{dy_{s+N}}{dt} = F_s(y_1,..., y_N, y_{N+1},..., y_{2N}), s = 1,..., N$$
$$\frac{dy_s}{dt} = y_{s+N}; y_s = b_s, y_{s+N} = \frac{db_s}{dt}\,. \qquad (3)$$

С координатами положения равновесия

$$F_s(\beta_1^k,...,\beta_N^k,0,...,0) = 0, k = 1,..., K$$
$$y_{s+N} = \beta_{s+N}^1 = 0; s = 1,..., N\,.$$

Матрица этого преобразования имеет вид

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Собственные числа этого линейного преобразования определятся из уравнения $\lambda^4 - a_{11}\lambda^2 - a_{22}\lambda^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. В случае произвольного порядка матрицы имеем

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b - dc^{-1}a \\ c & d \end{vmatrix} = |c| \cdot \left|b - dc^{-1}a\right| = |c|\left|E - c^{-1}\lambda^2\right|$$

Где матрица $c_{sk} = \frac{\partial F_s}{\partial x^k}, b_{sk} = \delta_{sk}, a_{sk} = d_{sk} = -\lambda\delta_{sk}$. Корень равен $\lambda = |\Lambda_\alpha^{1/2}|\exp(i\alpha/2 + \pi ip), p = 0{,}1$ и наряду с корнем $\lambda = |\Lambda_\alpha^{1/2}|\exp(i\alpha/2)$ имеется корень $\lambda = -|\Lambda_\alpha^{1/2}|\exp(i\alpha/2)$ в случае $p = 0$ и $p = 1$. В любом случае положение равновесия не устойчиво, кроме случая $\alpha = \pi(2k+1)$, когда наблюдается фазовая траектория типа центр.

Получается, что представление решения в виде (3), не определяет решение задачи. Надо представлять решение в виде (2), которое при решении с координатами положения равновесия отличается от (3).

Приведем уравнение Навье – Стокса, полученное из уравнения Клейна-Гордона, в релятивистской форме $V_p = u_p c = -i\frac{\hbar\partial \ln\psi}{m\partial x^p}, V_0 = u_0 c = i\frac{\hbar\partial \ln\psi}{m\partial x^0}$, см. [1]. Перейдем от тензорного вида в уравнении к векторному виду, для чего введем обозначения $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}$ где $\sigma^{\mu\nu}$ антисимметричный тензор, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $\sigma^{\mu\nu} = (\alpha, i\Sigma)$, $F^{\mu\nu} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H})$.

Для произвольной кинематической вязкости это уравнение имеет вид см. [1]

$$\nu\frac{\partial^2 V_p}{\partial(x^0)^2} + V^0\frac{\partial V_p}{\partial x^0} - \frac{2eA_0}{mc}\frac{\partial V_p}{\partial x^0} + \frac{e\nu}{mc}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_0}{\partial x^p \partial x^0} = \sum_{l=1}^{3}\,[\nu\frac{\partial^2 V_p}{\partial(x^l)^2} - V^l\frac{\partial V_p}{\partial x^l} - .$$

$$-\frac{2eA_l}{mc}\frac{\partial V_p}{\partial x^l} + \frac{e\nu}{mc}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_l}{\partial x^p \partial x^l}] + \frac{2e^2}{m^2c^2}(\mathbf{A}_0\frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial x^p} - \sum_{l=1}^{3}\,\mathbf{A}_l\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial x^p}) +$$

$$+\frac{e\nu}{mc}[(\alpha, \frac{\partial E}{\partial x^p}) + i(\Sigma, \frac{\partial H}{\partial x^p})]$$

Где имеем значение $\nu = i\hbar/m$. При этом эффективный потенциал равен

$$-U_{eff} = \sum_{l=1}^{3}\,\frac{e\nu}{c}\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial x^l} + \frac{2e^2}{mc^2}(\mathbf{A}_0^2 - \sum_{l=1}^{3}\,\mathbf{A}_l^2) + \frac{e\nu}{c}[(\alpha, E) + i(\Sigma, H)].$$

Потенциалы в уравнении Навье-Стокса берутся из нелинейного уравнения ОТО см. [2], учитывающего нелинейные эффекты при вычислении потенциалов.

В случае стационарного процесса остаются члены, зависящие от скорости.

Рассмотрим линеаризованное уравнение системы (3) и исследуем поведение этой системы в окрестности положения равновесия. Эта система приводится к виду (4) вблизи от координат положения равновесия

$$\begin{gathered}\frac{d^2 y_s}{dt^2} = \frac{\partial F_s(a_1,...,a_{2N})}{\partial x^l}(x^l - a^l) \\ F_s(a^1,...,a^{2N}) = 0, s = 1,...,2N\end{gathered}. \tag{4}$$

Решение ищем в виде

$$x^l = a^l + g^{lk}\exp[\lambda_k(t-t_0)]g^{-1}_{kn}(x^n_0 - a^n)$$

Получим задачу на собственные значения и собственные векторы

$$\begin{gathered}[\frac{\partial F_s(a_1,...,a_{2N})}{\partial x^l} - \lambda_k^2\delta_{sl}]g^{lk} = 0; \\ |\frac{\partial F_s(a_1,...,a_{2N})}{\partial x^l} - \lambda_k^2\delta_{sl}| = 0\end{gathered}.$$

Получим решение задачи

$$x^l = a^l + g^{lk}[\exp[\lambda_k(t-t_0)] + \exp[-\lambda_k(t-t_0)]c_k.$$

Получим начальные условия

$$x^l_0 = a^l + 2g^{lk}c_k, l, k = 1,...,2N.$$

$$\frac{dx^l}{dt} = 0.$$

Тогда решение имеет вид

$$x^l = a^l + g^{lk}\cosh[\lambda_k(t-t_0)]g^{-1}_{kn}(x^n_0 - a^n).$$

Решение является конечным только в случае мнимых собственных значений λ_k, описывающих колебание или вращение системы. Если координаты положения равновесия комплексные, то и одна из величин собственного значения окажется комплексной и значит координата положения равновесия комплексная и задача не устойчива. Комплексным собственным значениям соответствуют не устойчивые состояния, имеющие конечное время жизни. В случае бесконечного времени жизни имеем решение

$$p^l(t) = p^l + g^{lk}\cos[(E_n - E_0)t/\hbar]g^{-1}_{kn}(p^n_0 - p^n) = -i\hbar\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l}.$$

Определится и собственная энергия системы E_n, как собственное число, и координата положения равновесия как импульс при произвольном времени. Но возникает зависимость от начальных условий. Так как скорость в координате положения равновесия равна нулю, то частица, попав точно в положение равновесия будет в нем находиться неограниченно долго. Но попасть в положение равновесия мешает принцип неопределенности. Если координата у этой системы произвольна, то частица может попасть в положение равновесия. Кроме того, малое возмущение выбивает частицу из положения равновесия.

Но у элементарных частиц собственное число всегда имеет малую мнимую часть и тогда координата положения равновесия неустойчива, и частица может существовать конечное время, колеблющаяся волновая функция стремится к нулю при большой фазе.

Откуда имеем значение волновой функции

$$\ln\psi = i\{[p^l + g^{lk}\cos[(E_n - E_0)(t-t_0)/\hbar]g^{-1}_{kn}(p^n_0 - p^n)](x_l - x^0_l) -$$
$$-[E_n(t-t_0) + g^{0k}\sin[(E_n - E_0)(t-t_0)/\hbar]g^{-1}_{kn}(p^n_0 - p^n)\frac{\hbar}{E_n - E_0}]\}/\hbar$$

Аналогичная картина наблюдается при рассмотрении дифференциального уравнения в импульсном представлении в зависимости от значения энергии. Тогда получим

$$x^l(E) = a^l + g^{lk}\cos[E(t_n - t_0)/\hbar]g^{-1}_{kn}(x^n_0 - a^n) = i\hbar\frac{\partial \ln a(E,\mathbf{p})}{\partial p_l}.$$

Причем время определится как собственное значение, а собственное значение координаты, как координата положения равновесия.

Получим уравнение Навье-Стокса в импульсном представлении для не релятивистского случая. Аналогично можно получить уравнение Навье-Стокса и для релятивистского случая. Уравнение Шредингера в импульсном представлении имеет вид

$$imc^2\frac{\partial a(E,\mathbf{p})}{\partial E}=(\widehat{H}+U)a(E,\mathbf{p})=-\frac{m^2c^2}{2}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2 a(E,\mathbf{p})}{\partial p_l^2}+\frac{U(\mathbf{p})}{mc^2}a(E,\mathbf{p})\,.$$

Независимым аргументом в существующих импульсных представлениях квантовой механики является время и импульс. Тогда энергия имеет дискретные значения. Но последовательное описание импульсного пространства требует независимые переменные энергия и импульс при дискретном времени. При этом энергия должна расти или убывать. Что и предлагается реализовать в атомах для получения дополнительного изменения собственного времени, как меняется собственная энергия под действием электромагнитного поля. При изменении собственной энергии системы без излучения энергии независимые переменные время импульс неправильно описывают поведение квантовой системы. Такая ситуация возможна при одинаковом изменении потенциала и собственной энергии.

Используя тождество $\frac{\partial^2 a(E,\mathbf{p})}{\partial p_l^2}=a(E,\mathbf{p})\{\frac{\partial^2 \ln a(E,\mathbf{p})}{\partial p_l^2}-[\frac{\partial \ln a(E,\mathbf{p})}{\partial p_l}]^2\}$.

Подставим оператор Лапласа и разделим на $a(E,\mathbf{p})$, получим

$$imc^2\frac{\partial \ln a(E,\mathbf{p})}{\partial E}=-\frac{m^2c^2}{2}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2 \ln a(E,\mathbf{p})}{\partial p_l^2}-[\frac{\partial \ln a(E,\mathbf{p})}{\partial p_l}]^2+\frac{U(\mathbf{p})}{mc^2}$$

Продифференцируем по импульсу и подставим $x_k=i\hbar\frac{\partial \ln a(p)}{\partial p_k}$, получим

$$\frac{mc^2}{\hbar}\frac{\partial x_k(E,\mathbf{p})}{\partial E}=\frac{m^2c^2}{2\hbar}\sum_{l=1}^{3}[i\frac{\partial^2 x_k(E,\mathbf{p})}{\partial p_l^2}-\frac{2x_l(E,\mathbf{p})}{\hbar}\frac{\partial x_k(E,\mathbf{p})}{\partial p_l}]+\frac{\partial U(\mathbf{p})}{mc^2\partial p_k}\,.$$

Или в безразмерном виде

$$\frac{\partial y_k(e,\mathbf{q})}{\partial e}+\sum_{l=1}^{3}y_l(e,\mathbf{q})\frac{\partial y_k(e,\mathbf{q})}{\partial q_l}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3}i\frac{\partial^2 y_k(e,\mathbf{q})}{\partial q_l^2}+\frac{\partial u(e,\mathbf{q})}{\partial q_k}$$

$$x_k(E,\mathbf{p})=y_k(e,\mathbf{q})\hbar/MC;E=eMC^2;p_l=q_lMc,U=MC^2u$$

При этом в результате решения в импульсном представлении в зависимости от значения энергии задача квантовой механики имеет дискретное точное собственное время и непрерывную неопределенную энергию. Реализуется другой предельный случай соотношения неопределенности, дискретного времени при неопределенной энергии системы. Реализуется ли такое решение не понятно, но с его помощью можно управлять временем, переходя с одного уровня собственного времени на другой. Но при этом необходимо добиться возрастания или убывания энергии системы на длительном интервале, что трудно совместить с живым организмом.

Найдем связь между атомными единицами и введенными безразмерными. Сравним величину единиц длины и времени $\hbar/MC=\hbar^2/me^2=137\hbar/mc$, $\hbar/MC^2=\hbar^3/me^4=137^2\hbar/mc^2$. откуда имеем $C=c/137$, $M=m$. Остальные связи удовлетворяются. Тогда дискретное безразмерное время равно $MC^2t_n/2\pi\hbar=-f(n)+u$. Изменяя безразмерный потенциал на постоянную величину, смещается и время. Откуда имеем безразмерное смещение времени в N раз $N\Delta t_n=2\pi\hbar\Delta u/MC^2=2\pi 137^4\hbar\Delta U/m_e^2c^4$. Но если производить изменение потенциала медленно, то будет изменяться собственная энергия системы и собственное значение времени не изменится, изменится собственная энергия системы. Изменение потенциала должно произойти за время меньшее чем $\Delta t_n=a_0/c=1.66\cdot 10^{-19}s$. Изменение потенциала атома равно $\Delta U=Ea_0$, итого получим $N=2\pi 137^4\hbar E/m_e^2c^3$. Эта величина не зависит от размера системы и является общей для атома, клетки, существенно квантовое рассмотрение системы. При этом время изменится в 82000 раз, при напряжении в 1ед. СГС. Максимальное напряжение в воздухе без пробоя равно $E=10^6 ед СГС$. Значит максимум величины $N=8\cdot 10^{10}$. При этом время существования Вселенной равно $t=1.4\cdot 10^{10} year$, т.е. за время существования человека минимальное время возврата равно $\tau=0.175 year$, но при меньшем напряжении поля возможен возврат на большее время. Важно, чтобы изменение потенциала произошло за время $\Delta t_n=a_0/c=1.66\cdot 10^{-19}s$. Тогда возможен переход к предкам живущего организма и активация их генов.

Изменив знак приращения потенциала возможно движение в будущее. Но будущие гены не образованы в человеке, поэтому биологических изменений не произойдет.

Но как добиться, чтобы координаты положения равновесия были устойчивы. Для этого решение нелинейного уравнения со скалярным и векторным потенциалом надо представить в виде распространяющегося солитона. Где величины координаты пространства и времени безразмерны

$$U_k(\tau, y_1, y_2, y_3) = \sum_{n_1, n_2, n_3 = -N}^{N} a_{kn_1n_2n_3} \{\prod_{l=1}^{3} \exp[in_l \exp(-|\xi_{kl}^2|)] - 1\},$$

$$\xi_{kl} = y_l - y_l^0 - \int_0^{\tau[1-\exp(-t/\tau)]} u_{kl}[v, y_1(v), y_2(v), y_3(v)]dv$$

.

Пространственные переменные в операторе Лапласа заменим на величины ξ_{kl} перейдя в двигающуюся с переменной скоростью систему координат. Причем в силу синусоидального, непрерывного, комплексного решения коэффициенты равны на бесконечности индексов $a_{n_1n_2n_3} = \dfrac{\beta}{(n_1^2+1)(n_2^2+1)(n_3^2+1)}$. Сначала имеем текущее решение нелинейного уравнения, которое определяется до скачка решения. Для определения текущего решения, надо подставить текущее решение в нелинейное уравнение умножить дифференциальное уравнение на величину $\prod_{l=1}^{3} \exp[-im_l \exp(-\xi_l^2)]$, проинтегрировать по $\xi_l, l = 1,...,3$. Получится нелинейное алгебраическое уравнение

$$F_{m_1m_2m_3}(a_{-N-N-N},...,a_{NNN}) = 0.$$

Скорость частицы в случае скалярного потенциала нужно определить по формуле $u_l = -i\dfrac{\hbar}{mc}\dfrac{\partial \ln\varphi[\tau(1-\exp(-t/\tau)), y_1, y_2.y_3]}{\partial y^l}, l = 1,...,3$ в результате итераций, где τ среднее время жизни частицы. В случае если среди неизвестных потенциалов есть векторный потенциал, надо использовать формулу $u_l = eA_l[\tau(1-\exp(-t/\tau)), y_1, y_2.y_3]/mc^2$. Причем решение ищется в поле потенциала, описываемого релятивистским нелинейным уравнением. Для его построения нужно найти коэффициенты $a_{kn_1n_2n_3}$ системы нелинейных алгебраических уравнений. Величину изменения координаты по времени в интеграле от скорости определим из уравнения $\frac{dy_l}{dt} = u_l[\tau(1-\exp(-t/\tau)), y_1(t), y_2(t), y_3(t)]$. Из этого уравнения определяются частные решения, не зависящие от начальных данных. На бесконечности времени определяются координаты положения равновесия, а по ним строится частное решение путем интегрирования дифференциального уравнения. Откуда имеем соотношение $\xi_l(t, y_l) = y_l - y_l^0 - y_l(t) + y_l(t_0) = y_l - y_l(t)$.

В силу устойчивости солитона, при большом значении времени, когда реализуются координаты положения равновесия, образуется статическое состояние солитона. Нелинейные системы выделяют систему координат, в которой на бесконечности скорость равна нулю см. [3]. В этой системе координат частица имеет нулевую скорость солитона при большом изменении времени. Частица не проявляет себя и не движется. Наряду со статическим решением образуются новые решения нелинейного уравнения, двигающиеся, при скорости на бесконечности равной нулю.

Литература

1. Якубовский Е.Г. Уравнение Навье – Стокса в электромагнитном поле с учетом квантовых эффектов. «Энциклопедический фонд России», 2016, 5 стр. http://russika.ru/sa.php?s=1109

2. Якубовский Е.Г. Зависимость метрики ОТО от потенциалов гравитационного и электромагнитного поля. «Энциклопедический фонд России», 2017, 11 стр. http://russika.ru/sa.php?s=1260
3. Якубовский Е.Г. Инвариантность нелинейных уравнений относительно преобразования Лоренца. «Энциклопедический фонд России», 2017, 3 стр. http://russika.ru/sa.php?s=1278