Описание детонационных процессов в газообразных средах с помощью решения уравнений гидродинамики

Е.Г. Якубовский.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Существуют ламинарные решения в круглом трубопроводе как в случае решения уравнения Навье – Стокса, так и в случае энергетического уравнения, связанные со значением радиуса трубопровода. Считая радиус, зависящим от продольной координаты трубопровода, введем среднеквадратичный тангенс наклона шероховатости трубопровода. При этом решение становится комплексным в турбулентном режиме, и мнимая часть решения описывает турбулентные пульсации температуры и концентрации среды. Причем начало комплексного решения – температуры, соответствует кратному корню нелинейного уравнения по определению температуры. При этом выполняется условие равновесия системы и равенство нулю производной по температуре, так как в начале комплексного решения значение температуры кратное, и становится комплексным. При этом действительное решение прерывается, оно стремится к бесконечности, но имеется комплексное решение, которое описывает взрыв горючего вещества. Комплексное решение описывает пульсирующий режим взрыва при асимптотически постоянной комплексной температуре. Его мнимая часть описывает пульсации, как температурные, так и концентрационные. Необходимость комплексного турбулентного решения нелинейных уравнений в частных производных описано в [1]. Особенности решения этих уравнений описаны в [2],[3].

Существует три гидродинамических уравнения, описывающие детонацию в газах, это уравнение Навье – Стокса, энергетическое уравнение и диффузионное уравнение. Для простоты изложения диффузионное уравнение рассматривать не будем. При этом получено комплексное решение уравнения Навье – Стокса и энергетического уравнения, мнимая часть которого описывает пульсирующий режим. В результате решения получилась комплексная, начальная координата положения фронта детонационной волны. Действительная часть этой координаты соответствует средней координате положения фронта, а мнимая часть соответствует среднеквадратичному отклонению координаты фронта, т.е. ширине зоны химических реакций.

1. Физический смысл комплексного решения

Пульсирующие координаты складываются по закону (причем не только пульсирующие координаты, но и пульсирующее давление и температура) $<[\Delta x_l]^2>=<[x_l-<x_l>]^2>=<x_l^2>-2<x_l><x_l>+<x_l>^2=<x_l^2>-<x_l>^2$.

Значит имеем

$$<x_l^2>=<x_l>^2+<[\Delta x_l]^2>=|<x_l>+i\sqrt{<[\Delta x_l]^2>}|^2$$

Приведу формулировку обратной теоремы Пифагора. Для всякой тройки положительных чисел a,b и c, такой, что $a^2+b^2=c^2$, существует прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. Значит, математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение образуют катеты, а гипотенузой является корень из среднего квадрата величины. Т.е величина среднего $<x_l>$ ортогональна среднеквадратическому отклонению $\sqrt{<[\Delta x_l]^2>}$, которое образует мнимую часть координаты тела. Таким образом, полученное в результате усреднения во времени декартово пространство с колебательной скоростью высокой частоты (период колебания меньше времени измерения) становится комплексным пространством. Т.е. в случае большой дисперсии величины действительного пространства, его нужно рассматривать как комплексное трехмерное пространство, где мнимая часть соответствует среднеквадратическому отклонению. При этом имеется следующая связь между переменными $\sqrt{<x_l^2>}=(<x_l>+i\sqrt{<[\Delta x_l]^2>})\alpha, |\alpha|=1$, причем комплексное число α выбирается из условия, чтобы мнимая часть имела положительное или отрицательное значение. Этому удовлетворяет среднеквадратичное отклонение.

Но иногда среднеквадратичное отклонение положительно, например, в случае диэлектрической проницаемости, где вмешиваются положительные и отрицательные заряды. Тогда имеем формулу $\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{4\pi i \sigma}{\omega}$, где действительная часть пропорциональна положительному среднеквадратичному отклонению диполя, а проводимость пропорциональна среднему значению. Но зато проводимость делится на частоту, которая имеет положительный и отрицательный знак.

При этом для перехода к действительным координатам, надо значение параметра записать в безразмерном виде и воспользоваться формулой

$$y = |< x > + i\sqrt[4]{< (x - < x >)^2 >}| = \sqrt{< x >^2 + \sqrt{< (x - < x >)^2 >}}. \quad (1.1)$$

Т.е. извлечь квадратный корень из безразмерного среднеквадратичного отклонения. Это связано с вычислением пульсирующих координат, при N шагах которые, определяют среднеквадратичное отклонение, равное $\sqrt{N}$.

Эта формула (1.1) справедлива, так как использовалась при построении графика коэффициента сопротивления турбулентного потока несжимаемой жидкости, и результат использования этой формулы совпал с экспериментом.

Рассмотрим задачу течения горючей смеси в трубе с круговым сечением, и опишем стационарные решения этого уравнения, как температуры, так и числа Рейнольдса, как в случае горения, так и в случае взрыва. В случае взрыва стационарное решение, температура будет комплексной, где мнимая часть опишет пульсации взрыва.

2. Решение уравнения Навье – Стокса при асимптотике значения температуры, равной константе

Решение задачи течения смеси в трубопроводе с круглым сечением при постоянной комплексной температуре, уменьшающейся плотности и росте скорости, будем искать в виде

$$V_0(t)=V(z,t)\rho(z)/\rho(0)=V(z,t)\{[1-\alpha^5(\tau)]\frac{\rho_1}{\rho_0}+\alpha^5(\tau)\exp(-\frac{z}{L}\ln P_0/P_1)\}.$$

в цилиндрической системе координат для трубопровода с постоянным круглым сечением. В данном случае $V_0(t)$ имеет параболический профиль с не зависящей от z скоростью. Эта величина определяется как координата положения равновесия системы, зависящая только от внешнего давления. При этом, так как эта величина имеет параболический профиль ее надо умножить на $[1-\alpha(\tau)r^2/a^2(z)]$. При этом рассматривается параболический профиль $1-\alpha(\tau)r^2/a^2(z), r\in[0,r_0]$ детонационной волны с малой величиной $\alpha_0 << 1$ в момент детонации. При этом для достижения нулевой скорости на поверхности трубы, имеется косой фронт детонационной волны. При этом на косом фронте и на выпрямляемом параболическом профиле образуются головы спиновой детонации. Определим формулу косого фронта. Он имеет вид $[1-\alpha(\tau)r_0^2/a^2]\frac{1-r^2/a^2}{1-r_0^2/a^2}, r\in[r_0,a]$, и является непрерывной функцией с разрывом первой производной. Где величина $(a-r_0)/a=\frac{P_0-P_{cr}}{P_0+P_{cr}}f(P_0/P_{cr})$, z_F координата начала образования ударной волны $\frac{P_{cr}}{P_1}=\exp(\frac{z_F}{L}\ln\frac{P_0}{P_1})$. Функция $f(P_0/P_{cr})$ определяется из эмпирической зависимости и по порядку величины равна 1. Причем для профиля косой волны, имеем $da/dz=0$, так как это ударная волна. Величина $\alpha(\tau)=\alpha_0+(1-\alpha_0)\exp(-\tau)$ изменяется от единицы, до минимального значения, описывая переход к ударной волне с почти плоским фронтом. Фронт ударной волны не является плоским, малая параболическая зависимость сохраняется, определяемая значением параметра α_0. Причем скорость изменения фронта более медленный процесс, чем время установления равновесия. Т.е. равновесные плотности медленно изменяются со временем.

Будем рассматривать постоянную стационарную температуру потока при переменной сжимаемой среде. В уравнении Навье - Стокса давление образует член $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{RT}{\mu}\frac{\partial \ln p}{\partial z}$. Значит, логарифм давления линеен при постоянной температуре. Так как внешнее воздействие имеется только для продольной оси $\ln P(z)=\ln P_0+\frac{\ln P_1/P_0}{L}z$, где P_0,P_1 давление в начальной и конечной части трубы, величина L это длина трубы, радиальной и угловой скоростью пренебрегаем. Получаем изменение давления $P(z)=P_0\exp(-\frac{z}{L}\ln P_0/P_1)$ в начальный момент времени. Значит, плотность тоже убывает в начальный момент времени $\rho(z)=\rho_0\exp(-\frac{z}{L}\ln P_0/P_1)$, значит, скорость потока растет в силу уравнения неразрывности. Имеем перепад давления, определяющий движение сжимаемого газа. При этом скорость потока растет и может достигнуть скорости звука, при этом образуется ударная волна. Но детонационная волна возникнет при начале комплексной температуры потока, причем как это следует из нелинейных уравнений движения, комплексное решение сопровождается быстрым ростом комплексной температуры.

Получим уравнение см. [4]

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\rho\partial z}+\nu\Delta V_z=-\frac{RT}{\mu}\frac{\partial \ln P}{\partial z}+\nu\Delta V_z=-\frac{R[T+\Delta T(z)+...]}{\mu}\frac{\ln P_1/P_0}{L}+\nu\Delta V_z$$

Подставляем значение скорости, получим уравнение

$$\frac{\partial V_0}{\partial t}[1-\alpha(\tau)r^2/a^2]\frac{\rho(z)}{\rho_0}+2V^2[1-\alpha(\tau)r^2/a^2]\{\frac{\alpha(\tau)r^2}{a^3}\frac{da}{dz}[\frac{\rho(z)}{\rho_0}]^2+\frac{2\rho(z)}{\rho_0}[\frac{\rho(z)}{\rho_0}]'_z\}=$$

$$=-\frac{RT}{\mu}\frac{\ln P_1/P_0}{L}-\nu\frac{4V}{a^2}\frac{\rho(z)}{\rho_0}$$

Умножаем это уравнение на радиус и интегрируем это уравнение по радиусу, так как система координат цилиндрическая, получим

$$\frac{\partial V}{\partial t}\exp[-\frac{z}{L}\ln(P_0/P_1)]a^2[\frac{r_0^2}{2a^2}-\alpha(\tau)\frac{r_0^4}{4a^4}+(\gamma-\alpha)(\frac{1}{4}-\frac{r_0^2}{2a^2}+\frac{r_0^4}{4a^4}]+\frac{c^2a^2}{2}\frac{\ln P_1/P_0}{L}+$$

$$+2\nu V\gamma\exp[-\frac{z}{L}\ln(P_0/P_1)]-$$

$$-V^2\ln(P_0/P_1)\exp[-\frac{2z}{L}\ln(P_0/P_1)]a^2[2\frac{r_0^2}{a^2}-\alpha(\tau)\frac{r_0^4}{a^4}+(\gamma-\alpha)(1-\frac{2r_0^2}{a^2}+\frac{r_0^4}{a^3})]/L=$$

$$=-V^2[\alpha(\tau)\frac{r_0^4}{2a^4}-\alpha^2(\tau)\frac{r_0^6}{3a^6}]\frac{ada}{dz}\exp[-\frac{2z}{L}\ln(P_0/P_1)],c^2=\frac{RT}{\mu};$$

$$\gamma=\alpha(\tau)+\frac{1-\alpha(\tau)r_0^2/a^2}{1-r_0^2/a^2}$$

.

Где определится параметр γ, связанный с косой волной. Возводя это равенство в квадрат, и находя среднеквадратичное отклонение, извлекаем квадратный корень из дисперсии, получим

$$\frac{\partial V_0}{\partial t}\exp[-\frac{z}{L}\ln(P_0/P_1)]a^2[\frac{r_0^2}{2a^2}-\alpha(\tau)\frac{r_0^4}{4a^4}+(\gamma-\alpha)(\frac{1}{4}-\frac{r_0^2}{2a^2}+\frac{r_0^4}{4a^4}]+\frac{c^2a^2}{2}\frac{\ln P_1/P_0}{L}+$$

$$+2\nu V\gamma\exp[-\frac{z}{L}\ln(P_0/P_1)]-$$

$$-V^2\ln(P_0/P_1)\exp[-\frac{2z}{L}\ln(P_0/P_1)]a^2[2\frac{r_0^2}{a^2}-\alpha(\tau)\frac{r_0^4}{a^4}+(\gamma-\alpha)(1-\frac{2r_0^2}{a^2}+\frac{r_0^4}{a^3})]/L=$$

$$=V^2[\alpha(\tau)\frac{r_0^4}{2a^4}-\alpha^2(\tau)\frac{r_0^6}{3a^6}]\frac{a\sqrt{<(da/dz)^2>}}{6}\exp[-\frac{2z}{L}\ln(P_0/P_1)]=$$

$$=V^2[\alpha(\tau)\frac{r_0^4}{2a^4}-\alpha^2(\tau)\frac{r_0^6}{3a^6}]\frac{a\delta}{l}\exp[-\frac{2z}{L}\ln(P_0/P_1)]$$

В случае выбора знака минус у корня из среднеквадратичного тангенса наклона шероховатости, получится, что шероховатости увеличивают скорость потока, так как полная производная $\frac{dV}{dt}$ увеличится. Т.е. знак минус выбирать нельзя.

При ведении турбулентной вязкости используется формула $-\rho u_l' \, u_k' = \rho K\frac{\partial u_l'}{\partial x_k}$ см.[5], при отрицательном значении величины конвективного члена, связанного с шероховатостью, что приводит к выбору знака плюс у корня из среднеквадратичного отклонения. Кроме того, надо выбирать знак плюс у квадратного корня из среднеквадратичного квадрата тангенса наклона шероховатости, чтобы получилось комплексное турбулентное решение. В противном случае, решение, описывающее пульсирующий турбулентный режим не получится.

Переходя от радиуса к диаметру трубопровода и умножив на величину d/v^2, получим

$$\frac{\partial R_2}{\partial \tau}[\frac{r_0^2}{2a^2} - \alpha(\tau)\frac{r_0^4}{4a^4} + (\gamma - \alpha)(\frac{1}{4} - \frac{r_0^2}{2a^2} + \frac{r_0^4}{4a^4})]H(z) =$$

$$= H^2(z)R_2^2/\Re_{cr} - 2R_2\gamma H(z) + \frac{P}{8\Re_{cr}};$$

$$P = \frac{d^3\Re_{cr}}{v^2 L}G(P_0, P_1); H(z) = [1 - \alpha^5(\tau)]\frac{\rho_1}{\rho_0} + \alpha^5(\tau)\exp[-\frac{z}{L}\ln(P_0/P_1)], R_2 = \frac{V_0 d}{v};$$

$$1/\Re_{cr} = [\alpha(\tau)\frac{r_0^4}{2a^4} - \alpha^2(\tau)\frac{r_0^6}{3a^6}]/R_{cr} - [2\frac{r_0^2}{a^2} - \alpha(\tau)\frac{r_0^4}{a^4} + (\gamma - \alpha)(1 - \frac{2r_0^2}{a^2} + \frac{r_0^4}{a^3})]aH'(z) =$$

$$= g/R_{cr} - haH'(z)$$

$$g = \alpha(\tau)\frac{r_0^4}{2a^4} - \alpha^2(\tau)\frac{r_0^6}{3a^6}; h = 2\frac{r_0^2}{a^2} - \alpha(\tau)\frac{r_0^4}{a^4} + (\gamma - \alpha)(1 - \frac{2r_0^2}{a^2} + \frac{r_0^4}{a^3}))$$

$$\tau = 24t \cdot v/d^2, R_0 = V_0 d/v, R_{cr} = 12/\sqrt{<(da/dz)^2>} = l/\delta;$$

$$G(P_0, P_1) = \frac{P_0 - P_1}{\rho}[1 - \alpha(\tau)] + \alpha(\tau)c^2 \ln P_0/P_1$$

В формулах для $H(z)$ и $G(P_0, P_1)$ учтен переход от экспоненциального затухания плотности и давления к постоянному значению плотности и давления. Параметр 5 в формуле $H(z)$ надо подобрать для согласия с экспериментом. Причем в коэффициенте $H(z)$ учтено изменение плотности, как в случае параболического профиля, так и в случае почти плоской волны.

Получаем условие стационарности для уравнения Навье – Стокса с учетом одного члена ряда-решения в одномерном случае

$$R_0^2 - 2R_0\gamma\Re_{cr} + P(z)/8 = 0, R_0 = R_2 H(z),$$

Где $R_0 = R_2 H(z)$ число Рейнольдса в начале потока $\alpha(0) = 1$. В произвольной точке потока $R_2 = R_0 / H(z)$. В одномерном случае при постоянстве сечения трубопровода уравнение неразрывности определяет скорость в каждом сечении. Ламинарное решение этого уравнения R_0 в сечении с продольной координатой z равно

$$R(z)\frac{\rho(z)}{\rho_0} = R_0 = \Re_{cr}\gamma - \sqrt{\Re_{cr}^2\gamma^2 - P/8} \approx \frac{P}{16\Re_{cr}} = \frac{d^3}{16\nu^2 L}G(P_0, P_1).$$

Откуда имеем для числа Рейнольдса потока в сечении z

$$R(z) = R_0\frac{\rho_0}{\rho(z)} = [\Re_{cr}\gamma - \sqrt{\Re_{cr}^2\gamma^2 - P/8}]/H(z) \qquad (2.1)$$

Но турбулентное решение не единственно. Получится решение, если сразу не усреднять поток, а умножать на величину $[1-\alpha(\tau)r^2/a^2(z)]^p$, а потом усреднять. С ламинарным решением это не соответствует физике процесса, так как должно получаться среднее течение, которое возможно из-за отсутствия квадратичного члена. В случае учета квадратичного, конвективного члена среднее решение получить не удается, из-за наличия момента решения второго порядка. Поэтому в случае турбулентного потока решений имеется счетное количество. При этом критическое число Рейнольдса возрастет в p раз, что существенно при описании спиновой детонации. В самом деле, все члены, кроме конвективного члена разделятся на величину p. Конвективный член равен разности $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)}$, т.е. критическое число Рейнольдса в виде $\frac{1}{R_{cr}}$ умножается на величину p.

Не единственность решения приводит к разному значению энергии турбулентного решения. Переход с одного уровня энергии на другой сопровождается излучением звуковой энергии. Так волна детонации сопровождается резким звуком. При детонации возбуждаются высокие уровни энергии. Переход на низкие уровни сопровождается звуковым сигналом.

При вычислении постоянного числа Рейнольдса оно умножается на экспоненциально убывающую плотность, которая образуется при постоянной температуре потока, причем скорость потока экспоненциально растет.

Из эксперимента имеем значение критического числа Рейнольдса для круглого трубопровода $R_{cr} = \frac{l}{\delta} = \frac{12}{\sqrt{<(da/dz)^2>}} = 2300$, измеренного у не сжимаемой жидкости в трубопроводе с круглым сечением.

Средняя скорость, входящая в число Рейнольдса, равна $V_a = \int_0^a rV_0(1-\frac{r^2}{a^2})dr / \int_0^a rdr = V_0/2, R_a = \frac{V_a d}{\nu} = \frac{R_0}{2}$.

В случае большого перепада давления, получаем комплексное турбулентное решение

$$R_0/\sqrt{P} = \Re_{cr}\gamma/\sqrt{P} - i\sqrt{1/8 - \Re_{cr}^2\gamma^2/P}\,.$$

Если считать точнее, то вклад вращательной мнимой части в поступательную скорость движения потока соответствует корню из мнимой части согласно формуле (1.1) и получаем формулу (2.2)

$$R_0/\sqrt{P} = \Re_{cr}\gamma/\sqrt{P} - i\sqrt[4]{1/8 - \Re_{cr}^2\gamma^2/P}\sqrt{\beta} \qquad (2.2)$$

Мнимая часть числа Рейнольдса потока пропорциональна на бесконечности давления $\operatorname{Im} R \sim \sqrt{P} \sim d_{eff}^{3/2}$. При этом степень усреднения пропорциональна высоте шероховатости, стремящейся к нулю, хотя самая гладкая поверхность соответствует среднему модулю тангенса наклона, равному обратной величине критического числа Рейнольдса. Так как из мнимой части выражения для числа Рейнольдса потока извлекается корень четвертой степени, имеем для эффективного диаметра d_{eff} формулу

$$d_{eff}/d \sim \lim_{k\to 0}[\alpha(1 - kR_{cr}/\omega l)]^{1/4} = \lim_{k\to 0}(\alpha - kR_{cr}/l)^{1/4} = \lim_{k\to 0}(\frac{\alpha}{1 + kR_{cr}/\omega l})^{1/4}.$$

Величины $\alpha = \omega$, и при бесконечно малой шероховатости сокращаются, хотя такая ситуация и не реализуется. Но эти формулы справедливы для данной схемы решения. При решении в виде ряда получится вычисляемое другое значение α. Самая гладкая поверхность соответствует среднему модулю тангенса наклона, равного обратному значению критического числа Рейнольдса, так как самые малые модули тангенса наклона соответствуют молекулярному уровню шероховатости. При этом эффективный диаметр меньше истинного диаметра. Высота шероховатости может стремиться к нулю, одновременно с периодом шероховатости l. Т.е. величина $(\frac{\alpha}{1+1/\omega})^{1/4}$ это максимальное отношение эффективного диаметра к истинному диаметру. Для внешней задачи эффективный диаметр увеличится, и коэффициент β определится по формуле $\beta = \{[k(P,\xi_0)R_{cr}/\omega l(P,\xi_0)+1]/\alpha\}^{\sigma}$. Для обтекания сферы при нулевой высоте шероховатости эффективный размер сферы совпадет с истинным размером сферы, т.е. коэффициенты $\alpha = \omega = 1$. При переходе от сферического тела к цилиндрическому с круговым сечением, этот коэффициент будет равен $\alpha = \omega = (\frac{3}{2})^{2/3} = 1.31$

При этом коэффициент β пропорционален $\beta \sim \langle d^{3/2} \rangle = d^{3/2}\{\alpha/[k(P,\xi_0)R_{cr}/\omega l(P,\xi_0)+1]\}^{\sigma}, \sigma = \frac{1}{4}\frac{3}{2} = \frac{3}{8}$, который при нулевой макро шероховатости эффективный диаметр равен $\alpha^{2\sigma/3}$, т.е. при увеличении степени шероховатости эффективный диаметр уменьшается. При этом отношение тангенса наклона макро шероховатостей к микро шероховатостям больше чем величина $k/(l\langle|\tan\alpha|\rangle) = 1$.

Вычислим изменение диаметра трубопровода при условии равенства макро шероховатостей микро-шероховатостям из эмпирической формулы по уменьшению среднего квадрат значения диаметра, получится, что диаметр уменьшился в $[(1/\omega+1)/\alpha]^{1/4} = 1.14$ раза. При отношении $l/k = 30$, получаем уменьшение диаметра трубопровода в $[2300/(30\cdot\omega)+1]^{1/4} = 2.73$ раза.

При этом учтено влияние шероховатости стенок турбулентного потока на мнимую часть числа Рейнольдса потока. Чтобы получить графики с постоянной высотой шероховатости, надо ввести эффективный среднеквадратичный тангенс наклона шероховатостей. Эффективное среднеквадратичное значение тангенса наклона шероховатости должно зависеть от внешнего давления $\frac{k(P,\xi_0)}{l(P,\xi_0)}$. Причем на бесконечности числа Рейнольдса, или безразмерного давления имеем шероховатость, соответствующую постоянной высоте шероховатости $\frac{k(\infty,\xi_0)}{l(\infty,\xi_0)}=\frac{k}{r_0}=\frac{1}{\xi_0}$.

Но формула Никурадзе получена при постоянном отношении радиуса трубопровода r_0 к средней высоте шероховатости k. Формула (2.2) содержит эффективный среднеквадратичный тангенс наклона шероховатости, который выражен через отношение радиуса трубопровода к средней высоте шероховатости и через безразмерное давление.

$$\frac{l(P,\xi_0)}{\delta(P,\xi_0)}=\{2\exp[-|\sqrt{P}-\sqrt{P_{cr}}\,|/|\alpha(\xi_0)|]+\xi_0[1-\exp(-|\sqrt{P}-\sqrt{P_{cr}}\,|/|\alpha(\xi_0)|)]\}\times$$
$$\times\{1+0.4\exp\{-[\sqrt{P}-\sqrt{P_{cr}}\beta(\xi_0)]/\gamma(\xi_0)\}\},\xi_0=r_0/k\ .$$

Величина $P_{cr}=8R_{cr}^2$. Влияния эффективного среднеквадратичного тангенса наклона шероховатостей на свойство потока зависит от числа Рейнольдса или перепада давления.

Эмпирическая формула по определению коэффициентов $\alpha(\xi_0),\beta(\xi_0),\gamma(\xi_0)$ следующая

$$\alpha(\xi_0)=R_{cr}\frac{\xi_0}{1.5},\qquad \beta(\xi_0)=\frac{\xi_0}{4},\qquad \gamma(\xi_0)=R_{cr}\xi_0^{1.5}/4 \qquad (2.3)$$

Т.е. коэффициенты этой формулы определяются константами $3/2,1/4$, которые используются в вычислении коэффициента β. При этом, используя решение в виде ряда получаем значение под корнем, отличное от $1/8$, но коэффициенты в формулах (2.3) умножаются на постоянный множитель.

При этом в начале образования мнимой части комплексного решения $T=T_{cr}$, или начале турбулентного решения, тангенс наклона шероховатостей приближенно равен $R_{cr}^{1/11} = 2$, и графики при разных тангенсах наклона шероховатостей совпадают.

Формула для эффективного среднеквадратичного тангенса наклона шероховатости проверена для течения несжимаемой жидкости. Причем получено совпадение экспериментального графика Никурадзе коэффициента сопротивления потока в зависимости от числа Рейнольдса и степени шероховатости и теоретического графика.

Определим расстояние, на котором образуется параболический профиль скорости в ламинарном и турбулентном режиме. В случае ламинарного режима отношение диаметра к расстоянию, за которым образуется параболический профиль равно d/L. Оно равно отношению перпендикулярной продольной оси скорости, равной ν/d к скорости вдоль продольной оси V. В результате получаем $L = d^2V/\nu = dR$.

Эта формула совпадает с экспериментом с точностью до коэффициента, который равен $0.1 \div 0.01$ и который определен из эксперимента.

В случае турбулентного режима имеем две перпендикулярные компоненты скорости $\mathrm{Im}V/\mathrm{Re}V = \mathrm{Im}R/\mathrm{Re}R = d/L$, откуда имеем

$$L = d\frac{\mathrm{Re}R}{\mathrm{Im}R} = \frac{dR_{cr}}{\sqrt{P}\{\alpha/[k(P,\xi_0)R_{cr}/\omega l(P,\xi_0)+1]\}^{\sigma}\sqrt[4]{1/8}} = \frac{dR_{cr}}{\sqrt{R^2 - R_{cr}^2}}, P > 8R_{cr}^2, R >> R_{cr}$$

Коэффициент в этой формуле можно определить только из эксперимента. При большом перепаде давления или большом числе Рейнольдса параболический профиль скорости устанавливается на малом расстоянии.

3. Энергетическое уравнение и его решение

Энергетическое уравнение в случае учета продольной компоненты скорости, зависящей от радиуса в трубе с круглым сечением, имеет вид см. [4]

$$c_p(\frac{\partial T}{\partial t} + V_z\frac{\partial T}{\partial z}) = \chi\Delta T + \nu[(\frac{\partial V_z}{\partial r})^2 + (\frac{\partial V_z}{\partial z})^2] + \frac{Q}{\tau},$$

Где введен источник тепла Q, имеющий размерность квадрата скорости. Температура отнесена к единице массы. Подставим в это уравнение величины скорости и температуры, удовлетворяющие формулам см. [4] (в [4] приведено ламинарное значение скорости и температуры)

$$V(r,z,t)=V_0(t)\frac{\rho_0}{\rho(z)}$$

$$T(r,z,t)=[T(t)-T_0][1-\alpha(\tau)r^4/a_0^4(z)]$$

В данном случае $V(r,z,t)$ имеет параболический профиль с растущей скоростью. Ее необходимо умножить на величину $[1-\alpha(\tau)r^2/a_0^2(z)]$. Получим уравнение

$$c_p[1-\alpha(\tau)\frac{r^4}{a_0^4(z)}]\frac{\partial T(t)}{\partial t}+5c_pV_0(t)\frac{\rho_0}{\rho(z)}[T(t)-T_0][1-\frac{\alpha(\tau)r^2}{a_0^2(z)}]\frac{\alpha(\tau)r^4}{a_0^5}\frac{da_0(z)}{dz}=$$

$$=-9c_p\chi[T(t)-T_0]\frac{\alpha(\tau)r^2}{a_0^4(z)}+2\nu V_0^2(t)\{2\frac{\rho_0^2}{\rho^2(z)}\alpha^2(\tau)(\frac{r}{a_0^2})^2+2[\frac{\rho_0}{\rho(z)}]_z'^2\}+ \quad .$$

$$+\frac{Q}{\tau}\exp(-U/RT),$$

Где имеем источник энергии в виде

$$Q_1\exp(-U/RT)=Q_1\exp[-\frac{U}{R(T_0+\Delta T)}],.$$

Т.е. в точке значения энергии активации формула справедлива. Где величина U, энергия активации, $\beta=1/(T_0+\Delta T)$, величина k, постоянная Больцмана, где величина Q_1, имеет размерность квадрата скорости. При этом величина kT_0 это начальная температура реакции. Умножим данное уравнение на радиус и проинтегрируем по радиусу и введем среднеквадратичный тангенс наклона шероховатостей, получим

$$c_p a_0^2[1/2-\alpha(\tau)/6]\frac{\partial T(t)}{\partial t}-5c_p V_0(t)[T(t)-T_0]F(z)a_0\times$$

$$\times[\alpha(\tau)/6-\alpha^2(\tau)/8]\sqrt{<[\frac{da_0(z)}{dz}]^2>}=$$

$$=-9c_p\chi[T(t)-T_0]\alpha(\tau)/4+\nu V_0^2(t)S+\frac{Qa_0^2}{2\tau}\exp(\theta-\theta_0)\,.$$

$$S=1+\alpha^2(\tau)[a_0F'(z)]^2, F(z)=1-\alpha^5+\alpha^5\exp(\frac{z}{L}\ln\frac{P_0}{P_1});$$

$$\theta=-\frac{U}{R(T_0+\Delta T)},\theta_0=\frac{U}{RT_0}$$

Использовали знак минус у среднеквадратичного отклонения, так как при введении турбулентной температуропроводности используется формула $-c_p\rho<\theta'\cdot u_k'>=\rho K_\theta\frac{\partial<\theta_k'>}{\partial x_k}$ см. [5], при отрицательном значении величины конвективного члена, связанного с шероховатостью, что приводит к выбору знака минус у корня из среднеквадратичного отклонения. Где использовали теорему о среднем значении интеграла

$$\int_0^{a_0}\exp[-\frac{U}{R[T_0+\Delta T(1-r^4/a_0^4)]}]rdr=\exp[-\frac{U}{R(T_0+\alpha\alpha\Delta T)}]a_0^2/2$$

Умножим уравнение на величину d^2R_{cr}/ν^3

$$2\frac{\partial\theta(u)}{\partial u}[1/2-\alpha(\tau)/6]-15R_0(u)\theta(u)F(z)[\alpha(\tau)/3-\alpha^2(\tau)/4]=$$

$$=-9R_{cr}\frac{\chi}{\nu}\theta(u)\alpha(\tau)/4+R_{cr}R_0^2(u)S+R_{cr}Q_0\exp[-\frac{U}{R(T_0+\alpha\alpha\Delta T)}+\frac{U}{RT_0}]$$

$$\theta-\theta_0=-\frac{U}{R(T_0+\alpha\alpha\Delta T)}+\frac{U}{RT_0}\approx\frac{\alpha\alpha\Delta T}{T_0}\frac{U}{RT_0},\sqrt{<[\frac{da_0(z)}{dz}]^2>}R_{cr}=12,u=24t\cdot\nu/(R_{cr}d^2),$$

$$Q_0=Q_1\exp(-U/RT_0)\frac{a_0^2}{2\tau}\frac{d^2}{\nu^3}$$

Получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$2\frac{\partial\theta(u)}{\partial u}[1/2-\alpha(\tau)/6]=15R_0(u)\theta(u)F(z)[\alpha(\tau)/3-\alpha^2(\tau)/4]-$$

$$-R_{cr}\theta(u)\frac{9\chi}{4\nu}\alpha(\tau)+R_{cr}R_0^2(u)S+R_{cr}Q_0\exp(\theta-\theta_1);$$

$$\theta-\theta_0=-\frac{U}{R(T_0+\alpha\alpha\Delta T)}+\frac{U}{RT_0}\approx\frac{\alpha\alpha\Delta T}{T_0}\frac{U}{RT_0};\Delta T>0$$

Определим момент, когда действительное решение этой системы нелинейных уравнений не существует, а существует комплексное решение. Уравнение по определению координат положения равновесия имеет вид

$$\ln\frac{(\frac{9\chi}{4\nu}\alpha(\tau)-\frac{15R_0F(z)[\alpha(\tau)/3-\alpha^2(\tau)/4]}{R_{cr}})\theta-R_0^2S}{Q_0}=\theta-\theta_0>0$$

Надо рассматривать существование действительного решения в случае

$$(\frac{9\chi}{4\nu}\alpha(\tau)-\frac{15R_0F(z)[\alpha(\tau)/3-\alpha^2(\tau)/4]}{R_{cr}})\theta>R_0^2(z)S,$$

$$S=1+\alpha^2(\tau)[a_0F'(z)]^2$$

иначе действительного решения не существует. При малом числе Рейнольдса имеем низкую температуру, определяемую числом Рейнольдса и не зависящую от химических реакций

$$[\frac{9\chi}{4\nu}\alpha(\tau)-\frac{15R_0F(z)[\alpha(\tau)/3-\alpha^2(\tau)/4]}{R_{cr}}]\theta=R_0^2S. \qquad (3.1)$$

При малых температурах экспонента имеет малое значение $\exp(\theta-\theta_1)$, и удовлетворяется (3.1), т.е. температура может расти с ростом числа Рейнольдса. Но при условии перехода к плоскому профилю скорости потока и увеличению числа Рейнольдса $\frac{9\chi}{4\nu}\alpha(\tau)<\frac{15R_0F(z)[\alpha(\tau)/3-\alpha^2(\tau)/4]}{R_{cr}}$, и так как температура $\theta-\theta_1$ большая, но конечная, образуется логарифм отрицательного числа, что невозможно. Поэтому с уменьшением параметра $\alpha(\tau)$ температура конечна и образуется турбулентное комплексное течение.

В случае большого действительного числа Рейнольдса нелинейное уравнение теряет свой смысл в действительной плоскости, так как значение аргумента у логарифма становится отрицательным.

Получим комплексное стационарное решение, мнимая часть которого описывает пульсирующий процесс, причем комплексная величина R_0 определена из решения уравнения Навье – Стокса

$$R_0 = \Re_{cr}\gamma - \sqrt[4]{1/8 - \Re_{cr}^2\gamma^2 / P}\sqrt{\beta P} = \sqrt{\Re_{cr}^2\gamma^2 + \sqrt{1/8 - \Re_{cr}^2\gamma^2 / P}\beta P}\exp(i\varphi)$$

Получим уравнение, подставляя имеющий физический смысл модуль числа Рейнольдса

$$\ln\left|\frac{\left[\frac{15R_0F(z)[\alpha(\tau)/3 - \alpha^2(\tau)/4]}{R_{cr}} - \frac{9\chi}{4\nu}\alpha(\tau)\right](\theta - \theta_0) + R_0^2 S}{Q_0}\right| + i\pi(1+2p) = \theta - \theta_0 > 0$$

$$S = 1 + \alpha^2(\tau)a_0^2F'^2(z)$$

Откуда имеем решение для значения температуры

$$\operatorname{Im}\theta = \pi(1+2p)$$

$$\operatorname{Re}(\theta - \theta_0) = \ln\left|\frac{R_0^2(P)\tau\nu S}{Q_0a_0^2d^2}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{w^2(P)\tau\nu S}{Q_1\exp(-U/kT_0)a_0^2}\right|, \theta - \theta_0 = -\frac{U}{R(T_0 + \alpha\alpha\Delta T)} + \frac{U}{RT_0} \approx \frac{\alpha\alpha\Delta T}{T_0}\frac{U}{RT_0}$$

$$\alpha\alpha\operatorname{Re}(T - T_0)\frac{U}{RT_0} \approx T_0\ln\left|\frac{w^2(P)\tau\nu S}{Q_1\exp(-U/kT_0)a_0^2}\right|$$

$$\alpha\alpha\operatorname{Im}T\frac{U}{RT_0} \approx T_0\pi(1+2p), S = 1 + \alpha^2(\tau)a_0^2F'^2(z)$$

Где $Q_1\exp(-U/kT_0)$ тепловой эффект реакции, имеющий размерность квадрат скорости, величина w скорость потока. Но это решение справедливо, только при условии $\frac{w^2(P)\tau\nu S}{Q_1\exp(-U/kT_0)a_0^2} > 1$.

При этом температура определяется не единственным образом. Существует зависимость от квантового числа p, которое приводит к разному значению мнимой части температуры.

Существует также быстро колеблющееся значение температуры с большой действительной частью. Это решение соответствует переходу в турбулентный взрывной, комплексный, пульсирующий режим. Имеем равенство при большом значении n при условии $\frac{5R_0}{4R_{cr}} > \frac{9\chi}{4\nu}$, т.е. при большом турбулентном числе Рейнольдса. Имеем большое комплексное значение температуры

$$\alpha\alpha\,\mathrm{Re}(T - T_0)\frac{U}{RT_0} \approx T_0 \ln\left|\frac{\{\frac{15R_0(P)}{R_{cr}}F(z)[\frac{\alpha(\tau)}{3} - \frac{\alpha^2(\tau)}{4}] - \frac{9\chi\alpha(\tau)}{4\nu}\}\frac{\varsigma}{\alpha} + R_0^2(P)S}{Q_0}[1 + O(\frac{1}{n})]\right|$$

$$\alpha\alpha\,\mathrm{Im}T\frac{U}{RT_0} \approx T_0\pi(1 + 2p)n[1 + O(1/n)],$$

$$P = \frac{d^3\Re_{cr}}{\nu^2 L}G(P_0, P_1), S = 1 + \alpha^2(\tau)a_0^2 F'^2(z)$$

$$\varsigma\frac{U}{RT_0} = \sqrt{\pi(1 + 2p)n + 9\ln^2\left|\frac{w^2(P)\tau\nu S}{Q_1\exp(-U/kT_0)a_0^2}\right|}, n = l/\delta$$

.

Получаем асимптотическое значение комплексного безразмерного давления равно $P = \frac{d^3R_{cr}}{\nu^2}\{\frac{P_0 - P_1}{\rho}[1 - \alpha(\tau)] + \alpha(\tau)\frac{R(T + iT_0\varsigma)}{\mu}\ln P_0/P_1\}$, где R газовая постоянная. Зная безразмерное давление, можно определить начальную скорость детонационной волны по формуле (2.2) $R_0 = (\sqrt{\Re_{cr}^2\gamma^2 + \sqrt{P^2/8 - \Re_{cr}^2\gamma^2 P\beta}})[1 - \alpha(\tau)r^2/a^2]$, которая переходит в плоский фронт ударной волны. Т.е. асимптотики значения безразмерного давления получена. Ее можно уточнить, причем с помощью комплексной температуры и появится зависимость безразмерного давления от координаты z. Откуда получаем асимптотику по определению температуры. Где значение параметра

n определяется степенью шероховатости поверхности трубы $n = l/\delta$. Это связано с тем, что решение гидродинамических уравнений имеет особенность типа полюс, см. [1]. При этом если учесть шероховатость поверхности, то начальные условия будут иметь малую мнимую часть

$$\theta = \tan\{\tau - \tau_0 + \arctan[x_0(1 + i\delta/l)]\} = \tan\{\tau - \tau_0 + \arctan x_0 + \frac{ix_0\delta/l}{1+x_0^2}\} \cong$$

$$\cong -\frac{il(1+x_0^2)}{x_0\delta}.$$

И при условии $\tau - \tau_0 + \arctan x_0 = \pi/2$ имеем полюс тангенса и получаем бесконечное действительное решение и конечное, большое, комплексное решение.

Но численный счет этого уравнения по неявной схеме с действительным начальным условием определил скачок действительного решения.

Приведем пример, описывающий это свойство дифференциального уравнения, переход к комплексному решению. Так для дифференциального уравнения может возникнуть комплексное решение, вместо бесконечного действительного решения

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2.$$

Причем положения равновесия чисто мнимые $x = \pm i$, и значит, решение может не стремиться к положению равновесия. Причем действительное решение этого дифференциального уравнения быстро стремиться к бесконечности $x = \tan[t - t_0 + \arctan(x_0)]$.

Используя неявную схему решения, получим следующее уравнение

$$x = x_0 + (1 + x^2)\Delta t + 0(\Delta t)^2.$$

Разрешая относительно неизвестной функции x, получим неявную схему

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4[x_0 + \Delta t + 0(\Delta t)^2]\Delta t}}{2\Delta t}.$$

Эта неявная схема с постоянным шагом правильно описывает стремление решения к бесконечности. При счете с уменьшенным шагом она определяет большее значение переменной t и значит, определяет большее значение неизвестной функции. Т.е. правильно описывает решение дифференциального уравнения до бесконечности решения. Когда бесконечность достигнута, при условии $x_0 > 1/(4\Delta t) - \Delta t - 0(\Delta t)^2$ определится конечное комплексное решение. Численный счет этого уравнения подтвердил правильность проведенного анализа решения.

При этом получаем стационарное, комплексное значение решения, описывающее взрыв. Т.е. температура взрыва будет комплексная $\theta = \dfrac{U}{k(T_1 + \alpha\alpha\Delta T)}$ равна логарифму большого параметра у действительной части. Мнимая часть, равна большому параметру, определяющему колеблющееся движение.

При этом безразмерная поступательная энергия взрыва одного моля потока равна $\sqrt{(\mathrm{Re}\,\theta)^2 + \mathrm{Im}\,\theta}$ или

$$Q_1 \exp(-U/kT_0) = \alpha\alpha \frac{c_p}{\mu} T_0 \frac{U}{RT_0} \times$$

$$\times \sqrt{9\ln^2 \left| \frac{\{\dfrac{15R_0(P)F(z)[\dfrac{\alpha(\tau)}{3} - \dfrac{\alpha^2(\tau)}{4}]}{R_{cr}} - \dfrac{9\chi}{4\nu}\alpha(\tau)\}\dfrac{\varsigma}{\alpha} + R_0^2(P)S}{Q_1 \exp(-U/kT_0)\dfrac{a_0^2}{2\tau}\dfrac{d^2}{\nu^3}} \right| + \pi n(1+2p)} \quad (3.2)$$

$$n = l/\delta; R_0(P) = \sqrt{\Re_{cr}^2\gamma^2 + \sqrt{1/8 - \Re_{cr}^2\gamma^2/P}\,\beta P}$$

$$P = \frac{d^3\Re_{cr}}{\nu^2 L}\{\frac{P_0 - P_1}{\rho}[1 - \alpha(\tau)] + \alpha(\tau)\frac{R(T + iT_0\sqrt{\varsigma})}{\mu}\ln P_0/P_1\}$$

Где величина δ/l это среднеквадратичный тангенс наклона шероховатостей. При этом турбулентное число Рейнольдса R_0 по модулю больше критического и должно выполняться $\dfrac{5R_0}{4R_{cr}} > \dfrac{9\chi}{4\nu}$.

Из этого нелинейного уравнения можно определить тепловой эффект химической реакции $Q_1 \exp(-U/kT_1)$ зная повышенную температуру химических реакций T_1.

При достаточно длинной трубе $\frac{1}{R_{cr}} > \frac{a}{2L}\ln(\frac{P_0}{P_1})$ и большом значении безразмерного давления P наблюдается турбулентный режим течения.

$$R_0 = \sqrt{\Re_{cr}^2\gamma^2 + \sqrt{1/8 + \Re_{cr}^2\gamma^2 / P}\beta P}$$

$$\Re_{cr} = \frac{1}{g/R_{cr} - haH'(z)}.$$

Но по мере перехода к профилю скорости волны детонации $F'(z) \to \alpha_0^5; 0 < \alpha_0 << 1$, возникает положительное критическое число Рейнольдса и турбулентный режим. При этом добиться при большом числе Рейнольдса действительной температуры не удастся, температура станет комплексной, что означает пульсирующий, взрывной, турбулентный режим температуры, при действительной скорости и числе Рейнольдса.

Но параболический профиль течения сменяется почти плоским фронтом. При этом температура становится комплексной и большой на фронте детонационной волны. При этом резко растет давление при росте температуры, что вызывает повышенную скорость фронта ударной волны. При росте давления в ударной волне растет плотность потока, что сдерживает рост скорости из-за уравнения неразрывности. При повышении температуры растет скорость звука при неизменной скорости потока, и значит, устанавливается режим не сжимаемой жидкости. Критерий несжимаемой жидкости большая скорость звука, т.е. взаимодействие мгновенное см. [4]. При этом устанавливается постоянная плотность, давление и температура в ударной волне. При этом в ударной волне газ смещается как единое целое, поэтому в виду отсутствия градиентов скорости и давления, его можно считать несжимаемой жидкостью, исключая переходный слой. Так как плотность жидкости не станет экспоненциально падать, жидкость надо рассматривать как не сжимаемую, член

$[2\frac{r_0^2}{a^2}-\alpha(\tau)\frac{r_0^4}{a^4}+(\gamma-\alpha)(1-\frac{2r_0^2}{a^2}+\frac{r_0^4}{a^3})]aH'(z)$ будет стремиться к нулю к величине пропорциональной α_0^5, при этом критическое число Рейнольдса $\Re_{cr}\gamma=\frac{\gamma}{[\alpha(\tau)\frac{r_0^4}{2a^4}-\alpha^2(\tau)\frac{r_0^6}{3a^6}]/R_{cr}}$ растет, так как $\alpha(\tau)\to\alpha_0, 0<\alpha_0<<1.$

Известна температура T_1, T_0.

Для определения параметров ударной волны, надо использовать граничные условия на ее фронте

$$\rho_0 V_0 = \rho_1 V_1$$
$$P_{z0}+\rho_0 V_0^2 = P_{z1}+\rho_1 V_1^2$$

Энергетическое граничное условие выполняется в силу решения энергетического уравнения. При этом образуется скачок давления во фронте ударной волны. В результате гидродинамического расчета определится значение скорости потока или числа Рейнольдса через параметр $(P_{zi}-P_i)/\rho_i, i=0{,}1.$

$$R_0=\Re_{cr}\gamma - i\sqrt[4]{P^2/8-\Re_{cr}^2\gamma^2 P}\sqrt{\beta}=\sqrt{\Re_{cr}^2\gamma^2+\sqrt{P^2/8-\Re_{cr}^2\gamma^2 P}\beta}\exp(i\varphi);$$
$$P=\frac{d^3\Re_{cr}}{\nu^2 L}[\frac{P(z)-P_0}{\rho(z)}(1-\alpha_0)+\alpha_0\frac{RT_0}{\mu}\ln P_0/P_1]= \tag{3.3}$$
$$=\frac{d^3 RT_0\Re_{cr}}{\nu^2\mu L}[\frac{(P_{z0}-P_0)z}{P_0 z_F+(P_{z0}-P_0)z}(1-\alpha_0)+\alpha_0\ln P_0/P_1]$$

За фронтом ударной волны установится комплексное давление в ударной волне

$$R_0=\Re_{cr}\gamma - i\sqrt[4]{P^2/8-\Re_{cr}^2\gamma^2 P}\sqrt{\beta}=\sqrt{\Re_{cr}^2\gamma^2+\sqrt{P^2/8-\Re_{cr}^2\gamma^2 P}\beta}\exp(i\varphi);$$
$$P=\frac{d^3\Re_{cr}}{\nu^2 L}[\frac{P(z)-P_1}{\rho_1(z)}(1-\alpha_0)+\alpha_0\frac{R(T+iT_0\sqrt{\varsigma})}{\mu}\ln P_0/P_1]= \tag{3.4}$$
$$=\frac{R(T_1+iT_0\sqrt{\varsigma})d^3\Re_{cr}}{\nu^2\mu L}[\frac{(P_{z1}-P_1)(L-z)}{P_1(L-z_F)+(P_{z1}-P_1)(L-z)}(1-\alpha_0)+\alpha_0\ln P_0/P_1]$$

и, следовательно, можно определить комплексную скорость потока. При этом имеется 4 уравнения (2 уравнения сохранения потока и два уравнения связи давления с числом Рейнольдса) и 4 неизвестных параметра P_{z0}, P_{z1}, V_0, V_1.

Плотность газа определится из уравнения Клапейрона - Менделеева по известному значению температуры и давления. При этом определится и скорость детонации, равная скорости потока за фронтом ударной волны минус скорость до фронта ударной волны. При этом дискретный процесс повышения температуры, давления P_{z0}, P_{z1} и скорости V_0, V_1 имеют мнимую часть, т.е. дисперсию. Среднеквадратичное отклонение температуры, соответствующее мнимой части температуры, определяет зону химической реакции. При этом давление в начале трубопровода определяется по формуле $P(z) = P_0 + \frac{P_{z0} - P_0}{z_F} z$, где P_{z0} комплексное. Тогда комплексная плотность изменяется по закону $\rho(z) = \frac{P(z)\mu}{RT_0}$, а комплексная скорость по формуле (3.3). Для ударной волны $P(z) = P_1 + \frac{P_{z1} - P_1}{L - z_F}(L - z)$. Так как $\alpha_0 << 1$, формулы определяют нулевую скорость в начале и конце потока. Этот линейный профиль давления установится после времени существования спиновой волны и при этом функция $H(z)$ равна

$$H(z) = [1 - \alpha^5(\tau)] \frac{P_1(L - z_F)}{P_1(L - z_F) + (P_{z1} - P_1)(L - z)} + \alpha^5(\tau) \exp[-\frac{z}{L} \ln(P_0 / P_1)]$$

Но получено решение при постоянной температуры потока, т.е. в момент времени до начала детонации. После начала детонации резко возрастет температура, начиная с комплексного значения температуры. При этом на участке комплексного решения образуется фронт ударной волны, а не параболы, как в начальный момент времени.

Но переход от параболического профиля к ударному профилю приведет к особому решению, детонационной волне, описывать которую надо, вводя кванты энергии звуковых волн. Это так называемая спиновая детонация, описание которой выходит за рамки данной статьи.

При этом перепад давления равен нулю в случае $z=0, z=L$ и условия $\alpha_0 << 1$, что следует из формул (3.3) и (3.4), значит, имеется ламинарный режим течения и скорость в начале и конце трубы нулевая $V_1(L)=0; V_0(0)=0$.

Оценим изменение скорости набегающего потока в зависимости от степени шероховатости. Увеличение тангенса наклона шероховатости, или отношение высоты шероховатости к диаметру трубопровода вызывает уменьшение скорости детонационной волны. При этом имеем $D \sim R_0 \sim \sqrt{\beta} \sim \sqrt{\frac{l}{\delta}}$, т.е. увеличение степени шероховатости h/R с 0.25 до 0.43 вызывает уменьшение экспериментальной скорости потока на 28.5% см. [6]. При теоретическом уменьшении скорости потока на 24% .

4. Образование ударной волны

Образование детонационной волны связано с координатой возникновения комплексного решения для температуры, которое в свою очередь связано с ростом числа Рейнольдса потока, которое определится из уравнения

$$\ln \frac{\left(\frac{9\chi}{4\nu}\alpha(\tau) - \frac{15R_0 \exp[\frac{z}{L}\ln(P_0/P_1)[\alpha(\tau)/3 - \alpha^2(\tau)/4]}{R_{cr}}\right)(\theta-\theta_0) - R_0^2}{Q_0} = \theta - \theta_0 > 0$$

При этом координата равна при начале комплексного решения, т.е. выражение под логарифмом равно минус единице

$$z_F = \frac{L}{2\ln(\frac{P_0}{P_1})} \ln \frac{[\frac{9\chi\theta_0}{4\nu}\alpha(\tau) - R_0^2](\theta-\theta_0) + Q_0\exp(\theta-\theta_0)}{\frac{15R_0}{R_{cr}}(\theta-\theta_0)[\alpha(\tau)/3 - \alpha^2(\tau)/4] + \alpha^2(\tau)R_0^2[a_0 \ln\frac{P_0}{P_1}/L]^2}.$$

Координата фронта ударной волны определяется при условии $\alpha(\tau)=1$. Причем, так как турбулентное число Рейнольдса определяется степенью шероховатости, координата образования детонационной волны зависит от шероховатости поверхности через зависимость числа Рейнольдса от степени шероховатости. Число Рейнольдса и безразмерная температура в этой формуле комплексные величины. При этом получится комплексное значение z_F, где действительная часть соответствует фронту волны, а мнимая часть соответствует среднеквадратичному отклонению, т.е. ширине зоны химических реакций.

Выводы

Решение в комплексной плоскости энергетического уравнения и уравнения Навье – Стокса для сжимаемой среды позволяет описать начальный этап пульсирующего турбулентного, параболического режима детонации. Далее образуется плоский фронт, описывающий сжимаемую жидкость с постоянным градиентом давления и образующий ударную волну. Плотность сжимаемой жидкости до фронта и после фронта разная. Описан переход из параболического профиля в плоский профиль. При этом в результате решения скорость параболического профиля растет с ростом продольной координаты, что приводит к образованию ударной волны. Причем в результате решения можно определить параметры ударной волны. Вычислено расстояние, при котором ударная волна образуется, что определяет длину трубы, в которой образуется ударная волна.

Литература

1. *Якубовский Е.Г.* Комплексные ограниченные решения уравнений в частных производных. Материалы международной научно-практической конференции. Теоретические и практические аспекты естественных и математических наук. Новосибирск: Изд. «Сибак», 2012, с. 19-30. http://sibac.info/index.php/2009-07-01-10-21-16/5809-2013-01-17-07-57-12

2. *Якубовский Е.Г.* Хаотические решения обыкновенных дифференциальных уравнений Сборник статей по материалам XVI международной научно-практической конференции №3 (15). Естественные и математические науки в современном мире. Новосибирск: Изд. «Сибак», 2014, с. 46-53. http://sibac.info/13720

3. Якубовский Е.Г. Описание хаотических решений с помощью ряда Лорана с существенной особой точкой Сборник статей по материалам XVII международной научно-практической конференции №4 (16). Естественные и математические науки в современном мире. Новосибирск: Изд. «Сибак», 2014, с. 15-22. http://sibac.info/14133

4. *Л.Д.Ландау, Е.М. Лифшиц* Гидродинамика, т.VI, М.:-, «Наука», 1988г., 736стр

5. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика Механика турбулентности часть 1. М.: «Наука», 1965г.,640с.

6. *Зельдович Я.Б. Компанеец А.С.* Теория детонации. – М.: Государственное Издательство Технико-Теоретической литературы, 1955, 136с.