Преобразование произвольного тела в сферу комплексного радиуса

Якубовский Е.Г.
e-mail yakubovski@rambler.ru

Произвольное тело можно преобразовать с помощью ортогонального преобразования, сохраняющего углы, в сферическое тело. Имеется переходная зона, которая преобразуется в сферы с помощью ортогонального преобразования. Эта область заключена между максимальным и минимальным радиусом сферы. Вне переходной зоны решение представляется как сферическое. Внутри переходной зоны в особом пространстве тело является сферическим, и решение зависит от сферических координат, зависящих от декартового пространства. Это сферическое тело имеет комплексный радиус, так как отраженный сигнал определяется комплексным числом. Фаза комплексного радиуса тела описывает форму произвольного тела, а модуль комплексного радиуса тела его измеряемый в эксперименте размер. Действительная часть комплексного радиуса тела описывает его средний размер, а мнимая часть среднеквадратичное отклонение тела. Переходная зона формирует отраженный сигнал, вне ее он становится сферическим. Изломы поверхности заменяются вставками с комплексным радиусом поверхности, чтобы не нарушать форму тела. Поверхность является гладкой, но с комплексным радиусом вставки.

1. Построение системы координат

В сечении $x_1 = const$ декартовой системы координат определяется угол по формуле

$$\psi_1(s_1, x_1) = 2\pi \int_0^{s_1} \frac{ds_1}{|\rho_1(s_1, x_1)|} / \int_0^{l_1} \frac{ds_1}{|\rho_1(s_1, x_1)|} - \pi,$$

где s_1 длина огибающей линии в сечении $x_1 = const$, l_1 - длина однократно замкнутой огибающей в том же сечении, $\rho_1(s_1, x_1)$ радиус кривизны в том же сечении. Причем $\psi_1 = -\pi$ и $\psi_1 = \pi$ соответствует отрицательному направлению $0x_3$. Положительное направление оси $0x_3$ соответствует направлению на источник. В случае задачи гидродинамики, отрицательное направление соответствует скорости тела в положительной бесконечности.

Построим зависимость радиуса тела от построенных углов $\psi_l, l = 1.2$. Это можно сделать однозначным образом. Далее будем решать дифференциальное уравнение $\frac{\partial r(\psi_1,\psi_2)}{\partial \psi_2}\frac{d\psi_2}{d\psi_1} + \frac{\partial r(\psi_1,\psi_2)}{\partial \psi_1} = 0$, которое определит зависимость $\psi_2 = \psi_2(\psi_1)$. Эта кривая соответствует постоянному радиусу тела, проведенному относительно центра тела. Центр тела определим далее по тексту. Кривая замкнется, как имеющая постоянный радиус. Имеем $\frac{\partial r(\psi_1,\psi_2)}{\partial \psi_1}d\psi_1 + \frac{\partial r(\psi_1,\psi_2)}{\partial \psi_2}d\psi_2 = 0$, т.е. вектор касательной к поверхности $(\frac{\partial r(\psi_1,\psi_2)}{\partial \psi_1},\frac{\partial r(\psi_1,\psi_2)}{\partial \psi_2})$ ортогонален приращению аргумента $(d\psi_1, d\psi_2)$. Касательная к замкнутой кривой $\psi_2 = \psi_2(\psi_1)$ ортогональна касательной к поверхности. Следовательно, продольная часть сетки построена. Надо провести перпендикулярные к ней кривые. Причем пересекаться они не должны, иначе будет два разных перпендикуляра к одной кривой. При достаточно плотном количестве кривых линий, построить перпендикуляры к ним не сложно. В случае сферической поверхности имеется ортогональная сетка сферической системы координат. В случае смешанной поверхности, частично сферической, для не сферической части строим кривые постоянного радиуса, совпадающие в сферической части с сферической системой координат и плоскостью, проведенной через касательную линию ортогонально поверхности в точке начала сферической поверхности.

Воспользуемся формулой $x_1 = x_1(s_1, s_2)$, получим

$$\psi_1 = 2\pi\int_0^{s_1} \frac{ds_1}{|\rho_1(s_1,s_2)|} / \int_0^{l_1} \frac{ds_1}{|\rho_1(s_1,s_2)|} - \pi$$

При этом модуль в знаменателе подынтегрального выражения берется в случае не нулевого радиуса кривизны. Как покажем далее в случае нулевого радиуса кривизны, он становится комплексным.

Определим сначала преобразование координат в случае особенности типа «конус». Для этого в вершине конуса проведем плоскость A, а в этой плоскости определим две ортогональные прямые линии, проходящие через вершину конуса

$$\begin{aligned} x_1\cos\phi + x_2\sin\phi &= const_1, \\ -x_1\sin\phi + x_2\cos\phi &= const_2 \end{aligned}. \quad (1.1)$$

При этом выберем направление плоскости A, определяющим минимум величины

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta(\phi)d\phi .$$

Угол $\theta(\phi)$ это угол, образуемый плоскостью A с направлением линии конуса, соответствующей углу ϕ . Вычислим угол θ_0 при вершине конуса по формуле

$$\theta_0 = \int_0^{2\pi} [\pi - 2\theta(\phi)]d\phi/(2\pi) .$$

Этот угол назовем дополнительным углом конуса. При этом имеем следующую формулу для радиуса кривизны (в вершине конуса имеем главные радиусы кривизны, равные нулю $\rho_1 = \rho_2 = 0$)

Для кругового конуса с углом при вершине θ_0, радиусы кривизны удовлетворяют

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = \theta_0^2\delta(s_1 - s_1^0)\delta(s_2 - s_2^0) .$$

В случае, если имеется излом поверхности типа «хребет», т.е. $\rho_1[s_1^0, s_2(s_1^0)] = 0$ вдоль кривой на поверхности $s_2 = s_2(s_1)$, используем формулу

$$\frac{1}{\rho_1[s_1 - s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]} = \frac{1}{s_1 - s_1^0 - i0} = i\delta(s_1 - s_1^0)(\theta_+ - \theta_-) + Vp\frac{1}{s_1 - s_1^0}$$

$$\frac{1}{\rho_1[s_1 - s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]} = \frac{1}{s_1 - s_1^0 + i0} = -i\delta(s_1 - s_1^0)[1 - \frac{\theta_+ - \theta_-}{2\pi}]2\pi + Vp\frac{1}{s_1 - s_1^0}. \quad (2)$$

$$\theta_+[s_1^0, s_2(s_1^0)] = \pi - \arccos\frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}, \theta_- = -\arccos\frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}$$

При этом среднее арифметическое радиусов кривизны на двух концах «хребта», равно

$$\frac{1}{\rho_1[s_1, s_2(s_1^0)]} = \frac{1}{2(s_1 - s_1^0 - i0)} + \frac{1}{2(s_1 - s_1^0 + i0)} = i\delta(s_1 - s_1^0)(\theta_+ - \theta_- - \pi) + Vp\frac{1}{s_1 - s_1^0} =$$

$$= i\delta(s_1 - s_1^0)\{\arccos\frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1} - \arccos\frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}\} + Vp\frac{1}{s_1 - s_1^0}$$

Разность углов $\arccos\frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1} - \arccos\frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}$ назовем дополнительными угловыми координатами. В случае особенности типа «хребта», нужно применять формулу (2) до точки, удовлетворяющей условию

$$\arccos\frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1} = \arccos\frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}.$$

В случае гладкого конуса, имеем угол при вершине конуса, равный $\gamma[\pi - 2\theta(\phi) - \theta_0] + \theta_0, \gamma \to 0$, причем функция $\theta(\phi)$ непрерывна. При этом асимптотика значения угла при вершине равна θ_0 и образует круговой конус. Формулы для «хребта» переходит в формулу для «конуса» путем перемножения.

Отметим, что в случае «хребта» изменению угла $\arccos\frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1} - \arccos\frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}$ соответствует радиус кривизны, равный нулю при условии $\psi_1 \in [\arccos\frac{dx_1[s_1^0 - i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}, \arccos\frac{dx_1[s_1^0 + i0, s_2(s_1^0)]}{ds_1}] = [\theta_-, \theta_+]$. При этом радиус кривизны, интерполирующий излом комплексной поверхности равен

$$\frac{1}{\rho(\alpha)} = \{[\frac{1}{\rho(\theta_+)} - \frac{1}{\rho(\theta_-)}]\frac{\alpha-\theta_-}{\theta_+-\theta_-} + \frac{1}{\rho(\theta_-)}\}\times$$
$$\times[1 - \frac{4(\alpha-\theta_-)(\theta_+-\alpha)}{(\theta_+-\theta_-)^2} + i\frac{4(\alpha-\theta_-)(\theta_+-\alpha)}{(\theta_+-\theta_-)^2}], \alpha\in[\theta_-,\theta_+].$$

где $\rho(\theta_+),\rho(\theta_-)$ главный радиус кривизны на границах излома. При этом в центре излома при $\theta=(\theta_+ + \theta_-)/2$ радиус кривизны чисто мнимый и равен $i[\frac{1}{\rho(\theta_+)} + \frac{1}{\rho(\theta_-)}]/2$. На границах излома радиус кривизны равен $\rho(\theta_+),\rho(\theta_-)$.

Аналогично в случае «конуса» имеем непрерывное изменение координаты в соседних точках и интерполяцию радиуса кривизны, равного корню квадратному из комплексного произведения главных радиусов кривизны

$$\frac{1}{\rho_{av}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi\rho(\varphi)},$$
$$\frac{1}{\rho(\alpha,\varphi)} = \{[\frac{1}{\rho_{av}} - \frac{1}{\rho(\varphi)}]\frac{\alpha}{\theta_0} + \frac{1}{\rho(\varphi)}\}(1 - \frac{\alpha}{\theta_0} + \frac{i\alpha}{\theta_0}), \alpha\in[0,\theta_0].$$

где $\rho(\varphi)$ корень квадратный из произведения радиусов кривизны на границе излома типа конус. В обоих случаях «конуса» и «хребта» добавляется комплексная часть к радиусу кривизны поверхности, а действительная поверхность вне излома остается неизменной.

Сумма изломов соответствует дисперсии поверхности, ее сглаживание осуществляется в комплексной плоскости, где мнимая часть соответствует амплитуде локального излома. Мнимая часть поверхности соответствует излому в поверхности и определяет амплитуду излома. Максимальная мнимая часть поверхности в данной точке определяет угол излома в данной точке. Мнимая вставка поверхности в зависимости от непрерывного угла $\psi_k, k=1,2$ позволяет сгладить поверхность, но она становится комплексной. Изрезанной границе соответствует непрерывная комплексная поверхность, где в непрерывных углах, описывающих гладкую поверхность она комплексная с изменением мнимой части. В случае случайной шероховатой поверхности, локальная мнимая часть описывает дисперсию поверхности, разную в разных точках. Случайная поверхность с переменной дисперсией переходит в детерминированную эквивалентную комплексную поверхность. Случайная поверхность, имеющая постоянную дисперсию, не сводится к детерминированной. Случайная поверхность с переменной дисперсией более общий случай поверхности, и может не сводиться к детерминированной поверхности.

В этой системе координат поверхность тела с изломом интерполируется в переменных $\psi_k, k = 1{,}2$ как имеющая непрерывную производную от координат поверхности. В самом деле, в изломе приращение угла наклона касательной равно приращению координаты $\psi_k, k = 1{,}2$. Функция координат $x_l(\psi_1, \psi_2), l = 1.2.3$ поверхности в точке излома соответствует комплексному радиусу при изменении угла ψ_1 и аналогично изменению угла ψ_2. Таким образом, форма тела не меняется, но оно становится непрерывной функцией от углов ψ_l с учетом вставки комплексного сегмента.

При этом центр тела и системы координат определится из формулы

$$x_s^0 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x_s(\psi_1, \psi_2) d\psi_1 d\psi_2 / 4\pi^2, \tag{1.2}$$

где x_s координата границы тела. При этом в случае кусочно-непрерывной функции $x_s(\psi_1, \psi_2)$, не имеющей центра симметрии, координата центра тела не единственна.

Итак, имеем задачу по продолжению радиуса на значения удовлетворяющие $y > R_0$, где R_0 определяется по формуле $R_0^3 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\eta|^3 (\theta, \varphi) d\psi_1 d\psi_2 / 4\pi^2$, где $\eta(\psi_1, \psi_2)$ уравнение поверхности тела.

Зависимость от углов $\psi_l, l = 1{,}2$ позволяет свести задачу для не звездного тела, к звездному телу. При этом наблюдается взаимно однозначное соответствие между координатами границы тел и переменными $\psi_l\ , l=1,2$. В самом деле, переменным координатам $\psi_l\ , l=1,2$ соответствует, декартова точка на поверхности тела. При этом это периодическая функция от переменных $\psi_l\ , l=1,2$.

При этом определяется координата переходной зоны по формуле

$$y_l(R,\psi_1,\psi_2)=\begin{cases} R_0<R<a_{\max}, \delta(R,R_0,a_{\max})x_k(\psi_1,\psi_2)+ \\ +[1-\delta(R,R_0,a_{\max})]e_l a_{\max} \\ R>a_{\max}, e_l R \end{cases}, \qquad (1.3a)$$

Где $\delta(R,R_0,a)=\dfrac{R-a}{R_0-a}$.

$$e_l=\begin{cases} \sin\psi_1/\sqrt{1+\cos^2\psi_1\tan^2\psi_2}, l=1 \\ \sin\psi_2/\sqrt{1+\cos^2\psi_2\tan^2\psi_1}, l=2 \\ \cos\psi_1/\sqrt{1+\cos^2\psi_1\tan^2\psi_2}= \\ =\cos\psi_2/\sqrt{1+\cos^2\psi_2\tan^2\psi_1}, l=3 \end{cases}$$

орт сферической системы координат.

Внутренняя координата изменяется по формуле

$$y_l(R,\psi_1,\psi_2)=\begin{cases} a_{\min}<R<R_0, x_k(\psi_1,\psi_2)\delta(R,R_0,a_{\min})+ \\ +a_{\min}[1-\delta(R,R_0,a_{\min})]e_l \\ R<a_{\min}, e_l R \end{cases}, \qquad (1.4a)$$

При этом имеем

$$a_{\max}^2=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{\max\sqrt{\sum_{p=1}^{3}[x_p(\psi_1,\psi_2)]^2}+[R_0-\sqrt{\sum_{p=1}^{3}[x_p(\psi_1,\psi_2)]^2}]^2\}d\psi_1 d\psi_2/(4\pi^2)$$

.

Где радиус $a_{\min}$ определится из равенства

$$1/a_{\min}^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{\max[1/\sqrt{\sum_{p=1}^{3} x_p^2(\psi_1,\psi_2)}]+$$
$$+[1/R_0 - 1/\sqrt{\sum_{p=1}^{3}[x_p(\psi_1,\psi_2)]^2}]^2\}d\psi_1 d\psi_2/(4\pi^2).$$

Назовем переходной зоной, область с переменной R, удовлетворяющей $a_{\min}<R<a_{\max}$ неравенству. Эти формулы оценочные, размер переходной зоны определим из комплексного уравнения.

Причем на большом расстоянии от центра тела и внутри тела получается сферическая система координат.

Пространственные координаты определятся по формулам для сферического тела

$$z_l(R,\psi_1,\psi_2)=\begin{cases} R_0<R<a_{\max},\{\delta(R,R_0,a_{\max})R_0+[1-\delta(R,R_0,a_{\max})]a_{\max}\}e_l \\ R>a_{\max}, e_l R \end{cases},\text{(1.3b)}$$

Где $\delta(R,R_0,a)=\dfrac{R-a}{R_0-a}$. Внутренняя координата изменяется по формуле

$$z_l(R,\psi_1,\psi_2)=\begin{cases} a_{\min}<R<R_0,\{R_0\delta(R,R_0,a_{\min})+ \\ +a_{\min}[1-\delta(R,R_0,a_{\min})]\}e_l \\ R<a_{\min}, e_l R \end{cases}, \quad (1.4b)$$

Существует пространство z_1,z_2,z_3, где имеем эквивалентное сферическое тело

$$\begin{cases} z_1=z_1(y_1,y_2,y_3)=R\sin\psi_1/\sqrt{1+\cos^2\psi_1\tan^2\psi_2} \\ z_2=z_2(y_1,y_2,y_3)=R\sin\psi_2/\sqrt{1+\cos^2\psi_2\tan^2\psi_1} \\ z_3=z_3(y_1,y_2,y_3)=R\cos\psi_1/\sqrt{1+\cos^2\psi_1\tan^2\psi_2}= \\ =R\cos\psi_2/\sqrt{1+\cos^2\psi_2\tan^2\psi_1} \end{cases} \quad (1.5)$$

Из (1.3a), (1.4a) можно выразить $R=R(y_1,y_2,y_3),\psi_1=\psi_1(y_1,y_2,y_3),\psi_2=\psi_2(y_1,y_2,y_3)$ и подставить в (1.5). Согласно формулам (1.3b) и (1.4b) в пространстве z_1,z_2,z_3 тело имеет форму сферы. Причем это преобразование нужно делать только в переходной зоне, вне переходной зоны имеем совпадающие сферические координаты. Определится зависимость

$$y_l = y_l(z_1, z_2, z_3).$$

Справедливо $\frac{\partial y_l}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial y_m} = \delta_{lm}$, значит обратная матрица совпадает с транспонированной и преобразование локально ортогональное. Где в переменных $z_l, l = 1,\ldots,3$ тело имеет форму сферы радиуса R_0, причем нормаль к телу переходит в нормаль к сфере, так как преобразование ортогональное.

В переходной области приравняем эту зависимость, зависимости от сферических координат

$$\begin{cases} z_1 = R\sin\theta\sin\varphi \\ z_2 = R\sin\theta\cos\varphi, \\ z_3 = R\cos\theta \end{cases}$$

Тогда получим зависимость $q_l = g_l(y_1, y_2, y_3) = h_l(z_1, z_2, z_3), q_l = (R, \theta, \varphi)$, причем координаты $q_l, l = 1,2,3$ описывают эквивалентную сферу радиуса R_0 и по другим формулам исследуемое тело.

При выходе из переходной зоны имеем сферическую систему координат в переменных R, ψ_1, ψ_2, которая описывается переменными сферической системы координат.

Зная значение функции и производную по нормали на поверхности сферы можно определить из граничных условий решение задачи по вычислению рассеянного телом поля.

2. Комплексный радиус для гладкого тела

Но имеется еще одна проблема. Возможно средний радиус окажется комплексным, где модуль комплексного радиуса определяет размер тела, а фаза комплексного радиуса определяет форму тела. Докажем это.

Как же определить комплексный радиус тела, чтобы его модуль совпадал с действительным радиусом тела. Для этого определим центр тела. При этом центр тела и системы координат определится из уравнения

$$x_s^0 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x_s(\theta,\varphi) \sin\theta d\theta d\varphi / (4\pi), \qquad (2.1)$$

где $x_s(\theta,\varphi)$ координаты границы тела. Так как углы θ,φ зависят от положения начала координат, центр тела определится в этой формуле однозначно из нелинейного уравнения. Задав произвольный центр тела, получим новую координату центра тела.

При этом $r(R_0,\theta,\varphi)=\eta(\theta,\varphi)$. Формулы преобразования имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta\sin\varphi \\ x_2 = r\sin\theta\cos\varphi \\ x_3 = r\cos\theta \end{cases}, \qquad (2.2)$$

$$r = \sqrt{\sum_{l=1}^{3} x_l^2} = r(y,\theta,\varphi)$$

При этом на поверхности тела имеем значение радиуса $r=\eta(\theta,\varphi)$. При фиксированной величине $y\in[a_{\min},a_{\max}]$, имеем некоторую поверхность. Причем поверхность заданного тела переходит в сферическую поверхность, при изменении величины y на отрезке $[a_{\min},a_{\max}]$.

При этом при условии $y>a_{\max}, y<a_{\min}$получаем, что радиус не зависит от угловых координат.

Итак, имеем задачу по продолжению радиуса на значения, удовлетворяющие $y > R_0$, где R_0 определяется по формуле $R_0^3 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |\eta|^3 (\theta,\varphi) \sin\theta d\theta d\varphi/(4\pi)$, где $\eta(\theta,\varphi)$ уравнение поверхности тела.

$$a_{\max}^2 = \max\sqrt{\sum_{p=1}^{3} [x_p(\theta,\varphi)]^2} + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} [R_0 - \sqrt{\sum_{p=1}^{3} [x_p(\theta,\varphi)]^2}\,]^2 \sin\theta d\theta d\varphi/(4\pi^2) \ .$$

Где радиус $a_{\min}$ определится из равенства

$$1/a_{\min}^2 = \max[1/\sqrt{\sum_{p=1}^{3} x_p^2(\theta,\varphi)}] +$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} [1/R_0 - 1/\sqrt{\sum_{p=1}^{3} [x_p(\theta,\varphi)]^2}\,]^2 \sin\theta d\theta d\varphi/(4\pi)$$
.

Определим формулу преобразования внешнего увеличивающегося радиуса

$$1/r(y,\theta,\varphi) = \begin{cases} \delta(y,R_0,a_{\max})/\eta(\theta,\varphi) + [1-\delta(y,R_0,a_{\max})]/a_{\max}, R_0 < y < a_{\max} \\ 1/y, y > a_{\max} \end{cases}$$

Где имеем $\delta(R,R_0,a) = \dfrac{R-a}{R_0-a}$. Формула преобразования для внутреннего уменьшающегося радиуса

$$r(y,\theta,\varphi) = \begin{cases} \delta(y,R_0,a_{\min})\eta(\theta,\varphi) + [1-\delta(y,R_0,a_{\min})]a_{\min}, R_0 > y > a_{\min} \\ y, y < a_{\min} \end{cases}$$

При этом $r(R_0,\theta,\varphi) = \eta(\theta,\varphi)$.

Определим формулу преобразования внешнего увеличивающегося радиуса в случае, если огибающая равна $h_+(\theta,\varphi)$

$$1/r(y,\theta,\varphi) = \begin{cases} \delta(y,R_0,a_{\max})/h_+(\theta,\varphi) + [1-\delta(y,R_0,a_{\max}]/a_{\max}, R_0 < y < a_{\max} \\ 1/y, y > a_{\max} \end{cases}$$

Формула преобразования для внутреннего уменьшающегося радиуса в случае, если огибающая равна $h_-(\theta,\varphi)$

$$r(y,\theta,\varphi) = \begin{cases} \delta(y,R_0,a_{\min})h_-(\theta,\varphi) + [1-\delta(y,R_0,a_{\min})]a_{\min}, R_0 > y > a_{\min} \\ y, y < a_{\min} \end{cases}$$

Имеем решаемое уравнение $r = r(y,\theta,\varphi), \dfrac{\partial r(y,\theta,\varphi)}{\partial R} = 0$. Причем второе уравнение выглядит таким образом $\delta'_R(y,R_0,a_{\max})[\dfrac{1}{h_+(\theta,\varphi)} - \dfrac{1}{a_{\max}}] = 0$. Т.е. уравнение для огибающей $h_+(\theta,\varphi) = a_{\max}$. Совершенно аналогично для внутренней части поверхности имеем $h_-(\theta,\varphi) = a_{\min}$.

Определим формулу внешнего радиуса огибающей $\mathrm{Re}\,w(R,\theta,\varphi)=a_{\max}$. Формула для внутреннего радиуса огибающей $\mathrm{Re}\,w(R,\theta,\varphi)=a_{\min}$.

Определим мнимую часть радиуса $\mathrm{Im}\,w(R,\theta,\varphi)$ в случае если имеется соотношение $\eta(\theta,\varphi)>r(R,\theta,\varphi)>a_{\min}$ по формуле

$$|\Re_{\min}(R,\theta,\varphi)|^2=r^2(R,\theta,\varphi)=a_{\min}^2+[\mathrm{Im}\,w(R,\theta,\varphi)]^2 .$$

Причем на границе тела $w(R_0,\theta,\varphi)=a_{\min}[1+i\sqrt{\eta^2(\theta,\varphi)/a_{\min}^2-1}]$

При этом комплексный радиус имеет значение

$$\begin{aligned}\Re_{\min}(R,\theta,\varphi)&=a_{\min}+i\,\mathrm{Im}\,w(R,\theta,\varphi)=\\&=a_{\min}[1+i\sqrt{r^2(R,\theta,\varphi)/a_{\min}^2-1}]\end{aligned}. \quad (2.3)$$

Определим мнимую часть радиуса $\mathrm{Im}\,w(y,\theta,\varphi)$ по формуле

$$\frac{1}{|\Re_{\max}(R,\theta,\varphi)|^2}=\frac{1}{r^2(R,\theta,\varphi)}=\frac{1}{a_{\max}^2}+\frac{1}{[\mathrm{Im}\,w(R,\theta,\varphi)]^2} .$$

В случае если имеется соотношение $\eta(\theta,\varphi)<r(R,\theta,\varphi)<a_{\max}$. Причем имеем определение комплексного радиуса тела

$$\frac{1}{\Re_{\max}(R,\theta,\varphi)}=\frac{1}{a_{\max}}+\frac{i}{\mathrm{Im}\,w(R,\theta,\varphi)}=\frac{1}{a_{\max}}(1+i\sqrt{\frac{a_{\max}^2}{r^2(R,\theta,\varphi)}-1}$$

Причем на границе

$$\begin{aligned}w(R_0,\theta,\varphi)&=\frac{a_{\max}}{1+i\sqrt{a_{\max}^2/\eta^2(\theta,\varphi)-1}}=\\&=\eta^2(\theta,\varphi)[1-i\sqrt{a_{\max}^2/\eta^2(\theta,\varphi)-1}]/a_{\max}\end{aligned}$$

При этом комплексный радиус определится по формуле

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Re_{\max}(R,\theta,\varphi)}&=\frac{1}{a_{\max}}[1+\frac{ia_{\max}}{\mathrm{Im}\,w(R,\theta,\varphi)}]=\\&=\frac{1}{a_{\max}}[1+i\frac{\sqrt{a_{\max}^2-r^2(R,\theta,\varphi)}}{r(R,\theta,\varphi)}]\end{aligned}. \quad (2.4)$$

Откуда получим $\Re_{\max}(R,\theta,\varphi)=r^2(R,\theta,\varphi)[1-i\sqrt{a_{\max}^2/r^2(R,\theta,\varphi)-1}]/a_{\max}$.

Причем на границе тела происходит скачок комплексного радиуса. При определении граничных условий во внешности тела и внутренней части тела надо использовать разный комплексный радиус. Общий радиус вводится по формуле

$$\Re(R,\theta,\varphi)=\sqrt{\Re_{\max}(R,\theta,\varphi)\Re_{\min}(R,\theta,\varphi)}=$$
$$=r(R,\theta,\varphi)\sqrt{\frac{a_{\min}}{a_{\max}}}\sqrt{[1-i\sqrt{a_{\max}^2/r^2(R,\theta,\varphi)-1}][1+i\sqrt{r^2(R,\theta,\varphi)/a_{\min}^2-1}]}$$

Причем имеем соотношение

$$|\Re(R,\theta,\varphi)|=\begin{cases}a_{\min}, R=a_{\min}\\ a_{\max}, R=a_{\max}\\ \eta(\theta,\varphi), R=R_0\end{cases}$$

Комплексная величина $\Re(R_0,\theta,\varphi)$ отражает уравнение комплексного радиуса тела.

Кроме среднего радиуса тела существует максимальный и минимальный радиус тела

$$\begin{gathered}\Re_{\max}(R_0,\theta,\varphi)=\eta^2(\theta,\varphi)[1-i\sqrt{a_{\max}^2/\eta^2(\theta,\varphi)-1}]/a_{\max}\\ \Re_{\min}(R_0,\theta,\varphi)=a_{\min}[1+i\sqrt{\eta^2(\theta,\varphi)/a_{\min}^2-1}]\end{gathered}.$$

При этом определится средний радиус тела

$$\Re^2(R_0,\theta,\varphi)=\eta^2(\theta,\varphi)\frac{a_{\min}}{a_{\max}}[1-i\sqrt{a_{\max}^2/\eta^2(\theta,\varphi)-1}][1+i\sqrt{\eta^2(\theta,\varphi)/a_{\min}^2-1}]=$$
$$=\exp[i(\arctan\sqrt{\eta^2(\theta,\varphi)/a_{\min}^2-1}-\arctan\sqrt{a_{\max}^2/\eta^2(\theta,\varphi)-1})]\eta^2(\theta,\varphi)$$

При этом средний, максимальный и минимальный комплексный радиус тела равен

$$R_{0c}^{3}(\theta_0,\varphi_0)=\frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Re^{3}(R_0,\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi(a_{\max}^{3}-a_{\min}^{3})/3}$$

$$R_{0\max}^{3}(\theta_0,\varphi_0)=\frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Re_{\max}^{3}(R_0,\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi(a_{\max}^{3}-a_{\min}^{3})/3} \quad (2.5)$$

$$R_{0\min}^{3}(\theta_0,\varphi_0)=\frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Re_{\min}^{3}(R_0,\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi(a_{\max}^{3}-a_{\min}^{3})/3}$$

Комплексный радиус тела зависит от его ориентации в пространстве.

Рассеянное поле вдали от сферы, равно

$$E_{\varphi}=-i\frac{\exp(ikr)}{kr}S_1(\theta)\sin\varphi \qquad E_{\theta}=i\frac{\exp(ikr)}{kr}S_2(\theta)\cos\varphi$$

$$S_1(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}[a_n\pi_n(\cos\theta)+b_n\tau_n(\cos\theta)]$$

$$S_2(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}[a_n\tau_n(\cos\theta)+b_n\pi_n(\cos\theta)].$$

$$\pi_n(\cos\theta)=\frac{P_1(\cos\theta)}{\sin\theta},\tau_n(\cos\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}P_1(\cos\theta)$$

Падающая волна имеет угол падения $\theta=0$. На высоких частотах при рассеянии на угол 2θ, необходимо выбрать точку на шаре с углом θ. В случае комплексного радиуса a ЭПР не будет равняться πa^2, а будет более сложная зависимость. Формула для сечения обратного рассеяния

$$\sigma_b=\frac{4\pi}{k^2}[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}[a_n\tau_n(\cos\theta)+b_n\pi_n(\cos\theta)]^2\cos^2\varphi+$$

$$+\frac{4\pi}{k^2}[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}[a_n\pi_n(\cos\theta)+b_n\tau_n(\cos\theta)]^2\sin^2\varphi=$$

$$=\frac{\pi}{k^2}|\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(-1)^n(a_n-b_n)|^2$$

$$a_n = \frac{\psi_n(\alpha)\psi_n'(\beta) - m\psi_n'(\alpha)\psi_n(\beta)}{\varsigma_n(\alpha)\psi_n'(\beta) - m\varsigma_n'(\alpha)\psi_n(\beta)}$$

$$b_n = \frac{m\psi_n(\alpha)\psi_n'(\beta) - \psi_n'(\alpha)\psi_n(\beta)}{m\varsigma_n(\alpha)\psi_n'(\beta) - \varsigma_n(\alpha)\psi_n(\beta)}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\pi x/2}J_{n+1/2}(x); \varsigma_n(x) = \sqrt{\pi x/2}H_{n+1/2}^{(1)}(x);$$

Асимптотика на высоких частотах для сечения рассеяния равна при большом коэффициенте диэлектрической проницаемости

$$\sigma_b(R_{0c},\theta,\varphi) = \frac{4\pi}{k^2}\{\sum_{n=1}^{|kR_{0c}|}\frac{2n+1}{n(n+1)}[-\sin(kR_{0c} - \frac{n+1}{2}\pi)\tau_n(\cos\theta) +$$

$$+\cos(kR_{0c} - \frac{n+1}{2}\pi)\pi_n(\cos\theta)]^2\cos^2\varphi + +[\sum_{n=1}^{|kR_{0c}|}\frac{2n+1}{n(n+1)}[-\sin(kR_{0c} - \frac{n+1}{2}\pi)\pi_n(\cos\theta) +$$

$$+\cos(kR_{0c} - \frac{n+1}{2}\pi)\tau_n(\cos\theta)]^2\sin^2\varphi\}/\exp(2ikR_{0c})$$

В случае сигнала обратного рассеяния эта величина равна

$$\sigma_b(R_{0c},\theta,\varphi) = \frac{4\pi}{k^2}[\sum_{n=1}^{|kR_{0c}|}(2n+1)(-1)^n[\frac{-\sin(kR_{0c} - \frac{n+1}{2}\pi) + \cos(kR_{0c} - \frac{n+1}{2}\pi)}{\exp(ikR_{0c})}]^2 =$$

$$= \frac{4\pi}{k^2}\{\sum_{n=1}^{|kR_{0c}|}(2n+1)(-1)^n[-\sin(\operatorname{Re}kR_{0c} - \frac{n+1}{2}\pi) + \cos(\operatorname{Re}kR_{0c} - \frac{n+1}{2}\pi)]\}^2 \times$$

$$\times\frac{(\cosh\operatorname{Im}kR_{0c} - i\sinh\operatorname{Im}kR_{0c})^2}{\sqrt{\cosh^2 2\operatorname{Im}kR_{0c} + \sinh^2\operatorname{Im}2kR_{0c}}}\exp[-2i\arctan(\tanh\operatorname{Im}kR_{0c}) =$$

$$= \pi|R_{0c}|^2\frac{1+2\sinh^2\operatorname{Im}kR_{0c}}{\sqrt{1+2\sinh^2\operatorname{Im}2kR_{0c}}}\exp[-4i\arctan(\tanh\operatorname{Im}kR_{0c})$$

Отметим, что действительная и мнимая часть комплексного радиуса тела зависят от его ориентации.

$$R_{0c}^3(\theta_0,\varphi_0) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Re^3(R_0,\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)\sin\theta d\theta d\varphi/4\pi$$

$$\Re^2(R_0,\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0) = \exp[i(\arctan\sqrt{\eta^2(\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)/a_{\min}^2 - 1} - .$$

$$-\arctan\sqrt{a_{\max}^2/\eta^2(\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0) - 1})]\eta^2(\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)$$

Изменим углы таким образом, чтобы они определяли сигнал обратного рассеяния. Определение комплексного радиуса тела останется неизменным, но углы имеют другое значение.

$$R_{0c}^3(\theta_0',\varphi_0') = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Re^3(R_0,\theta-\theta_0',\varphi-\varphi_0')\sin\theta d\theta d\varphi/4\pi$$

$$\Re^2(R_0,\theta-\theta_0',\varphi-\varphi_0') = \exp[i(\arctan\sqrt{\eta^2(\theta-\theta_0',\varphi-\varphi_0')/a_{\min}^2-1}- .$$
$$-\arctan\sqrt{a_{\max}^2/\eta^2(\theta-\theta_0',\varphi-\varphi_0')-1})]\eta^2(\theta-\theta_0',\varphi-\varphi_0')$$

Формула при этом будет соответствовать сигналу обратного рассеяния, но со смешенной зависимостью комплексного размера тела

$$\sigma_b(R_{0c},\theta_0',\varphi_0') = \pi\,|\,R_{0c}(\theta_0',\varphi_0')\,|^2\,\frac{1+2\sinh^2\operatorname{Im}kR_{0c}(\theta_0',\varphi_0')}{\sqrt{1+2\sinh^2\operatorname{Im}2kR_{0c}(\theta_0',\varphi_0')}}\times .$$
$$\times\exp\{-4i\arctan[\tanh\operatorname{Im}kR_{0c}(\theta_0',\varphi_0')]\};\theta_0'=\theta_0-\theta+\pi,\varphi_0'=\varphi_0-\varphi$$

Где угол θ_0 направление ориентации тела, угол θ соответствует точке зеркального отражения, φ_0 направление ориентации тела, угол φ соответствует точке зеркального отражения.

Записав точную формулу для рассеяния на сфере, и подставив в нее зависимость комплексного радиуса тела от положения в пространстве, получим комплексное значение отраженного сигнала в любой точке пространства вне переходной зоны. Но для этого для внутренности тела надо использовать другие коэффициенты в формуле для ЭПР. В одном эксперименте по комплексному радиусу тела определяется комплексный сигнал. Комплексный радиус тела считается по формуле

$$R_{0c}^3(\theta_0,\varphi_0) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \Re^3(R,\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)\sin\theta R^2 dR d\theta d\varphi/$$
$$/[4\pi(a_{\max}^3-a_{\min}^3)/3] = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \Re^3(R_0,\theta-\theta_0,\varphi-\varphi_0)\sin\theta d\theta d\varphi; .$$
$$\Re(R,\theta,\varphi) = \sqrt{\Re_{\max}(R,\theta,\varphi)\Re_{\min}(R,\theta,\varphi)} =$$
$$= r(R,\theta,\varphi)\sqrt{\frac{a_{\min}}{a_{\max}}}\sqrt{[1-i\sqrt{a_{\max}^2/r^2(R,\theta,\varphi)-1}][1+i\sqrt{r^2(R,\theta,\varphi)/a_{\min}^2-1}]}$$

Определятся из нелинейного уравнения и значения максимального и минимального радиуса переходной зоны. Для этого надо приравнять радиус переходной зоны, вычисленный двумя разными способами, с помощью среднего радиуса тела и с помощью усреднения по переходной зоне. Комплексный радиус содержит два действительных числа, откуда определятся действительные максимальный и минимальный радиус переходной зоны.

Комплексный радиус тела определяет два числа. Два числа определяют и компоненту вектора рассеянного поля для данного эксперимента по определению рассеянного поля в определенной точке, при векторе падающей волны. Переходная зона играет роль шероховатости, где формируется рассеянная электромагнитная волна, причем весь объем переходной зоны описывается одним комплексным радиусом, зависящим от ориентации тела. Причем значение поля в переходной зоне надо пересчитывать по формуле

$$E_l = E_l(z_1, z_2, z_3) = E_l[z_1(y_1, y_2, y_3), z_2(y_1, y_2, y_3), z_3(y_1, y_2, y_3)].$$

Где (y_1, y_2, y_3) декартовы координаты тела, (z_1, z_2, z_3), координаты, в которых поверхность тела имеет форму сферы.

Отмечу, что введение комплексного радиуса тела вещь необходимая, ведь по одной компоненте падающей волны, состоящей из комплексного числа, определяется одна компонента рассеянной волны, которая тоже комплексная. Поэтому и радиус сферы должен быть комплексный.

Аналогичное описание имеется в гидродинамике, при движении тела в жидкости. Вне переходной зоны скорость жидкости определяется как в случае сферы с комплексным радиусом. Внутри переходной зоны скорость надо пересчитывать, из декартовой системы координат, в которой тело имеет форму сферы в декартову систему координат, где тело имеет произвольную форму.

Имеется ламинарное решение для движения сферы в жидкости при малом числе Рейнольдса. Оно определяет следующее распределение скорости см. [1]

$$V_r = u\cos\theta(1-\frac{3a}{2r}+\frac{a^3}{2r^3})$$
$$V_\theta = -u\sin\theta(1-\frac{3a}{4r}-\frac{a^3}{4r^3}) \qquad (2.6)$$

При течении для произвольного тела, вне переходной зоны имеем течение, как для комплексной сферы. Казалось должна наступить комплексная скорость и турбулентный режим. Но течение остается ламинарным, так как радиус становится комплексным, с фазой $\arg r = \arg a$ и скорость остается действительной. Только в случае комплексного коэффициента u образуется комплексная скорость и турбулентный режим.

Из рассмотрения решения для сферы, следует решение для произвольного тела. Для этого достаточно ввести комплексный радиус и скорость вне переходной зоны описывается как при рассеянии на сфере с использованием формул (2.6). Внутри переходной зоны решение надо получить как для сферы, но аргументы надо пересчитывать, для чего надо определять неизвестную матрицу.

Литература

1. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц* Гидродинамика. -М.: Наука, 1980. -535с.