# Преобразование Лоренца для звуковых волн

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Покажем, что звуковые волны описываются уравнением Максвелла и значит для них справедливо преобразование Лоренца с фазовой скоростью звука вместо фазовой скорости света. Приведены ссылки на статью, в которой на основании релятивистской формулы для энергии квазичастиц со скоростью звука, вместо скорости света, вычислены параметры гелия при низкой температуре.

Покажем, что можно определить напряженность электрического и магнитного поля у уравнений звуковых волн гидродинамики. Для этого определим понятие скалярного и векторного потенциала электромагнитного поля. Ротор меняет знак при переходе из правой декартовой системы координат в левую. Это можно доказать, расписав определение ротора в декартовой системе координат и поменяв знак в одном столбце у оператора дифференцирования и этой же компоненте скорости.

$$\nabla_l \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & -\mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & -V_2 & V_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = -\nabla_r \times \mathbf{V}$$

индекс $r$ соответствует правой системе координат, индекс $l$ левой. При этом дивергенция знак не меняет. Распишем величину комплексной скорости в виде

$$\mathbf{V} = (\mathbf{V} + \mathbf{V}^*)/2 + (\mathbf{V} - \mathbf{V}^*)/2,$$

и подействуем оператором дивергенция на обе части равенства

$$\nabla_r \mathbf{V} = \nabla_r (\mathbf{V} + \mathbf{V}^*)/2 + \nabla_r (\mathbf{V} - \mathbf{V}^*)/2.$$

Перейдем в комплексно сопряженное пространство и в плоскости векторов $\operatorname{Re}\mathbf{V}, \operatorname{Im}\mathbf{V}$ возьмем левую дивергенцию. При этом направление мнимой компоненты скорости совпадает с направлением оси, у которой меняем знак. При этом имеем соотношение $\nabla_r \mathbf{V} = \nabla_l \mathbf{V}^*$. Так как при этом в плоскости $\operatorname{Re}\mathbf{V}, \operatorname{Im}\mathbf{V}$ действительная часть не изменит знака, а мнимая часть изменит знак, получим

$$\begin{gathered}\nabla_r(\mathbf{V}+\mathbf{V}^*)/2+\nabla_r(\mathbf{V}-\mathbf{V}^*)/2=\nabla_r\mathbf{V}=\nabla_l\mathbf{V}^*=\\=\nabla_l(\mathbf{V}+\mathbf{V}^*)/2-\nabla_l(\mathbf{V}-\mathbf{V}^*)/2=\nabla_r(\mathbf{V}+\mathbf{V}^*)/2-\nabla_r(\mathbf{V}-\mathbf{V}^*)/2\end{gathered}.$$

При этом воспользовались тем, что правая и левая дивергенция равны. Откуда получаем $\nabla_r(\mathbf{V}-\mathbf{V}^*)/2=0$, и значит, $(\mathbf{V}-\mathbf{V}^*)/2=i\cdot\nabla_r\times\mathbf{A}$, т.е. мнимая часть комплексной скорости соленоидальная.

Аналогично расписываем скорость, подействовав оператором ротор

$$\nabla_r\times\mathbf{V}=\nabla_r\times(\mathbf{V}+\mathbf{V}^*)/2+\nabla_r\times(\mathbf{V}-\mathbf{V}^*)/2,$$

но при этом величину скорости представим в виде $\mathbf{V}=\mathbf{V}_0+\dfrac{\partial\mathbf{A}}{c\partial t}$, а скорость $c$ это скорость возмущения в среде. При этом условие на мнимую часть $\mathbf{V}$ выполняется. Перейдем в комплексно сопряженное пространство и в плоскости векторов $\operatorname{Re}\mathbf{V}, \operatorname{Im}\mathbf{V}$ возьмем левый ротор, получим соотношение $\nabla_r\times\mathbf{V}=\nabla_l\times\mathbf{V}^*$. При этом направление мнимой компоненты скорости совпадает с направлением оси, у которой меняем знак. Так как при этом действительная часть изменит знак, а мнимая часть нет, ($\nabla_l\times=-\nabla_r\times$ и взята комплексно сопряженная часть), имеем

$$\begin{gathered}\nabla_r\times\mathbf{V}=\nabla_l\times\mathbf{V}^*=\nabla_l\times(\mathbf{V}+\mathbf{V}^*)/2-\nabla_l\times(\mathbf{V}-\mathbf{V}^*)/2=\\=-\nabla_r\times(\mathbf{V}+\mathbf{V}^*)/2+\nabla_r\times(\mathbf{V}-\mathbf{V}^*)/2\end{gathered}$$

т.е. получим $\nabla_r\times(\mathbf{V}+\mathbf{V}^*)=0$. Это соотношение эквивалентно $(\mathbf{V}+\mathbf{V}^*)/2=-\operatorname{grad}\varphi$. Итак, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 + \frac{\partial \mathbf{A}}{c\partial t} &= -\nabla\varphi + i\cdot\nabla\times\mathbf{A} \\ \mathbf{V}_0^* + \frac{\partial \mathbf{A}}{c\partial t} &= -\nabla\varphi - i\cdot\nabla\times\mathbf{A} \end{aligned}.$$

Эта формула другая формулировка факта, что вектор можно представить в виде суммы градиентной части и соленоидальной части. Из этого равенства имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{c\partial t} - \nabla\varphi + i\cdot\nabla\times\mathbf{A} = \mathrm{E} + i\mathrm{H} \\ \mathbf{V}_0^* &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{c\partial t} - \nabla\varphi - i\cdot\nabla\times\mathbf{A} = \mathrm{E} - i\mathrm{H} \end{aligned}.$$

Причем, так как скорость в газе подчиняется волновому уравнению, напряженность «электрического» и «магнитного» поля подчиняется волновому уравнению. Частным решением двух волновых уравнений являются уравнения Максвелла для свободного пространства. Эти частные решения являются и общими решениями для свободного пространства. В самом деле, добавка произвольной функции в уравнения Максвелла для свободного пространства, приведет к волновому уравнению с добавочными функциями относительно уравнения свободного пространства.

При этом используя только продольные звуковые волны, удалось сконструировать поперечные напряженности звукового поля.

Получается, что так как потенциалы и напряженности уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразования Лоренца, введенные звуковые потенциалы и напряженности волн, инварианты относительно преобразования Лоренца. Но инвариантность параметров, описывающих звуковые волны, относительно преобразования Лоренца следует из волнового уравнения, которому подчиняются звуковые волны. В самом деле решение в виде плоской волны содержит инвариант – фазу решения $\exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$, которая является сверткой двух четырех векторов, которые инвариантны относительно преобразования Лоренца звуковых волн.

Имеем неподвижную систему координат $K''$. Пусть имеем звук, принимаемый наблюдателем с частотой $\omega'$ в системе координат $K'$ двигающейся со скоростью $-U'$. Кроме того, имеем двигающийся источник со скоростью $-U$ в том же направлении, излучающий звуковой сигнал с частотой $\omega$ в системе отсчета $K$. Тогда имеем преобразование Лоренца с переменной фазовой скоростью системы координат $K$ и системы координат $K'$

$$\frac{\omega - k_x U}{\sqrt{1 - U^2 / c_F^2}} = \frac{\omega' - k'_x U'}{\sqrt{1 - U'^2 / c_F'^2}} = \omega''$$

Где $\frac{k_x}{k} = \cos\theta$. Тогда имеем связь между частотами излучателя и наблюдателя

$$\frac{(1 - \frac{U'}{c'_F}\cos\theta')\sqrt{1 - U^2 / c_F^2}}{(1 - \frac{U}{c_F}\cos\theta)\sqrt{1 - U'^2 / c_F'^2}} = \frac{\omega'}{\omega}$$

Не релятивистские формулы приведены в [1] формула (68.4) и (68.5). В не релятивистских формулах квадратный корень равен единице и фазовая скорость совпадает со скоростью звука при неподвижном наблюдателе и источнике. Т.е. не релятивистские формулы имеют вид

$$\frac{1 - \frac{U'}{c_s}\cos\theta'}{1 - \frac{U}{c_s}\cos\theta} = \frac{\omega'}{\omega}$$

В книге [11], звуковая волна описана как удовлетворяющая преобразованию координат Галилея. При этом автоматически следует не релятивистское правило сложения скоростей.

Групповая скорость вычислена в [1]

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = c\frac{\mathbf{k}}{k} + \mathbf{u}, \qquad (1)$$

формула (68.2). Эта формула получена из принципа относительности Галилея и естественно является не релятивистской. При постоянной скорости среды $\mathbf{U}$ фазовая скорость является константой. Фазовая скорость равна

$$\frac{\omega^2}{c_F^2} = k^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^2}{c_2^2} + \frac{\omega^2}{c_3^2} \qquad (2)$$

Где волновой вектор инвариантен относительно поворотов в данной инерциальной системе координат, т.е. его модуль является константой в ней. Если вектор является одинаковым при поворотах системы координат, то он одинаков в любом направлении, его модуль одинаков. Является константой и фазовая скорость, если скорость движения среды постоянна. В двигающейся системе координат, это другая скорость.

Если в случае звука, приращение скорости среды в звуковой волне в частности определяется по формуле $\Delta U = \Delta p / \rho c_s$, где величины $\rho, \Delta p$ это плотность среды и приращение давления в звуковой волне, то в световой волне приращения скорости среды нет, поэтому нет ударных световых волн. Причем метрический интервал звуковой волны сохраняется с фазовой скоростью звука (локально фазовая скорость звука является константой при повороте системы координат)

$$ds^2 = c_F^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 .$$

При этом справедливо преобразование Лоренца с разными фазовыми скоростями в разных системах координат.

$$dx^1 = \frac{dx'^1 + V'dt'}{\sqrt{1 - V'^2 / c_F'^2}} = \frac{dx''^1 + V''dt''}{\sqrt{1 - V''^2 / c_F''^2}},$$

$$c_F dt = \frac{c_F' dt' + \frac{V'dx'^1}{c_F'}}{\sqrt{1 - V'^2 / c_F'^2}} = \frac{c_F'' dt'' + \frac{V''dx''^1}{c_F''}}{\sqrt{1 - V''^2 / c_F''^2}},$$

$$dy'' = dy' = dy; dz'' = dz' = dz$$

Где величины $c_F', c_F''$ фазовые скорости в двигающихся системах со скоростью $V', V''$.

Скорости складываются по формуле

$$\frac{U_x}{c_F}=\frac{(U'_x+V)/c'_F}{1+U'_xV/c'^2_F};\frac{U_y}{c_F}=\frac{U'_y\sqrt{1-V^2/c'^2_F}/c'_F}{1+U'_xV/c'^2_F};\frac{U_z}{c_F}=\frac{U'_z\sqrt{1-V^2/c'^2_F}/c'_F}{1+U'_xV/c'^2_F}. \quad (3)$$

При этом величина скорости, которую нужно подставлять в преобразование Лоренца в не штрихованной системе координат, равна $C=c_F$.

Найдем величину фазовой скорости в анизотропном теле, для чего запишем стандартное преобразование Лоренца для анизотропного тела см. [4] (анизотропия состоит в разных проекциях волнового числа, или обратной величины компоненты фазовой скорости)

$$\begin{gathered}\omega=(\omega'+k'_1V)\gamma;\gamma=1/\sqrt{1-V^2/c^2}\\ k_1=(k'_1+\omega'V/c^2)\gamma;k_2=k'_2;k_3=k'_3\end{gathered}.$$

Вычислим фазовую скорость в не штрихованной системе координат

$$\frac{k^2}{\omega^2}=\frac{k_1^2+k_2^2+k_3^2}{\omega^2}=\frac{(k'_1+\omega'V/c^2)^2}{(\omega'+k'_1V)^2}+\frac{k'^2_2}{(\omega'+k'_1V)^2\gamma^2}+\frac{k'^2_3}{(\omega'+k'_1V)^2\gamma^2}$$

Перепишем эту формулу в виде

$$\frac{1}{c_F^2}=\frac{(1/c'_1+V/c^2)^2}{(1+V/c'_1)^2}+\frac{1/c'^2_2}{(1+V/c'_1)^2\gamma^2}+\frac{1/c'^2_3}{(1+V/c'_1)^2\gamma^2}=\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}+\frac{1}{c_3^2}. (4)$$

Получаем релятивистские формулы сложения фазовой скорости

$$\begin{gathered}c_1=\frac{c'_1+V}{1+Vc'_1/c^2};c_2=c'_2(1+V/c'_1)\gamma\\ c_3=c'_3(1+V/c'_1)\gamma\end{gathered}. \qquad (5)$$

Эти формулы не совпадают с формулами сложения релятивистских скоростей, которые выглядят следующим образом

$$c_1=\frac{c'_1+V}{1+Vc'_1/c^2};c_2=\frac{c'_2}{(1+Vc'_1/c^2)\gamma};c_3=\frac{c'_3}{(1+Vc'_1/c^2)\gamma}.$$

Значит понятие «фазовая скорость» не является скоростью с инвариантным преобразованием Лоренца. Понятие трехмерная скорость образуют обратные величины компонент «фазовой скорости». Это и понятно, ведь «фазовая скорость» в соответствии с принципом Гюйгенса распространяется во все стороны с постоянным значением, равным «фазовой скорости». Только в одномерном случае является полноценной скоростью, что и отражено в формулах, а в случае наличия всех трехмерных компонент не является вектором скорости, так как вектором скорости являются обратные компоненты.

Эта формула запишется для одномерного движения с точностью первого порядка по скорости среды

$$\frac{1}{c_F^2} = [1/c_1'^2 + 2V/(c_1'c'^2)](1-2V/c_1') = \frac{1-2V/c_1'}{c_1'^2} + 2V/(c_1'c^2) = \\ = \frac{1}{c_1'^2} + \frac{2V}{c_1'}(1/c'^2 - 1/c_1'^2) .$$

Фазовая скорость равна $c_F = c_1' + V(1 - c_1'^2/c'^2) + O(\frac{V}{c_1'})^2$ и при условии, если в преобразовании Лоренца использовать фазовую скорость, фазовая скорость в штрихованной и не штрихованной системе координат совпадает с точностью до членов второго порядка по скорости. В случае одномерного движения фазовая скорость для неподвижной среды удовлетворяет $c_1' = c_F'$ .

Предлагается формула для преобразования Лоренца писать в виде

$$dx^1 = \frac{dx'^1 + V'dt'}{\sqrt{1 - V'^2/c_F'^2}} = \frac{dx''^1 + V''dt''}{\sqrt{1 - V''^2/c_F''^2}},$$

$$cdt = \frac{c_F'dt' + \dfrac{V'dx'^1}{c_V'}}{\sqrt{1 - V'^2/c_F'^2}} = \frac{c_F''dt'' + \dfrac{V''dx''^1}{c_F''}}{\sqrt{1 - V''^2/c_F''^2}},$$

$$dy'' = dy' = dy; dz'' = dz' = dz$$

Где величины $c_F', c_F''$ фазовые скорости в двигающихся системах со скоростью $V', V''$.

Для доказательства предлагаемых формул, осуществим преобразование Лоренца, но с неизвестной скоростью $C'$, вместо скорости света в вакууме в преобразовании Лоренца

$$\omega / C = (\omega' / C' + k_1' V / C')\gamma; \gamma = 1/\sqrt{1 - V^2 / C'^2}$$
$$k_1 = (k_1' + \omega' V / C'^2)\gamma; k_2 = k_2'; k_3 = k_3'.$$

Вычислим фазовую скорость в не штрихованной системе координат

$$\frac{k^2}{\omega^2 / C^2} = \frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}{\omega^2 / C^2} = 1 = C^2 (\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{c_3^2}) =$$
$$= C'^2 [\frac{(k_1' + \omega' V / C'^2)^2}{(\omega' + k_1' V)^2} + \frac{k_2'^2}{(\omega' + k_1' V)^2 \gamma^2} + \frac{k_3'^2}{(\omega' + k_1' V)^2 \gamma^2}]$$

Перепишем эту формулу в виде

$$\frac{1}{C'^2} = \frac{(1/c_1' + V / C'^2)^2}{(1 + V / c_1')^2} + \frac{1/c_2'^2 (1 - V^2 / C'^2)}{(1 + V / c_1')^2} + \frac{1/c_3'^2 (1 - V^2 / C'^2)}{(1 + V / c_1')^2}.$$

Откуда получаем квадратное уравнение, связывающее скорость, стоящую в преобразовании Лоренца и ее проекции в двигающейся системе координат. Квадратное уравнение имеет вид

$$\frac{V^2}{C'^4} - \frac{1}{C'^2}(1 + \frac{V^2}{c_1'^2} + \frac{V^2}{c_2'^2} + \frac{V^2}{c_3'^2}) + \frac{1}{c_1'^2} + \frac{1}{c_2'^2} + \frac{1}{c_3'^2} = 0.$$

Это уравнение имеет два корня

$$\frac{1}{C'^2} = [(1 + k)/2 \pm \sqrt{(1 + k)^2 / 4 - k}]/V^2$$
$$k = \frac{V^2}{c_1'^2} + \frac{V^2}{c_2'^2} + \frac{V^2}{c_3'^2}.$$

Эти корни равны

$$\frac{1}{C'^2} = \frac{1}{c_F'^2} = \frac{1}{c_1'^2} + \frac{1}{c_2'^2} + \frac{1}{c_3'^2}, C'^2 = V^2$$

Получилось, что в преобразовании Лоренца в звуковой волне нужно использовать фазовую скорость света $C' = c_F'$.

При этом величина скорости, которую нужно подставлять в преобразовании Лоренца в не штрихованной системе координат, равна $C = c_F$.

При этом вектор образует волновое число, а не «фазовая скорость», поэтому необходимо определять связь между параметрами в разных системах координат относительно волнового числа. «Фазовая скорость», это не инвариантное понятие, так как не содержит 4 компоненты. Волновое число в разных системах координат связано по формуле $k_1 = (k_1' + \omega' V / c^2)\gamma; k_2 = k_2'; k_3 = k_3'$, где $k_l'$ волновое число в системе координат, где среда распространения звуковой волны неподвижна. При этом в двигающейся системе координат волновой вектор образует вектор. При этом определена «фазовая скорость» в двигающейся системе координат и в неподвижной системе координат, равные $\frac{1}{c_F'^2} = \frac{1}{c_1'^2} + \frac{1}{c_2'^2} + \frac{1}{c_3'^2}$, и такое же соотношение для не штрихованной системы координат, причем компоненты $\frac{1}{c_l'}, l = 1,..,3$ образуют вектор, как в штрихованной, так и не в штрихованной системе координат.

Чтобы фаза звуковой волны была инвариантна, при изменении координат и времени с помощью преобразования Лоренца, волновое число и частота должны преобразовываться в соответствии с преобразованием Лоренца с фазовой скоростью звука вместо скорости света.

Существенная часть скорости волны для интерференции образуется в двух антипараллельных направлениях. Причем если имеется одна скорость среды, путем перехода в другую инерциальную систему координат может быть обращена в ноль. При этом фазовая скорость имеет постоянный модуль, так как модуль волнового числа постоянен. В силу изотропности пространства в одной системе координат, оно сохранит свою изотропность в другой инерциальной системе координат, т.е. фазовая скорость одна, и она определяется по формуле (6). В случае непрерывной скорости среды, будет одна непрерывная фазовая скорость.

$$\frac{1}{c_F'^2}=[(\frac{1}{c_1'}+\frac{V}{c^2})^2+(\frac{1}{c_1'}-\frac{V}{c^2})^2]/2+\frac{1}{c_2'^2}+\frac{1}{c_3'^2}=$$
$$=\frac{1}{c_1'^2}+\frac{V^2}{c^4}+\frac{1}{c_2'^2}+\frac{1}{c_3'^2} \qquad (6)$$

Пусть имеется две антипараллельные скорости среды у двух разнесенных тел, причем в каждом теле скорости электромагнитной волны противоположны. При этом за счет сложения скоростей не удастся добиться нулевой скорости. Т.е. не существует системы координат, в которой пространство изотропно. Т.е. имеется два разных по модулю волновых вектора. Формула для двух разных волновых векторов (7)

$$\frac{1}{c_{F1}'^2}=(\frac{1}{c_1'}+\frac{V}{c^2})^2+\frac{1}{c_2'^2}+\frac{1}{c_3'^2}=\frac{1}{c_1'^2}+\frac{2V}{c_1'\,c^2}+(\frac{V}{c^2})^2+\frac{1}{c_2'^2}+\frac{1}{c_3'^2}$$
$$\frac{1}{c_{F2}'^2}=(\frac{1}{c_1'}-\frac{V}{c^2})^2+\frac{1}{c_2'^2}+\frac{1}{c_3'^2}=\frac{1}{c_1'^2}-\frac{2V}{c_1'\,c^2}+(\frac{V}{c^2})^2+\frac{1}{c_2'^2}+\frac{1}{c_3'^2}. \qquad (7)$$

При этом взаимодействие волнового числа со скоростью носит нелинейный характер.

В случае N скоростей сред имеется N-1 не обращающихся в ноль скоростей среды, следовательно, N не равных по модулю волновых вектора, и значит N фазовых скоростей. Или в случае непрерывного изменения скорости среды и по крайней мере при одном скачке скорости, считать надо по формуле (8) и имеется N непрерывных фазовых скоростей.

$$\frac{1}{c_{FV_k}'^2}=(\frac{1}{c_1'}+\frac{V_k}{c^2})^2+\frac{1}{c_2'^2}+\frac{1}{c_3'^2}=\frac{1}{c_1'^2}+\frac{2V_k}{c_1'\,c^2}+(\frac{V_k}{c^2})^2+\frac{1}{c_2'^2}+\frac{1}{c_3'^2};k=1,...,N \qquad (8)$$

При обнулении одной скорости остальные скорости будут не нулевые и имеется возможность определить относительные скорости. Так в опыте Физо, можно определить относительную скорость двух сред, причем имеется произвольная система координат с малой скоростью, поэтому одна скорость в опыте Физо произвольна, и определяется относительная скорость двух сред. Проведя интерференцию в среде с нулевой скоростью для сред с не нулевой постоянной скоростью можно определить разность $\frac{2V_k}{c'_1 c^2} + (\frac{V_k}{c^2})^2 = \frac{1}{c'^2_{FV_k}} - \frac{1}{c'^2_{F0}}$, а по ней и относительную скорость среды.

$$\frac{V_k}{c^2} = -\frac{1}{c'_1} + \sqrt{(\frac{1}{c'_1})^2 + \frac{1}{c'^2_{FV_k}} - \frac{1}{c'^2_{F0}}} = -\frac{1}{c'_1} + \sqrt{\frac{1}{c'^2_{FV_k}} - \frac{1}{c'^2_2} - \frac{1}{c'^2_3}}; \frac{1}{c'^2_{FV_k}} \ge \frac{1}{c'^2_2} + \frac{1}{c'^2_3}$$

Для подтверждения правильности релятивистских формул для энергии тела со скоростью звука вместо скорости света в [2] были определены параметры энергетического спектра жидкого гелия, приведенные в книге [3], как эмпирические см. [3] формула (22.7). Энергия системы считается с учетом релятивистских эффектов для звуковой волны $\varepsilon_n = \frac{m_p c_s^2}{\sqrt{1 - V_n^2 / c_s^2}}$. Эта формула приведена в [4], как учитывающая влияние среды на массу тела. Где величина $c_s$ скорость звука, $V_n$ скорость квазичастицы в звуковой волне в неподвижной среде. Рассматриваются массы тела больше массы Планка, поэтому применяются релятивистские формулы для энергии частицы со скоростью звука. Величина $m_p$ масса протона. Эффективная масса в жидкости описывается по формуле

$$(\frac{1}{m^*})_{pq} = \frac{\partial^2}{\hbar^2 \partial k_p \partial k_q} \varepsilon(\hbar \mathbf{k}).$$

Где величина $\varepsilon(\hbar \mathbf{k})$ энергия системы. При этом для звуковых волн величина $\frac{V}{c_s} = \frac{\hbar}{m} \frac{\omega}{c_s^2} << 1$ поэтому для импульса применяем не релятивистскую формулу.

В релятивистском приближении собственное значение эффективной массы считается по формуле

$$(\frac{1}{m^*})_{pq} = \frac{\partial^2}{m^2 \partial V_q \partial V_p} \frac{m c_s^2}{\sqrt{1 - V^2 / c_s^2}} = \frac{\partial}{\partial V_q} \frac{V_p}{m(1 - V^2 / c_s^2)^{3/2}} =$$
$$= \frac{1}{m}[\frac{\delta_{pq}}{(1 - V^2 / c_s^2)^{3/2}} + \frac{3 V_p V_q}{c_s^2 (1 - V^2 / c_s^2)^{5/2}}].$$

Параметры жидкого гелия имеют следующие значение см. [3] формула (22.7).

$$u = 2.4 \cdot 10^4 cm/s; \Delta = 8.7°K; p_0/\hbar = 1.9 \cdot 10^8 cm^{-1}; m^* = 0.16m(He^4).$$

Это правильное вычисление параметров жидкого гелия подтверждает правильность релятивистской формулы для энергии частицы.

## Выводы

Доказано, что звуковые волны подчиняются уравнению Максвелла. На этом основании можно утверждать, что для них справедливо преобразование Лоренца со скоростью звука, вместо скорости света. Были вычислены релятивистские со скоростью звука значения изменения частоты при Доплер эффекте. Показано, что релятивистские формулы Доплер эффекта не противоречивы, а не релятивистские противоречивы. Приведен пример статьи, в которой с использованием релятивистской формулы со скоростью звука, вместо скорости света, вычислены параметры энергетического спектра гелия. В книге [3], эти параметры не удалось определить, и они приведены как эмпирические.

## Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика, т.VI, М.-, «Наука», 1988г.,
2. Якубовский Е.Г. Формула для энергии звуковых квазичастиц «Энциклопедический фонд России», 2016,7 стр., http://russika.ru/sa.php?s=1070
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теоретическая физика т. IX, Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статическая физика, часть II, Теория конденсированного состояния М.: Наука, 1978, 448 стр.
4. Alexandre A. Martins Fluidic Electrodynamics: On parallels between electromagnetic and fluidic inertia arxiv.org/pdf/1202.4611; 2012