Скачки решения системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

Якубовский Е.Г.
e-mail yakubovski@rambler.ru

Знание первых интегралов упрощает решение дифференциальных уравнений. Но существенна также информация об их количестве. В статье доказывается, что у неавтономной, нелинейной системы дифференциальных уравнений с производной первого порядка, количество первых интегралов совпадает с количеством дифференциальных уравнений в случае существования локального решения в каждой точке изменения аргумента. В случае невыполнения теоремы существования и единственности задачи Коши для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, наблюдается скачок решения.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (система обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенная относительно старшей производной, приводится к такому виду)

$$\frac{dx_l}{dt} = F_l(t, x_1, ..., x_N); l = 1, ..., N$$

Запишем решение дифференциального уравнения

$$x_l = x_l(t, x_1^0, ..., x_N^0), l = 1, ..., N . \qquad (1)$$

Существует теорема, что локальное решение задачи Коши существует и единственно при выполнении определенных условий. На следующем шаге получается другое решение задачи Коши с другими начальными условиями. Глобальное решение задачи Коши имеет вид

$$x_l = x_l[t, x_1^0(t_0), ..., x_N^0(t_0)], l = 1, ..., N . \qquad (2)$$

Покажем, что начальные условия задачи Коши неизменны при определенных условиях. Продифференцируем (1) по времени вдоль кривой решения, получим

$$\frac{\partial x_l}{\partial t}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial x_l}{\partial x_k^0}\frac{dx_k^0}{dt_0}\frac{dt_0}{dt}=\frac{dx_l}{dt}$$

При этом частная производная по времени, соответствующая локальному решению, и производная вдоль решения сокращается. Обе производные равны правой части дифференциального уравнения. Для локальных решений величина $dt_0=dt$. Если выполняется условие $|\frac{\partial x_l}{\partial x_k^0}|\neq 0$, то получится, что начальные условия не меняются

$$\frac{dx_k^0}{dt}=0.$$

Т.е. начальные условия в глобальном решении (2) в процессе решения не меняются. Значит, из представления решения в виде (1), и не равенстве нулю определителя системы, следует существование обратной функции при произвольном аргументе t при неизменных начальных условиях $x_l^0, l=1,...,N$. Причем для существования глобального решения, необходимо, чтобы определитель $|\frac{\partial x_l}{\partial x_k^0}|\neq 0$ не равнялся нулю.

Имея N первых интегралов, зависящих от времени, время можно исключить, при неравенстве нулю первой производной по времени от одного из первых интегралов, и получим $N-1$ первый интеграл, не зависящий от времени, но зависящий от двух констант, одной общей для всех интегралов, а второй разной у разных интегралов. Всего в $N-1$ первом интеграле, не зависящем от времени будет участвовать N констант.

В случае если определитель Якоби равен нулю в момент времени $t=t_0$, имеем

$$\sum_{p=1}^{N-1} B_{lp}\frac{dx_p^0}{dt}=-B_{lN}\frac{dx_N^0}{dt}=C_l,;=1,...,N-1. \qquad (3)$$

Где величина C_l произвольная константа. Где величина B_{lp} действительная матрица, с не обращающимся в ноль определителем. И значит, наблюдается скачок начальных условий

$$\sum_{l=1}^{N-1} B_{pl}^{-1} C_l = \frac{dx_p}{dt} = F(t_0, x_1^0, ..., x_N^0), p = 1, ..., N-1. \qquad (4)$$

Из условий (3),(4) можно определить $x_l^0, l = 1, ..., N$. Может образоваться несколько значений начальных условий для которых выполняется условие равенство нулю определителя Якоби. Причем все они удовлетворяют условию (3), (4).

Рассмотрим пример решения дифференциального уравнения с матрицей $\frac{\partial x_l}{\partial x_k^0}$, определитель которой равен нулю. Дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{1-x^2}.$$

Это дифференциальное уравнение имеет решение $x(t) = \sin[t - t_0 + \arcsin x_0(t_0)]$. Продифференцируем решение по величине аргумента вдоль решения, получим

$$\cos(t - t_0 + \arcsin x_0) + \frac{\cos(t - t_0 + \arcsin x_0)}{\sqrt{1-x_0^2}} \frac{dx_0}{dt} = \sqrt{1-x^2}.$$

Получается, что при условии $\cos(t - t_0 + \arcsin x_0) = \sqrt{1-x^2}$ имеем соотношение $\frac{dx_0}{dt} = c = \sqrt{1-x_0^2}$, где c произвольная константа, в моменты времени $t_k = t_0 - \arcsin x_0 - 2\pi k \mp \pi/2$. В эти моменты времени начальное условие произвольно. При этом решение тоже испытает скачок. Этот скачок соответствует значению $x = \pm 1$, где производная от правой части дифференциального уравнения стремится к бесконечности, т.е. нарушаются условия единственности и существования решения задачи Коши. Это нарушение условия единственности и приводит к скачку решения на ± 1.

Уравнение $\frac{dx}{dt} = \sqrt{1-x^2}$ не разрешается однозначно относительно x при условии $x = \pm 1$ в силу бесконечности производной по x. При этом происходит мгновенный переход от одного решения ± 1, до точки ветвления 0, и переход на другое решение ∓ 1. С бесконечной скоростью изменения $\sqrt{1-x^2}$ при условии ± 1 этот процесс возможен. Средняя геометрическая скорости перехода равна бесконечности в случае, если в точке особенности выполняется $1 - x^2 = O(\alpha)^n, n > 2$, а в точке ветвления $x = O(\alpha)$, так как в особенности надо уменьшать шаг для одинаковой точности вычисления производной от $\sqrt{1-x^2}$.

Но при этом необходимо расширить понятие решения обыкновенных дифференциальных уравнений на произвольные скачки решения.

Отметим, что это свойство нелинейных уравнений, в случае линейной системы уравнений

$$\frac{dx_l}{dt} = \sum_{k=1}^{N} A_{lk} x_k$$

Решение запишется в виде $x_l = \sum_{k,p=1}^{N} g_{lk} \exp[\lambda_k (t - t_0)] g_{kp}^{-1} x_p^0$. Матрица Якоби равна $\sum_{k=1}^{N} g_{lk} \exp[\lambda_k (t - t_0)] g_{kp}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{(t - t_0)^n}{n!} = \exp[A(t - t_0)]$ и ее определитель, равный величине $\exp[\sum_{k=1}^{N} \lambda_k (t - t_0)]$ не равен нулю.

Отметим, что данное скачкообразное решение нелинейных уравнений можно использовать для скачков в пространстве. В квантовой механике такие скачки описываются как изменение волновой функции, и образование другой частицы на расстоянии. Покажем, что уравнение квантовой механики нелинейное и, следовательно, для него возможны скачки объектов.

Уравнение Шредингера сводится к нелинейному уравнению Навье – Стокса. Докажем это. Для чего запишем уравнение Шредингера и преобразуем его воспользовавшись тождеством $\frac{\partial^2\psi}{\partial x_l^2}=\psi[\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2}+\frac{1}{\psi^2}(\frac{\partial\psi}{\partial x_l})^2]$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_l^2}+U\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\psi\sum_{l=1}^{3}[\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x_l^2}+\frac{1}{\psi^2}(\frac{\partial\psi}{\partial x_l})^2]+U\psi\,.$$

Разделив на массу $m\psi$, получим уравнение

$$i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial\ln\psi}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m^2}\sum_{l=1}^{3}(\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_l})^2=-\frac{\hbar^2}{2m^2}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x_l^2}+U/m\,.$$

Получим уравнение в частных производных, взяв градиент от обеих частей уравнения, введем действительную скорость по формуле $\mathbf{V}=-i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi$.

$$\frac{\partial i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{m^2}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_l}\frac{\partial\nabla\ln\psi}{\partial x_l}=\frac{i\hbar}{2m}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2 i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi}{\partial x_l^2}+\nabla U/m$$

Подставляя значение скорости в преобразованное уравнение Шредингера, получим

$$\frac{\partial V_p}{\partial t}+\sum_{l=1}^{3}V_l\frac{\partial V_p}{\partial x_l}=v\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2 V_p}{\partial x_l^2}-\frac{\partial U}{\partial x^p}/m, v=\frac{i\hbar}{2m}.$$

Получим трехмерное уравнение Навье – Стокса с давлением, соответствующим потенциалу.

Скачки в решении возможны в случае нелинейных уравнений, в частности для решения уравнения Шредингера, которое сводится к нелинейному уравнению Навье – Стокса. Причем эти скачки соответствуют перемещению в пространстве частиц. Для перемещения сложного тела могут возникнуть проблемы, сложное тело может разорваться, если перемещения будут не параллельны. Количество точек, в которые может переместиться объект, соответствует числу ветвей решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.