Вставка комплексного сегмента вместо излома поверхности, позволяющая описывать тело как гладкое

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Изломы поверхности заменяются вставками с комплексным радиусом кривизны поверхности, чтобы не нарушать форму тела. Поверхность становится гладкой, но с комплексным радиусом вставки.

## 1. Построение системы координат

В сечении $x_1 = const$ декартовой системы координат определяется угол по формуле

$$\psi_1(s_1, x_1) = 2\pi \int_0^{s_1} \frac{ds_1}{|\rho_1(s_1, x_1)|} / \int_0^{l_1} \frac{ds_1}{|\rho_1(s_1, x_1)|} - \pi,$$

где $s_1$ длина огибающей линии в сечении $x_1 = const$, $l_1$ - длина однократно замкнутой огибающей в том же сечении, $\rho_1(s_1, x_1)$ радиус кривизны в том же сечении. Причем $\psi_1 = -\pi$ и $\psi_1 = \pi$ соответствует отрицательному направлению $0x_3$. Положительное направление оси $0x_3$ соответствует направлению на источник. В случае задачи гидродинамики, отрицательное направление соответствует скорости тела в положительной бесконечности.

Построим зависимость радиуса тела от построенных углов $\psi_l, l = 1.2$. Это можно сделать однозначным образом. Далее будем решать дифференциальное уравнение $\frac{\partial r(\psi_1, \psi_2)}{\partial \psi_2} \frac{d\psi_2}{d\psi_1} + \frac{\partial r(\psi_1, \psi_2)}{\partial \psi_1} = 0$, которое определит зависимость $\psi_2 = \psi_2(\psi_1)$. Эта кривая соответствует постоянному радиусу тела, проведенному относительно центра тела. Центр тела определим далее по тексту. Кривая замкнется, как имеющая постоянный радиус. Имеем $\frac{\partial r(\psi_1, \psi_2)}{\partial \psi_1} d\psi_1 + \frac{\partial r(\psi_1, \psi_2)}{\partial \psi_2} d\psi_2 = 0$, т.е. вектор касательной к поверхности

$(\frac{\partial r(\psi_1,\psi_2)}{\partial \psi_1},\frac{\partial r(\psi_1,\psi_2)}{\partial \psi_2})$ ортогонален приращению аргумента $(d\psi_1, d\psi_2)$. Касательная к замкнутой кривой $\psi_2 = \psi_2(\psi_1)$ ортогональна касательной к поверхности. Следовательно, продольная часть сетки построена. Надо провести перпендикулярные к ней кривые. Причем пересекаться они не должны, иначе будет два разных перпендикуляра к одной кривой. При достаточно плотном количестве кривых линий, построить перпендикуляры к ним не сложно. В случае сферической поверхности имеется ортогональная сетка сферической системы координат. В случае смешанной поверхности, частично сферической, для не сферической части строим кривые постоянного радиуса, совпадающие в сферической части с сферической системой координат и плоскостью, проведенной через касательную линию ортогонально поверхности в точке начала сферической поверхности.

Воспользуемся формулой $x_1 = x_1(s_1, s_2)$, получим

$$\psi_1 = 2\pi \int_0^{s_1} \frac{ds_1}{|\rho_1(s_1,s_2)|} / \int_0^{l_1} \frac{ds_1}{|\rho_1(s_1,s_2)|} - \pi$$

При этом модуль в знаменателе подынтегрального выражения берется в случае не нулевого радиуса кривизны. Как покажем далее в случае нулевого радиуса кривизны, он становится комплексным.

Определим сначала преобразование координат в случае особенности типа «конус». Для этого в вершине конуса проведем плоскость $A$, а в этой плоскости определим две ортогональные прямые линии, проходящие через вершину конуса

$$\begin{aligned} x_1 \cos\phi + x_2 \sin\phi &= const_1, \\ -x_1 \sin\phi + x_2 \cos\phi &= const_2 \end{aligned} . \qquad (1.1)$$

При этом выберем направление плоскости $A$, определяющим минимум величины

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta(\phi) d\phi .$$

Угол $\theta(\phi)$ это угол, образуемый плоскостью $A$ с направлением линии конуса, соответствующей углу $\phi$ . Вычислим угол $\theta_0$ при вершине конуса по формуле

$$\theta_0 = \int_0^{2\pi} [\pi - 2\theta(\phi)] d\phi / (2\pi).$$

Этот угол назовем дополнительным углом конуса. При этом имеем следующую формулу для радиуса кривизны (в вершине конуса имеем главные радиусы кривизны, равные нулю $\rho_1 = \rho_2 = 0$)

Для кругового конуса с углом при вершине $\theta_0$, радиусы кривизны удовлетворяют

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \theta_0^2 \delta(s_1 - s_1^0) \delta(s_2 - s_2^0).$$

В случае, если имеется излом поверхности типа «хребет», т.е. $\rho_1[s_1^0, s_2(s_1^0)] = 0$ вдоль кривой на поверхности $s_2 = s_2(s_1)$, используем формулу

$$\frac{1}{\rho_1[s_1 - s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]} = \frac{1}{s_1 - s_1^0 - i0} = i\delta(s_1 - s_1^0)(\theta_+ - \theta_-) + Vp \frac{1}{s_1 - s_1^0}$$

$$\frac{1}{\rho_1[s_1 - s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]} = \frac{1}{s_1 - s_1^0 + i0} = -i\delta(s_1 - s_1^0)[1 - \frac{\theta_+ - \theta_-}{2\pi}]2\pi + Vp \frac{1}{s_1 - s_1^0} . (2)$$

$$\theta_+[s_1^0, s_2(s_1^0)] = \pi - \arccos \frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}, \theta_- = -\arccos \frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}$$

При этом среднее арифметическое радиусов кривизны на двух концах «хребта», равно

$$\frac{1}{\rho_1[s_1, s_2(s_1^0)]} = \frac{1}{2(s_1 - s_1^0 - i0)} + \frac{1}{2(s_1 - s_1^0 + i0)} = i\delta(s_1 - s_1^0)(\theta_+ - \theta_- - \pi) + Vp \frac{1}{s_1 - s_1^0} =$$

$$= i\delta(s_1 - s_1^0)\{\arccos \frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1} - \arccos \frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}\} + Vp \frac{1}{s_1 - s_1^0}$$

Разность углов $\arccos \frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1} - \arccos \frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}$ назовем дополнительными угловыми координатами. В случае особенности типа «хребта», нужно применять формулу (2) до точки, удовлетворяющей условию $\arccos\frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1} = \arccos\frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}$.

В случае гладкого конуса, имеем угол при вершине конуса, равный $\gamma[\pi - 2\theta(\phi) - \theta_0] + \theta_0, \gamma \to 0$, причем функция $\theta(\phi)$ непрерывна. При этом асимптотика значения угла при вершине равна $\theta_0$ и образует круговой конус. Формулы для «хребта» переходит в формулу для «конуса» путем перемножения.

Отметим, что в случае «хребта» изменению угла $\arccos\frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1} - \arccos\frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}$ соответствует радиус кривизны, равный нулю при условии $\psi_1 \in [\arccos\frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}, \arccos\frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}] = [\theta_-, \theta_+]$. При этом радиус кривизны, интерполирующий излом комплексной поверхности равен

$$\frac{1}{\rho(\alpha)} = \{[\frac{1}{\rho(\theta_+)} - \frac{1}{\rho(\theta_-)}]\frac{\alpha - \theta_-}{\theta_+ - \theta_-} + \frac{1}{\rho(\theta_-)}\} \times$$
$$\times [1 - \frac{4(\alpha - \theta_-)(\theta_+ - \alpha)}{(\theta_+ - \theta_-)^2} + i\frac{4(\alpha - \theta_-)(\theta_+ - \alpha)}{(\theta_+ - \theta_-)^2}], \alpha \in [\theta_-, \theta_+].$$

где $\rho(\theta_+), \rho(\theta_-)$ главный радиус кривизны на границах излома. При этом в центре излома при $\theta = (\theta_+ + \theta_-)/2$ радиус кривизны чисто мнимый и равен $i[\frac{1}{\rho(\theta_+)} + \frac{1}{\rho(\theta_-)}]/2$. На границах излома радиус кривизны равен $\rho(\theta_+), \rho(\theta_-)$.

Аналогично в случае «конуса» имеем непрерывное изменение координаты в соседних точках и интерполяцию радиуса кривизны, равного корню квадратному из комплексного произведения главных радиусов кривизны

$$\frac{1}{\rho_{av}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi\rho(\varphi)},$$

$$\frac{1}{\rho(\alpha,\varphi)} = \{[\frac{1}{\rho_{av}} - \frac{1}{\rho(\varphi)}]\frac{\alpha}{\theta_0} + \frac{1}{\rho(\varphi)}\}(1 - \frac{\alpha}{\theta_0} + \frac{i\alpha}{\theta_0}), \alpha \in [0,\theta_0].$$

где $\rho(\varphi)$ корень квадратный из произведения радиусов кривизны на границе излома типа конус. В обоих случаях «конуса» и «хребта» добавляется комплексная часть к радиусу кривизны поверхности, а действительная поверхность вне излома остается неизменной.

Сумма изломов соответствует дисперсии поверхности, ее сглаживание осуществляется в комплексной плоскости, где мнимая часть соответствует амплитуде локального излома. Мнимая часть поверхности соответствует излому в поверхности и определяет амплитуду излома. Максимальная мнимая часть поверхности в данной точке определяет угол излома в данной точке. Мнимая вставка поверхности в зависимости от непрерывного угла $\psi_k, k=1,2$ позволяет сгладить поверхность, но она становится комплексной. Изрезанной границе соответствует непрерывная комплексная поверхность, где в непрерывных углах, описывающих гладкую поверхность она комплексная с изменением мнимой части. В случае случайной шероховатой поверхности, локальная мнимая часть описывает дисперсию поверхности, разную в разных точках. Случайная поверхность с переменной дисперсией переходит в детерминированную эквивалентную комплексную поверхность. Случайная поверхность, имеющая постоянную дисперсию, не сводится к детерминированной. Случайная поверхность с переменной дисперсией более общий случай поверхности, и может не сводиться к детерминированной поверхности.

В этой системе координат поверхность тела с изломом интерполируется в переменных $\psi_k, k=1,2$ как имеющая непрерывную производную от координат поверхности. В самом деле, в изломе приращение угла наклона касательной равно приращению координаты $\psi_k, k=1,2$. Функция координат

$x_l(\psi_1,\psi_2), l=1.2.3$ поверхности в точке излома соответствует комплексному радиусу при изменении угла $\psi_1$ и аналогично изменению угла $\psi_2$. Таким образом, форма тела не меняется, но оно становится непрерывной функцией от углов $\psi_l$ с учетом вставки комплексного сегмента.