Формула для энергии звуковых квазичастиц

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Аннотация

Вычислены из релятивистского определения импульса звуковой волны эффективная масса частицы, координата минимума энергии квазичастицы, и значение минимума энергии. Полученные данные совпали с экспериментальными. Т.е. проверено свойство квазичастиц звуковой волны подчиняться преобразованию Лоренца со звуковой скоростью, вместо преобразования Лоренца со скоростью света. Показано, что квазичастиц имеется счетное количество с уменьшающейся эффективной массой и переходящих в непрерывный спектр при квантовом числе, стремящемся к бесконечности. Определены свойства фонона при нулевой температуре, как предела свойств квазичастиц при квантовом числе, стремящемся к нулю. Приведена формула, показывающая, что мнимая вязкость Бозе - конденсата стремится к нулю. Вычислена температура начала Бозе – конденсации.

Формула для энергии квазичастиц и их свойства

Объясним существование ротонов при низкой температуре. Энергия Бозе – или ферми системы равна

$$E = \frac{\varepsilon}{\exp(\varepsilon / T) \mp 1}.$$

Покажем, что при низких температурах эта функция имеет минимум. $\frac{dE}{d\varepsilon} = \frac{1}{\exp(\varepsilon / T) \mp 1}[1 - \frac{\varepsilon / T}{\exp(\varepsilon / T) \mp 1}] = 0$. При высоких температурах эта функция не имеет корней. Но при низких температурах имеем уравнение $x = \exp(x) \pm 1$ и имеется комплексный корень $x + 2\pi in = \exp x \mp 1$, который вычисляется по рекуррентной схеме $x_{n+1} = \ln(\pm 1 + 2\pi in + x_n)$. Так как комплексная энергия имеет смысл только при квантовых эффектах, этот корень существует только при низких температурах. Причем имеется счетное количество корней $\frac{\varepsilon_n}{T} \cong \ln(1+4\pi^2 n^2)/2 + i\arg(\pm 1 + 2\pi i n)$.

Энергия системы считается с учетом релятивистских эффектов для звуковой волны $\varepsilon_n = \frac{m_p c_s^2}{\sqrt{1-V_n^2/c_s^2}}$. Где величина $c_s$ скорость звука, $V_n$ скорость квазичастицы в звуковой волне. Величина $m_p$ масса протона. При этом относительно скорости квазичастицы имеем уравнение $x_n = \frac{\gamma}{\sqrt{1-V_n^2/c_s^2}} = \ln(\pm 1 + x_n + 2\pi i n); \frac{\varepsilon_n}{\gamma T} = \frac{x_n}{\gamma} = y_n, \gamma = \frac{c_p}{c_V}$. Причем для скорости квазичастицы в звуковой волне имеем соотношение $\frac{V_n^2}{c_s^2} = 1 - \frac{\gamma^2}{\ln(\pm 1 + x_n + 2\pi i n)^2} = 1 - \frac{1}{y_n^2}$.

Эффективная масса в жидкости для бозонов по формуле

$$(\frac{1}{m^*})_{pq} = \frac{\partial^2}{\hbar^2 \partial k_p \partial k_q} \varepsilon(\hbar \mathbf{k}).$$

Где величина $\varepsilon(\hbar\mathbf{k})$ энергия системы. В релятивистском приближении собственное значение эффективной массы считается по формуле

$$(\frac{1}{m^*})_{pq} = \frac{\partial^2}{m^2 \partial V_p \partial V_q} \frac{mc_s^2}{\sqrt{1-V^2/c_s^2}} = \frac{\partial}{\partial V_q} \frac{V_p}{m(1-V^2/c_s^2)^{3/2}} =$$
$$= \frac{1}{m}[\frac{\delta_{pq}}{(1-V^2/c_s^2)^{3/2}} + \frac{3V_p V_q}{c_s^2(1-V^2/c_s^2)^{5/2}}] = \frac{\alpha_{pq}}{m}.$$

Т.е. эффективная масса для бозонов равна

$$m_n^* = \frac{m}{3y_n^5 - 2y_n^3}$$

Эффективная масса в жидкости для фермионов надо считать по формуле

$$m^*{}_{pq} = \frac{m^3 \partial^2}{\hbar^2 \partial k_p \partial k_q} \varepsilon(\hbar\mathbf{k}) = \frac{m \partial^2}{\partial V_p \partial V_q} \varepsilon(\hbar\mathbf{k}).$$

Где величина $\varepsilon(\hbar\mathbf{k})$ энергия системы. В релятивистском приближении собственное значение эффективной массы считается по формуле

$$m_{pq}^{*} = \frac{\partial^2}{\partial V_p \partial V_q} \frac{mc_s^2}{\sqrt{1 - V^2 / c_s^2}} = \frac{\partial}{\partial V_q} \frac{mV_p}{(1 - V^2 / c_s^2)^{3/2}} =$$
$$= m[\frac{\delta_{pq}}{(1 - V^2 / c_s^2)^{3/2}} + \frac{3V_p V_q}{c_s^2 (1 - V^2 / c_s^2)^{5/2}}] = \alpha_{pq} m .$$

Т.е. эффективная масса равна

$$m_n^* = m(3y_n^5 - 2y_n^3)$$

Где $x_n = \ln(\pm 1 + x_n + 2\pi i n)$. Была составлена по этому алгоритму на алгоритмическом языке Mathcad программа вычисления параметров квазичастицы - ротона. Вычисления по этой формуле определяют значение эффективной массы для бозонов при условии $n = 1$

$$m_1^* = \begin{cases} (-0.058 + i \cdot 0.015)m = 0.06m, \gamma = 1.66 \\ (-0.156 + 0.014i)m = 0.157m; \gamma = 2 \\ (-0.881 + 0.506i)m = 1.016m, \gamma = 3 \end{cases}$$

при условии $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = 2, m^* = 0.157m$. Получается, что ротон имеет две степени свободы. В связи с существованием направления распространения звуковой волны имеется две степени свободы. Первая с продольными колебаниями вдоль направления распространения, и вторая с вращением в плоскости, перпендикулярной направлению распространений.

Вычисления по этой формуле определяют значение эффективной массы для фермионов при условии $n = 0$

$$m_1^* = \begin{cases} (-0.122 + i \cdot 0.024)m = 0.124m, \gamma = 1.66 \\ (0.262 + 0.058i)m = 0.268m; \gamma = 2 \\ (1.243 + 0.456i)m = 1.324m, \gamma = 3 \end{cases}$$

при условии $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = 2, m^* = 0.268m$.

Вычислим координату минимума энергии протона для бозонов $\frac{p_0}{\hbar}=(1-\frac{1}{y^2})^{0.5}\frac{4m_p c_s y}{\hbar}=1.655\cdot 10^8+6.505i\cdot 10^7=1.779\cdot 10^8 cm^{-1}$, величина скорости звука взята из эксперимента $c_s=2.4\cdot 10^4 cm/s$ при нулевом давлении. При приведенном в [1] значении эмпирического импульса $\frac{p_0}{\hbar}=1.9\cdot 10^8 cm^{-1}$.

Значение энергии в точке минимума определяется по формуле $k\Delta = m_p c_s^2 y$. Температура, вычисленная по этой формуле $\Delta = 8.27°K$ при эмпирической температуре $\Delta = 8.7°K$. Т.е. температура звуковых колебаний определяется колебанием одного протона, а не молекулы гелия как единого целого. В отличие от импульса, в котором участвуют все протоны.

| n | $m^*/m$ | $p_0/\hbar\cdot 10^{-8}, cm^{-1}$ | $\Delta°K$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.159 | 1.779 | 8.27 |
| 2 | 0.054 | 2.118 | 10.2 |
| 3 | 0.031 | 2.37 | 11.46 |
| 4 | 0.021 | 2.57 | 12.35 |
| 5 | 0.016 | 2.73 | 13.05 |
| 6 | 0.013 | 2.86 | 13.6 |
| 50 | 0.0015 | 4.5 | 20.5 |
| 100 | 0.00088 | 5.04 | 22.8 |

Как мы видим наряду с ротоном существует множество квазичастиц с меньшей приведенной массой, с большим значение минимума энергии, с большим импульсом. Звуковые волны характеризуются большим спектром квазичастиц с уменьшающимся расстоянием между свойствами квазичастиц и переходящими в непрерывный спектр. Но фонон этим спектром не описывается. Он описывается предельным переходом к величине $n \to 0$. При этом импульс фонона равен $p_0/\hbar = 1.586\cdot 10^8 cm^{-1}$, эффективная масса $m^*$

стремится к бесконечности, а минимум энергии $\Delta$ стремится к нулю. Энергия в точке минимума у фонона описывается формулой $\varepsilon = \Delta + \frac{(p-p_0)^2}{2m^*}$, т.е. стремится к нулю, имея конечный импульс.

Кинематическая вязкость системы в случае участия фононов равна $\nu = i\frac{\hbar}{2m^*} \to 0$, т.е. стремится к нулю.

Вычислим координату минимума энергии протона для основного состояния фермиона

$$\frac{p_0}{\hbar} = (1-\frac{1}{y^2})^{0.5}\frac{m_e c_s y}{\hbar} = 4.52\cdot 10^4 + 3.13i\cdot 10^3 = 4.53\cdot 10^4 cm^{-1}.$$

Значение энергии в точке минимума $k\Delta = m_e c_s^2 y$ определяется по формуле. Температура, вычисленная по этой формуле $\Delta = 7.091\cdot 10^{-3\circ}K$.

Наступление сверхтекучести связано с понижением температуры и, следовательно, энергия квазичастиц меньше квантовой энергии $E_n + kT = -\frac{mc^2 Z^2\alpha^2}{2n^2}[1+\frac{(Z\alpha)^2}{n}(\frac{1}{j+1}-\frac{3}{4n})] + kT = 0$ для данного вещества. Тогда релятивистская часть энергии, связанная со спин-орбитальным взаимодействием, определяет температуру перехода в сверхтекучее состояние

$$T_\lambda = \frac{4.36\cdot 10^{-11} Z^2 (Z\alpha)^2}{1.38\cdot 10^{-16} 2n^3}(\frac{1}{j+1/2}-\frac{3}{4n}) = 2.08^\circ K, Z=2, n=3, L=0, S=1, j=1.$$

Это эмпирическое значение температуры равно $T_\lambda = 2.19^\circ K$. При этом не релятивистская величина температуры равна $T = 70200^\circ K$.

Переход к низким температурам вызывает свободное состояние идеальных частиц, и начала явления сверхтекучести, свойство которым обладают идеальные частицы см. [2].

При этом внутренняя энергия системы равна

$$E_n = \frac{\varepsilon_n}{\exp(\varepsilon_n/T)\mp 1}, \varepsilon_n = \frac{m_p c_s^2}{\sqrt{1-V_n^2/c_s^2}} = m_p c_s^2 x_n/\gamma.$$

Где величина $\varepsilon_n$ комплексная и определяется из уравнения $x_n = \ln(\pm 1 + x_n + 2\pi i n); \frac{x_n}{\gamma} = \frac{\varepsilon_n}{\gamma T} = y_n ; \gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{l+2}{l}$, где величина $l$ количество степеней свободы у квазичастицы. Величина $y_n = \frac{1}{\sqrt{1 - V_n^2 / c_s^2}}$. Энергия $\varepsilon_n$ определяется из условия экстремума энергии частицы, т.е. $\frac{dE_n}{d(\varepsilon / T)} = 0$ и определяет энергию квазичастицы. При условии $T \to 0$ величина $\gamma \to 1$, т.е. количество степеней свободы стремится к бесконечности $l \to \infty$. Фонон соответствует значению $n \to 0$. При этом имеем уравнение $\exp(x_n) = 1 + x_n + 2\pi i n$ откуда имеем $x_n = \lim_{n \to 0} \sqrt{2\pi i n}$. Значит эффективная масса фонона равна $m^* = \frac{m}{-2(2\pi i n)^{3/2}} = \frac{m \exp(i\pi / 4)}{2(2\pi n)^{3/2}} \to \infty, n \to 0$. Импульс равен $\frac{p_0}{\hbar} = (1 - \frac{1}{x^2})^{0.5} \frac{4 m_p c_s x}{\hbar} = \frac{4 i m_p c_s}{\hbar}$ и значение энергии в точке экстремума $k\Delta = m_p c_s^2 x = m_p c_s^2 \sqrt{2\pi i n} \to 0$. При этом величина $\frac{\varepsilon_0}{\exp(\varepsilon_0 / T) - 1} = T$.

В случае фермионов энергия, соответствующая нулевому квантовому числу, не стремится к нулю отношение $x_0 = \frac{\varepsilon_0}{T} = 0.605 + 1.788i$ при условии $T \to 0$, т.е. $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = 1$, эффективная масса не стремится к бесконечности $m^* = (0.012 + 4.59 \cdot 10^{-4} i) m$. При этом мнимая вязкость не равна нулю $\nu = \frac{\hbar}{m^*} \neq 0$. Импульс равен $\frac{p_0}{\hbar} = (1 - \frac{1}{x^2})^{0.5} \frac{m_e c_s x}{\hbar} = (4.52 \cdot 10^4 + 3.13 \cdot 10^3 i) = 4.53 \cdot 10^4 cm^{-1}$ и значение энергии в точке экстремума $k\Delta = m_e c_s^2 x_0$ равно $\Delta = 7.09 \cdot 10^{-3} {}^\circ K$ при условии $c_s = 2.4 \cdot 10^4 cm/s$.

Но как же описать сверхтекучесть ферми жидкости. Энергия основного состояния у ферми жидкости не нулевая, и основное состояние не проявляет сверхтекучие свойства. Надо учесть, что образуются куперовские пары, подчиняющиеся статистики бозонов. При этом образуются частиц по схеме $x_n = \ln(-1 + \operatorname{Re} x_n - 2\pi i n)$, но энергию ферми частиц надо определять по формуле $\dfrac{(\varepsilon_n + \varepsilon_n^*)/2}{\exp(\varepsilon_n / T) + 1}$. При этом $x_0 = i\pi$ и собственная энергия нулевого состояния куперовской пары нулевая, и она не участвует в формировании свойств сверхтекучести.

Условие сверхтекучести $V < \varepsilon / p$ см. [1] §23. Подставляя значение этих величин, получим условии сверхтекучести $c_s \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} < \dfrac{c_s}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}}$, т.е. условие

$\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}} - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} > 0$. В случае бозонов получилось, что действительная часть основного состояния не удовлетворяет условию сверхтекучести, но имеет нулевую энергию, т.е. не участвует в определении свойств жидкости. Остальные состояния Бозе жидкости удовлетворяют условию сверхтекучести и жидкость проявляет сверхтекучие свойства, имея нормальную фазу, связанную с нулевой собственной энергией. В случае фермионов при квантовом числе $n = 0$ состояние имеет конечную энергию, и не проявляет сверхтекучие свойства. Значит, несмотря на то, что остальные состояния проявляют сверхтекучие свойства, жидкость не переходит в сверхтекучее состояние, так как имеются у основного состояния возмущения, вызывающие трение жидкости о стенки сосуда. В случае образования пары электронов, энергия основного состояния равна нулю, оно не участвует в определении свойств вещества и жидкость является сверхтекучей.

При этом можно определить термодинамические функции

$$Q=\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-\varepsilon_n/T);\varepsilon_n=m_p c_s^2 x_n/\gamma,$$

$$\varepsilon_n=\frac{m_p c_s^2}{\sqrt{1-V_n^2/c_s^2}};\varepsilon_n=m_p c_s^2 y_n/\gamma;\alpha=m_p c_s^2/\gamma T>>1$$

$$Q(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-\alpha x_n)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\exp\{-[i\alpha\arg(\pm 1+2\pi i n)+\alpha\ln(1+4\pi^2 n^2)^{1/2}]=\int_0^{\infty}\frac{\exp(\pm i\alpha\arctan y)dy}{2\pi(1+y^2)^{\alpha/2}};$$

$$x_n=\frac{\varepsilon_n}{T}\cong\ln(1+4\pi^2 n^2)/2+i\arg(\pm 1+2\pi i n);y=2\pi n$$

Причем этот интеграл сходится при условии $\alpha\ge 2;T<m_p c_s^2/(2\gamma)=1836\cdot 0.5\cdot 0.9\cdot 10^{-27+8+16}2.4^2 3/(1.38\cdot 2\cdot 5)=1.53°K;\gamma=5/3$, при эмпирическом значении температуру перехода в сверхпроводящее состояние $T_\lambda=2.19°K$. Но интеграл должен описывать сверхтекучее состояние. При $\alpha>1$ этот интеграл сходится, т.е. имеем условие сходимости интеграла $T<m_p c_s^2/\gamma=2.06°K$. Не совпадение значения температуры перехода в сверхтекучее состояние, следует отнести к не точно заданному отношению теплоемкостей, при $\gamma=5.5/3.5$ получается температура перехода в сверхтекучее состояние $T_\lambda=2.19°K$.

$$Q(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{\exp(\pm\alpha i\arctan y)dy}{2\pi(1+y^2)^{\alpha/2}}=\int_0^{\infty}\frac{\exp(\pm\alpha i\arctan y)d\arctan y}{2\pi(1+y^2)^{\alpha/2-1}}=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\exp(\pm\alpha iz)dz}{2\pi(1+\tan^2 z)^{\alpha/2-1}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{\alpha-2}z\exp(\pm\alpha iz)dz}{2\pi}$$

$$Q(2)=\frac{\exp(\pm 2i\arctan y)}{\pm 4i\pi}\Big|_0^{\infty}=\frac{\mp 1}{2i\pi};$$

Этот интеграл при условии $\alpha>1$ имеет интегрируемую особенность $\cos^{\alpha-2}z$. Точек перевала у этого уравнения нет и при большом значении $\alpha$ он равен

$$Q(\alpha) = -\frac{y \pm i}{2\pi\alpha}\frac{\exp(\pm i\alpha \arctan y)}{(1+y^2)^{\alpha/2}}|_0^\infty = \frac{\mp i}{2\pi\alpha} = \frac{\mp i\gamma T}{2\pi m_p c_s^2}$$

Формулы для значения интеграла разные, при большом и малом значении $\alpha$, так как при большом $\alpha$ вклад от бесконечно удаленной точки нулевой.

Внутренняя энергия тела считается по формуле

$$<\varepsilon>= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n \exp(-\varepsilon_n / T) / Q(\alpha) = \frac{m_p c_s^2}{2\pi\gamma}\int_0^\infty y\frac{\exp(\pm i\alpha \arctan y)dy}{2\pi(1+y^2)^{\alpha/2}} / Q(\alpha) \approx$$

$$\approx -\frac{m_p c_s^2 \exp[\pm i\alpha\beta(\alpha)]}{8\pi^2\gamma(1-\alpha/2)Q(\alpha)} = \frac{m_p c_s^2 \exp[-\frac{m_p c_s^2}{\gamma T}\operatorname{Im}\beta(\frac{m_p c_s^2}{\gamma T}) \pm i\frac{m_p c_s^2}{\gamma T}\operatorname{Re}\beta(\frac{m_p c_s^2}{\gamma T})]}{8\pi^2\gamma(m_p c_s^2 / 2\gamma T - 1)Q(\alpha)} =$$

$$= \frac{\mp i m_p c_s^2 \exp[-\frac{m_p c_s^2}{\gamma T}\operatorname{Im}\beta(\frac{m_p c_s^2}{\gamma T}) \pm i\frac{m_p c_s^2}{\gamma T}\operatorname{Re}\beta(\frac{m_p c_s^2}{\gamma T})]}{2\pi\gamma} + O(\frac{\gamma T}{m_p c_s^2})^2;$$

$$\varepsilon_n = \frac{m_p c_s^2 x_n}{\gamma}$$

При температуре, стремящейся к нулю, внутренняя энергия частиц стремится к нулю. Отмечу, что в формулах не фигурирует постоянная Планка, так как данный эффект можно описать классическими формулами. Постоянная Планка возникает при суммировании распределений, когда мы заменяем сумму интегрированием по импульсам с весовой функцией, равной третьей степени постоянной Планка. Если использовать непосредственное суммирование, то постоянная Планка не нужна.

Литература


1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теоретическая физика т. IX, Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статическая физика, часть II, Теория конденсированного состояния М.: Наука, 1978, 448 стр.
2. Якубовский Е.Г. Частицы вакуума, обладающие свойствами сверхтекучей фазы явления сверхтекучести «Энциклопедический фонд России», 2016, 4 стр. http://www.russika.ru/userfiles/390_1480960694.pdf