Решение уравнения Гельмгольца для произвольного тела с изломом

Е.Г. Якубовский

e-mail yakubovski@rambler.ru

Уравнение Гельмгольца в трехмерном случае решается для ограниченного числа конечных тел. Предлагается формула для решения задачи рассеяния для прозрачного произвольного тела с изломом. Аналогичным образом можно решить уравнение Гельмгольца для условия Неймана, Дирихле и для смешанной задачи. Доказывается теорема, что для тела без излома отраженный на бесконечности сигнал определяется средним радиусом поверхности. Вблизи тела имеется другая более сложная зависимость, но начиная с некоторого вычисленного радиуса отраженный сигнал определяется средним радиусом и считать его надо как для сферы со средним радиусом. В случае наличия излома, этот радиус становится комплексным. Граничные радиусы переходной зоны оказались комплексные. Это означает, что окружающее тело пространство стало комплексным. Но произведение радиуса на волновое число является действительным, так как волновое число определяется комплексным.

1. Построение системы координат

В сечении $x_1 = const$ декартовой системы координат определяется угол по формуле

$$\psi_1(s_1, x_1) = 2\pi \int_0^{s_1} \frac{ds_1}{|\rho_1(s_1, x_1)|} / \int_0^{l_1} \frac{ds_1}{|\rho_1(s_1, x_1)|} - \pi,$$

где s_1 длина огибающей линии в сечении $x_1 = const$, l_1 - длина однократно замкнутой огибающей в том же сечении, $\rho_1(s_1, x_1)$ радиус кривизны в том же сечении. Причем $\psi_1 = -\pi$ и $\psi_1 = \pi$ соответствует отрицательному направлению $0x_3$. Положительное направление оси $0x_3$ соответствует направлению на источник.

Построим зависимость радиуса тела от построенных углов $\psi_l, l=1.2$. Это можно сделать однозначным образом. Далее будем решать дифференциальное уравнение $\frac{\partial r(\psi_1,\psi_2)}{\partial \psi_2}\frac{d\psi_2}{d\psi_1}+\frac{\partial r(\psi_1,\psi_2)}{\partial \psi_1}=0$, которое определит зависимость $\psi_2=\psi_2(\psi_1)$. Эта кривая соответствует постоянному радиусу тела, проведенному относительно центра тела. Центр тела определим далее по тексту. Кривая замкнется, как имеющая постоянный радиус. Имеем $\frac{\partial r(\psi_1,\psi_2)}{\partial \psi_1}d\psi_1+\frac{\partial r(\psi_1,\psi_2)}{\partial \psi_2}d\psi_2=0$, т.е. вектор касательной к поверхности $(\frac{\partial r(\psi_1,\psi_2)}{\partial \psi_1},\frac{\partial r(\psi_1,\psi_2)}{\partial \psi_2})$ ортогонален приращению аргумента $(d\psi_1,d\psi_2)$. Касательная к замкнутой кривой $\psi_2=\psi_2(\psi_1)$ ортогональна касательной к поверхности. Следовательно, продольная часть сетки построена. Надо провести перпендикулярные к ней кривые. Причем пересекаться они не должны, иначе будет два разных перпендикуляра к одной кривой. При достаточно плотном количестве кривых линий, построить перпендикуляры к ним не сложно. В случае сферической поверхности имеется ортогональная сетка сферической системы координат. В случае смешанной поверхности, частично сферической, для не сферической части строим кривые постоянного радиуса, совпадающие в сферической части с сферической системой координат и плоскостью, проведенной через касательную линию ортогонально поверхности в точке начала сферической поверхности.

Воспользуемся формулой $x_1=x_1(s_1,s_2)$, получим

$$\psi_1=2\pi\int_0^{s_1}\frac{ds_1}{|\rho_1(s_1,s_2)|}/\int_0^{l_1}\frac{ds_1}{|\rho_1(s_1,s_2)|}-\pi.$$

При этом модуль в знаменателе подынтегрального выражения берется в случае не нулевого радиуса кривизны. Как покажем далее в случае нулевого радиуса кривизны, он становится комплексным.

Определим сначала преобразование координат в случае особенности типа «конус». Для этого в вершине конуса проведем плоскость A, а в этой плоскости определим две ортогональные прямые линии, проходящие через вершину конуса

$$\begin{aligned} x_1 \cos\phi + x_2 \sin\phi &= const_1, \\ -x_1 \sin\phi + x_2 \cos\phi &= const_2 \end{aligned}. \tag{1}$$

При этом выберем направление плоскости A, определяющим минимум величины

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta(\phi) d\phi .$$

Угол $\theta(\phi)$ это угол, образуемый плоскостью A с направлением линии конуса, соответствующей углу ϕ . Вычислим угол θ_0 при вершине конуса по формуле

$$\theta_0 = \int_0^{2\pi} [\pi - 2\theta(\phi)] d\phi / (2\pi) .$$

Этот угол назовем дополнительным углом конуса. При этом имеем следующую формулу для радиуса кривизны (в вершине конуса имеем главные радиусы кривизны, равные нулю $\rho_1 = \rho_2 = 0$)

Для кругового конуса с углом при вершине θ_0, радиусы кривизны удовлетворяют

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \theta_0^2 \delta(s_1 - s_1^0) \delta(s_2 - s_2^0) .$$

В случае, если имеется излом поверхности типа «хребет», т.е. $\rho_1[s_1^0, s_2(s_1^0)] = 0$ вдоль кривой на поверхности $s_2 = s_2(s_1)$, используем формулу

$$\frac{1}{\rho_1[s_1 - s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]} = \frac{1}{s_1 - s_1^0 - i0} = i\delta(s_1 - s_1^0)(\theta_+ - \theta_-) + Vp \frac{1}{s_1 - s_1^0}$$

$$\frac{1}{\rho_1[s_1 - s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]} = \frac{1}{s_1 - s_1^0 + i0} = -i\delta(s_1 - s_1^0)[1 - \frac{\theta_+ - \theta_-}{2\pi}]2\pi + Vp \frac{1}{s_1 - s_1^0} . \tag{2}$$

$$\theta_+[s_1^0, s_2(s_1^0)] = \pi - \arccos \frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}, \theta_- = -\arccos \frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}$$

При этом среднее арифметическое радиусов кривизны на двух концах «хребта», равно

$$\frac{1}{\rho_1[s_1, s_2(s_1^0)]} = \frac{1}{2(s_1 - s_1^0 - i0)} + \frac{1}{2(s_1 - s_1^0 + i0)} = i\delta(s_1 - s_1^0)(\theta_+ - \theta_- - \pi) + Vp\frac{1}{s_1 - s_1^0} =$$

$$= i\delta(s_1 - s_1^0)\{\arccos\frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1} - \arccos\frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}\} + Vp\frac{1}{s_1 - s_1^0}$$

При этом среднее арифметическое радиусов кривизны на двух концах «хребта», равно

$$\frac{1}{\rho_1[s_1, s_2(s_1^0)]} = \frac{1}{2(s_1 - s_1^0 - i0)} + \frac{1}{2(s_1 - s_1^0 + i0)} = i\delta(s_1 - s_1^0)(\theta_+ - \theta_- - \pi) + Vp\frac{1}{s_1 - s_1^0} =$$

$$= i\delta(s_1 - s_1^0)\{\arccos\frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1} - \arccos\frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}\} + Vp\frac{1}{s_1 - s_1^0}$$

Разность углов $\arccos\frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1} - \arccos\frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}$ назовем дополнительными угловыми координатами. В случае особенности типа «хребта», нужно применять формулу (2) до точки, удовлетворяющей условию $\arccos\frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1} = \arccos\frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}$.

В случае гладкого конуса, имеем угол при вершине конуса, равный $\gamma[\pi - 2\theta(\phi) - \theta_0] + \theta_0, \gamma \to 0$, причем функция $\theta(\phi)$ непрерывна. При этом асимптотика значения угла при вершине равна θ_0 и образует круговой конус. Формулы для «хребта» переходит в формулу для «конуса» путем перемножения.

Отметим, что в случае «хребта» изменению угла $\arccos\frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1} - \arccos\frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}$ соответствует радиус кривизны, равный при условии $\psi_1 \in [\arccos\frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}, \arccos\frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}] = [\theta_-, \theta_+]$. При этом радиус кривизны, интерполирующий излом комплексной поверхности равен

$$\frac{1}{\rho(\alpha)} = \{[\frac{1}{\rho(\theta_+)} - \frac{1}{\rho(\theta_-)}]\frac{\alpha-\theta_-}{\theta_+-\theta_-} + \frac{1}{\rho(\theta_-)}\}\times$$
$$\times[1 - \frac{4(\alpha-\theta_-)(\theta_+-\alpha)}{(\theta_+-\theta_-)^2} + i\frac{4(\alpha-\theta_-)(\theta_+-\alpha)}{(\theta_+-\theta_-)^2}], \alpha\in[\theta_-,\theta_+].$$

где $\rho(\theta_+),\rho(\theta_-)$ главный радиус кривизны на границах излома. При этом в центре излома при $\theta = (\theta_+ + \theta_-)/2$ радиус кривизны чисто мнимый и равен $i[\frac{1}{\rho(\theta_+)} + \frac{1}{\rho(\theta_-)}]/2$. На границах излома радиус кривизны равен $\rho(\theta_+),\rho(\theta_-)$.

Аналогично в случае «конуса» имеем непрерывное изменение координаты в соседних точках и интерполяцию радиуса кривизны, равного корню квадратному из комплексного произведения главных радиусов кривизны

$$\frac{1}{\rho_{av}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi\rho(\varphi)},$$
$$\frac{1}{\rho(\alpha,\varphi)} = \{[\frac{1}{\rho_{av}} - \frac{1}{\rho(\varphi)}]\frac{\alpha}{\theta_0} + \frac{1}{\rho(\varphi)}\}(1 - \frac{\alpha}{\theta_0} + \frac{i\alpha}{\theta_0}), \alpha\in[0,\theta_0].$$

где $\rho(\varphi)$ корень квадратный из произведения радиусов кривизны на границе излома типа конус. В обоих случаях «конуса» и «хребта» добавляется комплексная часть к радиусу кривизны поверхности, а действительная поверхность вне излома остается неизменной.

Сумма изломов соответствует дисперсии поверхности, ее сглаживание осуществляется в комплексной плоскости, где мнимая часть соответствует амплитуде локального излома. Мнимая часть поверхности соответствует излому в поверхности и определяет амплитуду излома. Максимальная мнимая часть поверхности в данной точке определяет угол излома в данной точке. Мнимая вставка поверхности в зависимости от непрерывного угла $\psi_k, k = 1,2$ позволяет сгладить поверхность, но она становится комплексной. При этом изрезанной границе соответствует непрерывная комплексная поверхность, где в непрерывных углах, описывающих гладкую поверхность она комплексная с изменением мнимой части. В случае случайной шероховатой поверхности, локальная мнимая часть описывает дисперсию поверхности, разную в разных точках. Случайная поверхность с переменной дисперсией переходит в детерминированную эквивалентную комплексную поверхность. При этом случайная поверхность, имеющая постоянную дисперсию, не сводится к детерминированной. Случайная поверхность с переменной дисперсией более общий случай поверхности, и может не сводиться к детерминированной поверхности.

В этой системе координат поверхность тела с изломом интерполируется в переменных $\psi_k, k=1,2$ как имеющая непрерывную производную от координат поверхности. В самом деле, в изломе приращение угла наклона касательной равно приращению координаты $\psi_k, k=1,2.$ Функция координат $x_l(\psi_1,\psi_2), l=1.2.3$ поверхности в точке излома соответствует комплексному радиусу при изменении угла ψ_1 и аналогично изменению угла ψ_2. Таким образом, форма тела не меняется, но оно становится непрерывной функцией от углов ψ_l с учетом вставки комплексного сегмента.

При этом центр тела и системы координат определится из формулы

$$x_s^0 = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x_s(\psi_1,\psi_2)d\psi_1 d\psi_2 / 4\pi^2,$$

где x_s координата границы тела. При этом в случае кусочно-непрерывной функции $x_s(\psi_1,\psi_2)$, не имеющей центра симметрии, координата центра тела не единственна. Это соответствует определение центра бесконечного множества тел, находящихся на расстоянии одно от другого.

Итак, имеем задачу по продолжению радиуса на значения удовлетворяющие $y > R_0$, где R_0 определяется по формуле $R_0^3 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\eta|^3 (\theta,\varphi)d\psi_1 d\psi_2 / 4\pi^2$, где $\eta(\psi_1,\psi_2)$ уравнение поверхности тела.

Зависимость от углов $\psi_l\,, l=1{,}2$ позволяет свести задачу для не звездного тела, к звездному телу. При этом наблюдается взаимно однозначное соответствие между координатами границы тел и переменными $\psi_l\,, l=1{,}2$. В самом деле, переменным координатам $\psi_l\,, l=1{,}2$ соответствует, декартова точка на поверхности тела. При этом это периодическая функция от переменных $\psi_l\,, l=1{,}2$.

При этом определяется координата переходной зоны по формуле

$$y_l(R,\psi_1,\psi_2)=\begin{cases} R_0<R<|a_{\max}|, \delta(R,R_0,|a_{\max}|)x_k[\psi_1(R),\psi_2(R)]+ \\ +[1-\delta(R,R_0,|a_{\max}|)]e_l(\psi_1,\psi_2)|a_{\max}| \\ R>|a_{\max}|, e_l(\psi_1,\psi_2)R \end{cases}, \qquad (3a)$$

Где $\delta(R,R_0,a)=\dfrac{R-a}{R_0-a}$.

$$e_l=\begin{cases} \sin\psi_1/\sqrt{1+\cos^2\psi_1\tan^2\psi_2}, l=1 \\ \sin\psi_2/\sqrt{1+\cos^2\psi_2\tan^2\psi_1}, l=2 \\ \cos\psi_1/\sqrt{1+\cos^2\psi_1\tan^2\psi_2}= \\ =\cos\psi_2/\sqrt{1+\cos^2\psi_2\tan^2\psi_1}, l=3 \end{cases}$$

орт сферической системы координат.

Внутренняя координата изменяется по формуле

$$y_l(R,\psi_1,\psi_2)=\begin{cases} |a_{\min}|<R<R_0, x_k[\psi_1(R),\psi_2(R)]\delta(R,R_0,|a_{\min}|)+ \\ +|a_{\min}|[1-\delta(R,R_0,|a_{\min}|)]e_l(\psi_1,\psi_2) \\ R<|a_{\min}|, e_l(\psi_1,\psi_2)R \end{cases}, \qquad (4a)$$

Строим не сферическую поверхность, зависящую от постоянного значения параметра R, являющегося нормалью к поверхности, и на ней определяются методом итераций углы. На сферической части поверхности углы неизменны. При этом производная по R совпадет с производной по нормали.

Диэлектрическая проницаемость шара, определяется диэлектрической проницаемостью на поверхности

$$\sqrt{\varepsilon(R_0)\mu(R_0)} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\varepsilon(R_0,\psi_1,\psi_2)\mu(R_0,\psi_1,\psi_2)}d\psi_1 d\psi_2 /4\pi^2,$$

При этом имеем

$$|a_{\max}|^2 = \max\sqrt{\sum_{p=1}^{3}[x_p(\psi_1,\psi_2)]^2}\ .$$

Где радиус $a_{\min}$ определится из равенства

$$1/|a_{\min}|^2 = \max[1/\sqrt{\sum_{p=1}^{3}x_p^2(\psi_1,\psi_2)}].$$

При таком определении максимального и минимального радиуса огибающая совпадет с наибольшим и наименьшим значением радиуса.

Назовем переходной зоной, область с переменной R, удовлетворяющей $a_{\min}<R<a_{\max}$ неравенству. Эти формулы оценочные, размер переходной зоны определим из комплексного уравнения.

Причем на большом расстоянии от центра тела и внутри тела получается сферическая система координат.

Пространственные координаты определятся по формулам для сферического тела

$$z_l(R,\psi_1,\psi_2) = \begin{cases} R_0 < R <|a_{\max}|, \{\delta(R,R_0,|a_{\max}|)R_0 + \\ +[1-\delta(R,R_0,|a_{\max}|)]|a_{\max}|\}e_l \\ R>|a_{\max}|, e_l R \end{cases}, \quad (3b)$$

Где $\delta(R,R_0,a) = \dfrac{R-a}{R_0-a}$. Внутренняя координата изменяется по формуле

$$z_l(R,\psi_1,\psi_2) = \begin{cases} |a_{\min}|< R < R_0, \{R_0\delta(R,R_0,|a_{\min}|) + \\ +|a_{\min}|[1-\delta(R,R_0,|a_{\min}|)]\}e_l \\ R<|a_{\min}|, e_l R \end{cases}, \quad (4b)$$

Существует пространство z_1, z_2, z_3, где имеем эквивалентное сферическое тело

$$\begin{cases} z_1 = z_1(y_1, y_2, y_3) = \int\limits_{R_0}^{R} \sqrt{\varepsilon[R,\psi_1(R),\psi_2(R)\}\mu[R,\psi_1(R),\psi_2(R)]}dR\times \\ \times\sin\psi_1/\sqrt{1+\cos^2\psi_1\tan^2\psi_2} \\ z_2 = z_2(y_1, y_2, y_3) = \int\limits_{R_0}^{R} \sqrt{\varepsilon[R,\psi_1(R),\psi_2(R)\}\mu[R,\psi_1(R),\psi_2(R)]}dR\times \\ \times\sin\psi_2/\sqrt{1+\cos^2\psi_2\tan^2\psi_1} \\ z_3 = z_3(y_1, y_2, y_3) = \int\limits_{R_0}^{R} \sqrt{\varepsilon[R,\psi_1(R),\psi_2(R)\}\mu[R,\psi_1(R),\psi_2(R)]}dR\times \\ \times\cos\psi_1/\sqrt{1+\cos^2\psi_1\tan^2\psi_2} = \int\limits_{R_0}^{R} \sqrt{\varepsilon[R,\psi_1(R),\psi_2(R)\}\mu[R,\psi_1(R),\psi_2(R)]}dR\times \\ \times\cos\psi_2/\sqrt{1+\cos^2\psi_2\tan^2\psi_1} \end{cases} \quad (5)$$

Из (3a), (4a) можно выразить $R = R(y_1, y_2, y_3), \psi_1 = \psi_1(y_1, y_2, y_3), \psi_2 = \psi_2(y_1, y_2, y_3)$ и подставить в (5). Координаты испытают скачок при условии $R = R_0$ на криволинейной поверхности. Преобразование (6) образует сферические тела, с отличной центральной диэлектрической и магнитной проницаемостью.

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{\varepsilon(R_0 \pm 0)\mu(R_0 \pm i0)}R\sin\psi_1/\sqrt{1+\cos^2\psi_1\tan^2\psi_2} \\ z_2 = \sqrt{\varepsilon(R_0 \pm i0)\mu(R_0 \pm i0)}R\sin\psi_2/\sqrt{1+\cos^2\psi_2\tan^2\psi_1} \\ z_3 = \sqrt{\varepsilon(R_0 \pm i0)\mu(R_0 \pm i0)}R\cos\psi_1/\sqrt{1+\cos^2\psi_1\tan^2\psi_2} = \\ = \sqrt{\varepsilon(R_0 \pm i0)\mu(R_0 \pm i0)}R\cos\psi_2/\sqrt{1+\cos^2\psi_2\tan^2\psi_1} \end{cases} \quad (6)$$

Согласно формулам (3b) и (4b) в пространстве z_1, z_2, z_3 тело имеет форму сферы с постоянной диэлектрической проницаемостью. Причем это преобразование нужно делать только в переходной зоне, вне переходной зоны имеем совпадающие сферические координаты. Определится зависимость

$$y_l = y_l(z_1, z_2, z_3).$$

Справедливо $\frac{\partial y_l}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial y_m} = \delta_{lm}$, значит обратная матрица совпадает с транспонированной и преобразование локально ортогональное. Где в переменных $z_l, l=1,...,3$ тело имеет форму сферы радиуса R_0, причем нормаль к телу переходит в нормаль к сфере, так как преобразование ортогональное.

В переходной области приравняем эту зависимость, зависимости от сферических координат

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{\varepsilon(R_0 \pm i0)\mu(R_0 \pm i0)}R\sin\theta\sin\varphi \\ z_2 = \sqrt{\varepsilon(R_0 \pm i0)\mu(R_0 \pm i0)}R\sin\theta\cos\varphi, \\ z_3 = \sqrt{\varepsilon(R_0 \pm i0)\mu(R_0 \pm i0)}R\cos\theta \end{cases}$$

Тогда получим зависимость $q_l = g_l(y_1, y_2, y_3) = h_l(z_1, z_2, z_3), q_l = (R, \theta, \varphi)$, причем координаты $q_l, l=1,2,3$ описывают эквивалентную сферу радиуса R_0 и по другим формулам исследуемое тело.

При выходе из переходной зоны имеем сферическую систему координат в переменных R, ψ_1, ψ_2, которая описывается переменными сферической системы координат.

Зная значение функции и производную по нормали на поверхности сферы можно определить из граничных условий решение задачи по вычислению рассеянного телом поля.

2. Комплексный радиус для гладкого тела

Но имеется еще одна проблема. Возможно средний радиус окажется комплексным, где модуль комплексного радиуса определяет размер тела, а фаза комплексного радиуса определяет форму тела. Докажем это.

Как же определить комплексный радиус тела, чтобы его модуль совпадал с действительным радиусом тела. Для этого определим центр тела. При этом центр тела и системы координат определится из уравнения

$$x_s^0 = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x_s(\theta, \varphi)\sin\theta d\theta d\varphi / (4\pi), \qquad (2.1)$$

где $x_s(\theta,\varphi)$ координаты границы тела. Так как углы θ,φ, зависят от положения начала координат, центр тела определится в этой формуле однозначно из нелинейного уравнения. Задав произвольный центр тела, получим новую координату центра тела.

При этом $r(R_0,\theta,\varphi)=\eta(\theta,\varphi)$. Формулы преобразования имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta\sin\varphi \\ x_2 = r\sin\theta\cos\varphi \\ x_3 = r\cos\theta \end{cases}, \qquad (2.2)$$

$$r=\sqrt{\sum_{l=1}^{3} x_l^2}=r(y,\theta,\varphi)$$

При этом на поверхности тела имеем значение радиуса $r=\eta(\theta,\varphi)$. При фиксированной величине $y\in[|a_{\min}|,|a_{\max}|]$, имеем некоторую поверхность. Причем поверхность заданного тела переходит в сферическую поверхность, при изменении величины y на отрезке $[|a_{\min}|,|a_{\max}|]$.

При этом при условии $y>|a_{\max}|, y<|a_{\min}|$ получаем, что радиус не зависит от угловых координат.

Итак, имеем задачу по продолжению радиуса на значения удовлетворяющие $y > R_0$, где R_0 определяется по формуле $R_0^3=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |\eta|^3(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi/(4\pi)$, где $\eta(\theta,\varphi)$ уравнение поверхности тела.

При этом имеем максимальный радиус тела

$$|a_{\max}|^2=\max\sqrt{\sum_{p=1}^{3}[x_p(\theta,\varphi)]^2}\ .$$

Где радиус $a_{\min}$ определится из равенства

$$1/|a_{\min}|^2=\max[1/\sqrt{\sum_{p=1}^{3} x_p^2(\theta,\varphi)}].$$

При таком определении максимального и минимального радиуса огибающая совпадет с наибольшим и наименьшим значением радиуса.

Определим формулу преобразования внешнего увеличивающегося радиуса

$$1/r(y,\theta,\varphi)=\begin{cases}\delta(y,R_0,|a_{\max}|)/\eta(\theta,\varphi)+[1-\delta(y_0,|a_{\max}|)]/|a_{\max}|, R_0<y<|a_{\max}|\\ 1/y, y>|a_{\max}|\end{cases}$$

Формула преобразования для внутреннего уменьшающегося радиуса

$$r(y,\theta,\varphi)=\begin{cases}\delta(y,R_0,|a_{\min}|)\eta(\theta,\varphi)+[1-\delta(y,R_0,|a_{\min}|)]|a_{\min}|, R_0>y>|a_{\min}|\\ y, y<|a_{\min}|\end{cases}$$

При этом $r(R_0,\theta,\varphi)=\eta(\theta,\varphi)$.

Определим формулу преобразования в случае, если огибающая равна $h_+(\theta,\varphi)$

$$1/r(y,\theta,\varphi)=\begin{cases}\delta(y,R_0,|a_{\max}|)/h_+(\theta,\varphi)+[1-\delta(y,R_0,|a_{\max}|)]/|a_{\max}|, R_0<y<|a_{\max}|\\ 1/y, y>|a_{\max}|\end{cases}$$

Формула преобразования для внутреннего уменьшающегося радиуса, в случае, если огибающая равна $h_-(\theta,\varphi)$

$$r(y,\theta,\varphi)=\begin{cases}\delta(y,R_0,|a_{\min}|)h_-(\theta,\varphi)+[1-\delta(y,R_0,|a_{\min}|)|]a_{\min}|, R_0>y>|a_{\min}|\\ y, y<|a_{\min}|\end{cases}$$

Имеем решаемое уравнение $r=r(R,\theta,\varphi),\dfrac{\partial r(R,\theta,\varphi)}{\partial R}=0$. Причем второе уравнение выглядит таким образом $\delta'_R(R,R_0,|a_{\max}|)[\dfrac{1}{h_+(\theta,\varphi)}-\dfrac{1}{|a_{\max}|}]=0$. Т.е. уравнение для огибающей $h_+(\theta,\varphi)=|a_{\max}|$. Совершенно аналогично для внутренней части поверхности имеем $h_-(\theta,\varphi)=|a_{\min}|$.

Определим формулу внешнего радиуса огибающей $\operatorname{Re} w(R,\theta,\varphi)=|a_{\max}|$.

Формула для внутреннего радиуса огибающей $\operatorname{Re} w(R,\theta,\varphi)=|a_{\min}|$.

Определим мнимую часть радиуса $\operatorname{Im} w(R,\theta,\varphi)$ в случае если имеется соотношение $\eta(\theta,\varphi)>r(R,\theta,\varphi)>|a_{\min}|$ по формуле

$$|\Re_{\min}(R,\theta,\varphi)|^2 = |w(R,\theta,\varphi)|^2 = |a_{\min}|^2 + |\operatorname{Im} w(R,\theta,\varphi)|^2.$$

Причем на границе тела $w(R_0,\theta,\varphi) = |a_{\min}|[1 + i\sqrt{\eta^2(\theta,\varphi)/|a_{\min}|^2 - 1}]$

При этом комплексный радиус имеет значение

$$\begin{gathered}\Re_{\min}(R,\theta,\varphi) = |a_{\min}| + i\operatorname{Im} w(R,\theta,\varphi) = \\ = |a_{\min}|[1 + i\sqrt{r^2(R,\theta,\varphi)/|a_{\min}|^2 - 1}]\end{gathered}. \quad (2.3)$$

Определим мнимую часть радиуса $\operatorname{Im} w(y,\theta,\varphi)$ по формуле

$$\frac{1}{|\Re_{\max}(R,\theta,\varphi)|^2} = \frac{1}{r^2(R,\theta,\varphi)} = \frac{1}{|a_{\max}|^2} + \frac{1}{[\operatorname{Im} w(R,\theta,\varphi)]^2}.$$

В случае если имеется соотношение $\eta(\theta,\varphi) < r(R,\theta,\varphi) \triangleleft |a_{\max}|$. Причем имеем определение комплексного радиуса тела

$$\frac{1}{\Re_{\max}(R,\theta,\varphi)} = \frac{1}{|a_{\max}|} + \frac{i}{\operatorname{Im} w(R,\theta,\varphi)} = \frac{1}{|a_{\max}|}(1 + i\sqrt{\frac{|a_{\max}|^2}{r^2(R,\theta,\varphi)} - 1}$$

Причем на границе

$$\begin{gathered}w(R_0,\theta,\varphi) = \frac{|a_{\max}|}{1 + i\sqrt{|a_{\max}|^2/\eta^2(\theta,\varphi) - 1}} = \\ = \eta^2(\theta,\varphi)[1 - i\sqrt{|a_{\max}|^2/\eta^2(\theta,\varphi) - 1}]/|a_{\max}|\end{gathered}$$

При этом комплексный радиус определится по формуле

$$\begin{gathered}\frac{1}{\Re_{\max}(R,\theta,\varphi)} = \frac{1}{|a_{\max}|}[1 + \frac{i|a_{\max}|}{\operatorname{Im} w(R,\theta,\varphi)}] = \\ = \frac{1}{|a_{\max}|}[1 + i\frac{\sqrt{|a_{\max}|^2 - r^2(R,\theta,\varphi)}}{r(R,\theta,\varphi)}]\end{gathered}. \quad (2.4)$$

Откуда получим $\Re_{\max}(R,\theta,\varphi) = r^2(R,\theta,\varphi)[1 - i\sqrt{|a_{\max}|/r^2(R,\theta,\varphi) - 1}]/|a_{\max}|$.

Причем на границе тела происходит скачок комплексного радиуса. При определении граничных условий во внешности тела и внутренней части тела надо использовать разный комплексный радиус. Общий радиус вводится по формуле

$$\Re(R,\theta,\varphi)=\sqrt{\Re_{\max}(R,\theta,\varphi)\Re_{\min}(R,\theta,\varphi)}=$$
$$=r(R,\theta,\varphi)\sqrt{\frac{|a_{\min}|}{|a_{\max}|}}\sqrt{[1-i\sqrt{|a_{\max}|^2/r^2(R,\theta,\varphi)-1}][1+i\sqrt{r^2(R,\theta,\varphi)/|a_{\min}|^2-1}]}$$

Причем имеем соотношение

$$|\Re(R,\theta,\varphi)|=\begin{cases}|a_{\min}|, R=|a_{\min}|\\ |a_{\max}|, R=|a_{\max}|\\ \eta(\theta,\varphi), R=R_0\end{cases}$$

Комплексная величина $\Re(R_0,\theta,\varphi)$ отражает уравнение комплексного радиуса тела.

Кроме среднего радиуса тела существует максимальный и минимальный радиус тела

$$\begin{gathered}\Re_{\max}(R_0,\theta,\varphi)=\eta^2(\theta,\varphi)[1-i\sqrt{|a_{\max}|^2/\eta^2(\theta,\varphi)-1}]/|a_{\max}|\\ \Re_{\min}(R_0,\theta,\varphi)=|a_{\min}|[1+i\sqrt{\eta^2(\theta,\varphi)/|a_{\min}|^2-1}]\end{gathered}.$$

При этом определится средний радиус тела

$$\Re^2(R_0,\theta,\varphi)=\eta^2(\theta,\varphi)\frac{|a_{\min}|}{|a_{\max}|}[1-i\sqrt{|a_{\max}|^2/\eta^2(\theta,\varphi)-1}][1+i\sqrt{\eta^2(\theta,\varphi)/|a_{\min}|^2-1}]=$$
$$=\exp[i(\arctan\sqrt{\eta^2(\theta,\varphi)/|a_{\min}|^2-1}-\arctan\sqrt{|a_{\max}|^2/\eta^2(\theta,\varphi)-1})]\eta^2(\theta,\varphi)$$

При этом средний, максимальный и минимальный комплексный радиус тела равен

$$\begin{aligned}&R_{0c}^3(R_0,\theta_0,\varphi_0)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\Re^3(R_0,\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)\sin\theta d\theta d\varphi/4\pi\\ &a_{\max}^3=R_{0\max}^3(R_0,\theta_0,\varphi_0)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\Re_{\max}^3(R_0,\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)\sin\theta d\theta d\varphi/4\pi \quad (2.5)\\ &a_{\min}^3=R_{0\min}^3(R_0,\theta_0,\varphi_0)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\Re_{\min}^3(R_0,\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)\sin\theta d\theta d\varphi/4\pi\end{aligned}$$

Комплексный радиус тела зависит от его ориентации в пространстве. Пространство вне максимального и минимального радиуса сферы будет тоже комплексным, но радиус этого пространства имеет постоянную фазу

$\arg r = \arg a_{\max}$ в переходной области вне объема тела, и фазу $\arg r = a_{\min}$ в переходной области внутри объема тела.

Действительные размеры переходной области определятся из комплексного равенства, где определится модуль максимального и минимального размера переходной области

$$R_{0c}^3(\theta_0,\varphi_0) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\int_{|a_{\min}|}^{|a_{\max}|} \Re^3(R,\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)\sin\theta R^2 dR d\theta d\varphi /$$

$$/[4\pi(|a_{\max}|^3 - |a_{\min}|^3)/3] = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \Re^3(R_0,\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)\sin\theta d\theta d\varphi;$$

$$\Re(R,\theta,\varphi) = \sqrt{\Re_{\max}(R,\theta,\varphi)\Re_{\min}(R,\theta,\varphi)} =$$

$$= r(R,\theta,\varphi)\sqrt{\frac{|a_{\min}|}{|a_{\max}|}}\sqrt{[1 - i\sqrt{|a_{\max}|^2/r^2(R,\theta,\varphi)-1}][1 + i\sqrt{r^2(R,\theta,\varphi)/|a_{\min}|^2-1}]}$$

При этом в связи с изменением фазы радиуса вне переходной зоны, изменится и фаза волнового числа, произведение $k_0 r$ вне переходной зоны вне тела должно быть действительным, а внутри тела вне переходной зоны иметь фазу $\arg kr = \arg\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}$. Причем внутри переходной зоны фаза волнового числа равна $\arg k_0 + \arg a_{\max} = 0$ вне тела и $\arg k + \arg a_{\min} = \arg\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}$ внутри тела. Внутри переходной зоны произведение $k\Re$ комплексное.

Рассеянное поле вдали от сферы, равно

$$E_\varphi = -i\frac{\exp(ikr)}{kr}S_1(\theta)\sin\varphi \qquad E_\theta = i\frac{\exp(ikr)}{kr}S_2(\theta)\cos\varphi$$

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}[a_n\pi_n(\cos\theta) + b_n\tau_n(\cos\theta)]$$

$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}[a_n\tau_n(\cos\theta) + b_n\pi_n(\cos\theta)].$$

$$\pi_n(\cos\theta) = \frac{P_1(\cos\theta)}{\sin\theta}, \tau_n(\cos\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}P_1(\cos\theta)$$

В случае комплексного радиуса a ЭПР не будет равняться πa^2, а будет более сложная зависимость. Формула для сечения обратного рассеяния

$$\sigma_b = \frac{4\pi}{k^2}[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}[a_n\tau_n(\cos\theta) + b_n\pi_n(\cos\theta)]^2 \cos^2\varphi +$$

$$+\frac{4\pi}{k^2}[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}[a_n\pi_n(\cos\theta) + b_n\tau_n(\cos\theta)]^2 \sin^2\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{k^2}|\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(-1)^n(a_n - b_n)|^2$$

$$a_n = \frac{\psi_n(\alpha)\psi_n'(\beta) - m\psi_n'(\alpha)\psi_n(\beta)}{\varsigma_n(\alpha)\psi_n'(\beta) - m\varsigma_n'(\alpha)\psi_n(\beta)}$$

$$b_n = \frac{m\psi_n(\alpha)\psi_n'(\beta) - \psi_n'(\alpha)\psi_n(\beta)}{m\varsigma_n(\alpha)\psi_n'(\beta) - \varsigma_n(\alpha)\psi_n(\beta)}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\pi x/2}J_{n+1/2}(x); \varsigma_n(x) = \sqrt{\pi x/2}H^{(1)}_{n+1/2}(x);$$

Асимптотика на высоких частотах для сечения рассеяния равна при большом коэффициенте диэлектрической проницаемости

$$\sigma_b(R_{0c},\theta,\varphi) = \frac{4\pi}{k^2}\{\sum_{n=1}^{|kR_{0c}|} \frac{2n+1}{n(n+1)}[-\sin(kR_{0c} - \frac{n+1}{2}\pi)\tau_n(\cos\theta) +$$

$$+\cos(kR_{0c} - \frac{n+1}{2}\pi)\pi_n(\cos\theta)]^2\cos^2\varphi + +[\sum_{n=1}^{|kR_{0c}|} \frac{2n+1}{n(n+1)}[-\sin(kR_{0c} - \frac{n+1}{2}\pi)\pi_n(\cos\theta) +$$

$$+\cos(kR_{0c} - \frac{n+1}{2}\pi)\tau_n(\cos\theta)]^2\sin^2\varphi\}/\exp(2ikR_{0c})$$

В случае сигнала обратного рассеяния эта величина равна

$$\sigma_b(R_{0c},\theta,\varphi) = \frac{4\pi}{k^2}[\sum_{n=1}^{|kR_{0c}|} (2n+1)(-1)^n[\frac{-\sin(kR_{0c} - \frac{n+1}{2}\pi) + \cos(kR_{0c} - \frac{n+1}{2}\pi)}{\exp(ikR_{0c})}]^2 =$$

$$= \frac{4\pi}{k^2}\{\sum_{n=1}^{|kR_{0c}|} (2n+1)(-1)^n[-\sin(\mathrm{Re}\,kR_{0c} - \frac{n+1}{2}\pi) + \cos(\mathrm{Re}\,kR_{0c} - \frac{n+1}{2}\pi)]\}^2 \times$$

$$\times\frac{(\cosh \mathrm{Im}\,kR_{0c} - i\sinh \mathrm{Im}\,kR_{0c})^2}{\sqrt{\cosh^2 2\,\mathrm{Im}\,kR_{0c} + \sinh^2 \mathrm{Im}\,2kR_{0c}}}\exp[-2i\arctan(\tanh \mathrm{Im}\,kR_{0c}) =$$

$$= \pi|R_{0c}|^2 \frac{1+2\sinh^2 \mathrm{Im}\,kR_{0c}}{\sqrt{1+2\sinh^2 \mathrm{Im}\,2kR_{0c}}}\exp[-4i\arctan(\tanh \mathrm{Im}\,kR_{0c})$$

Отметим, что действительная и мнимая часть комплексного радиуса тела зависят от его ориентации.

$$R_{0c}^3(\theta_0,\varphi_0)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\Re^3(R_0,\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)\sin\theta d\theta d\varphi/4\pi$$

$$\begin{gathered}\Re^2(R_0,\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)=\exp[i(\arctan\sqrt{\eta^2(\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)/|a_{\min}|^2-1}-.\\ -\arctan\sqrt{|a_{\max}|^2/\eta^2(\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)-1})]\eta^2(\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)\end{gathered}$$

Изменим углы таким образом, чтобы они определяли сигнал обратного рассеяния. Определение комплексного радиуса тела останется неизменным, но углы имеют другое значение.

$$R_{0c}^3(\theta_0',\varphi_0')=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\Re^3(R_0,\theta-\theta_0',\varphi-\varphi_0')\sin\theta d\theta d\varphi/4\pi$$

$$\begin{gathered}\Re^2(R_0,\theta-\theta_0',\varphi-\varphi_0')=\exp[i(\arctan\sqrt{\eta^2(\theta-\theta_0',\varphi-\varphi_0')/|a_{\min}|^2-1}-.\\ -\arctan\sqrt{|a_{\max}|^2/\eta^2(\theta-\theta_0',\varphi-\varphi_0')-1})]\eta^2(\theta-\theta_0',\varphi-\varphi_0')\end{gathered}$$

Формула при этом будет соответствовать сигналу обратного рассеяния, но со смешенной зависимостью комплексного размера тела

$$\begin{gathered}\sigma_b(R_{0c},\theta_0',\varphi_0')=\pi|R_{0c}(\theta_0',\varphi_0')|^2\frac{1+2\sinh^2\operatorname{Im}kR_{0c}(\theta_0',\varphi_0')}{\sqrt{1+2\sinh^2\operatorname{Im}2kR_{0c}(\theta_0',\varphi_0')}}\times\\ \times\exp\{-4i\arctan[\tan\mathrm{h}\operatorname{Im}kR_{0c}(\theta_0',\varphi_0')]\};\theta_0'=\theta_0-\theta+\pi,\varphi_0'=\varphi_0-\varphi\end{gathered}.$$

Где угол θ_0 направление ориентации тела, угол θ соответствует точке зеркального отражения, φ_0 направление ориентации тела, угол φ соответствует точке зеркального отражения.

Записав точную формулу для рассеяния на сфере, и подставив в нее зависимость комплексного радиуса тела от ориентации тела в пространстве, получим комплексное значение отраженного сигнала в любой точке пространства вне переходной зоны. Но для этого для внутренности тела надо использовать другие коэффициенты в формуле для ЭПР. В одном эксперименте по комплексному радиусу тела определяется комплексный сигнал. Комплексный радиус тела считается по формуле

$$R_{0c}^3(\theta_0,\varphi_0)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{|a_{\min}|}^{|a_{\max}|}\Re^3(R,\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)\sin\theta R^2 dRd\theta d\varphi /$$

$$/[4\pi(|a_{\max}|^3-|a_{\min}|^3)/3]=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Re^3(R_0,\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)\sin\theta d\theta d\varphi;$$

.

$$\Re(R,\theta,\varphi)=\sqrt{\Re_{\max}(R,\theta,\varphi)\Re_{\min}(R,\theta,\varphi)}=$$

$$=r(R,\theta,\varphi)\sqrt{\frac{|a_{\min}|}{|a_{\max}|}}\sqrt{[1-i\sqrt{|a_{\max}|^2/r^2(R,\theta,\varphi)-1}][1+i\sqrt{r^2(R,\theta,\varphi)/|a_{\min}|^2-1}]}$$

.

Определятся из нелинейного уравнения значения максимального и минимального радиуса переходной зоны. Для этого надо приравнять радиус переходной зоны, вычисленный двумя разными способами, с помощью среднего радиуса тела и с помощью усреднения по переходной зоне. Комплексный радиус содержит два числа, откуда определится максимальный и минимальный радиус.

Если поверхность содержит изломы, то гауссов радиус кривизны, определенный по формуле рассеяния на теле, может оказаться комплексным.