Уравнение ОТО для N тел

Якубовский Евгений Георгиевич

Национальный Минерально-Сырьевой

Университет «Горный»

e-mail yakubovski@rambler.ru

Аннотация

Уравнение ОТО описывает одно тело и определяет метрический тензор, зависящий от координат, связанных с этим телом. При этом должно быть соответствие между количеством неизвестных функций и количеством аргументов. Причем как будет доказано в статье, количество аргументов может быть меньше чем количество неизвестных функций, но не больше. Предлагается система уравнений ОТО описывающая N *тел, каждое со своим метрическим тензором, зависящим от* $4N$ *координат, связанных с этими* N *телами. Суммарная сила, действующая на каждое тело, разная в уравнении движения тела, так же как и метрический тензор, входящий в символ Кристоффеля, описывает воздействие на тело в уравнении движения. Существует 6 компонент метрического тензора, воздействующих на данное тело, на другое тело воздействует другие 6 компонент. На все тела воздействует 6N компонент метрического тензора. Но как же описать метрический тензор двигающихся тел, зависящий от* $4N$ *координат. Для этого необходимо учесть зависимость координат от метрического интервала. Так же как вектор-потенциал электромагнитного поля зависит от инварианта* $R_l u^l$*, причем учитываются все запаздывания в разных системах координат, так и зависимость от метрического интервала учтет все запаздывания. При этом пространство, в котором движутся* N *тел, имеет размерность* $4N$*. Поле характеризуется псевдотензором энергии-импульса, и построенными на его основе энергией, импульсом и моментом импульса для каждого тела и его поля, заданного метрическим тензором каждого тела. При этом можно определить суммарный псевдотензор энергии-импульса, и нельзя определить один*

метрический тензор, общий для всех тел. Каждое тело в отдельности характеризует свой метрический тензор. Метрические тензоры или символы Кристоффеля характеризуют суммарное воздействие, действующее на одно тело, со стороны других тел в уравнении движения каждого тела.

Будем обозначать номер тела индексами α, β, пространственные и временные координаты индексами i, k, l, n.

Для каждой из совокупности двигающихся частиц тензор энергии-импульса равен $T_{ik\alpha} = m_\alpha \delta[\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\alpha^0(s)] u_{i\alpha} u_{k\alpha} \frac{ds_\alpha}{\sqrt{-g_\alpha} dt}$. Причем этот тензор энергии-импульса и будем исследовать. Этот случай описывает гравитационное поле, созданное взаимодействием N тел, и вместе с уравнением движения описывает систему N тел.

Метрический интервал запишется в виде

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} ds_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik\alpha} dx_\alpha^i dx_\alpha^k.$$

Т.е. квадраты метрических интервалов каждого тела складываются.

При этом тензор Риччи каждого тела равен

$$R_{ik\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{ik\alpha}^l}{\partial x_\alpha^l} - \frac{\partial \Gamma_{il\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k} + \Gamma_{ik\alpha}^l \Gamma_{lm\alpha}^m - \Gamma_{il\alpha}^m \Gamma_{km\alpha}^l$$

Где величина символа Кристоффеля равна

$$\Gamma_{kl\alpha}^i = \frac{g_\alpha^{im}}{2} \left(\frac{\partial g_{mk\alpha}}{\partial x_\alpha^l} + \frac{\partial g_{ml\alpha}}{\partial x_\alpha^k} - \frac{\partial g_{kl\alpha}}{\partial x_\alpha^m} \right)$$

Тогда уравнение ОТО запишется в виде

$$R_{ik\alpha} - R_\alpha g_{ik\alpha} / 2 = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik\alpha}$$

Где величины тензоров и символа Кристоффеля зависят от всех координат.

Где для тел имеем выражение для тензора энергии-импульса материи

$$T_\alpha^{ik}=m_\alpha\delta[\mathbf{x}_\alpha-\mathbf{x}_\alpha^0(s)]u_\alpha^i u_\alpha^k\frac{ds_\alpha}{\sqrt{-g_\alpha}dt}=m_\alpha\delta(\mathbf{y}_\alpha)u_\alpha^i u_\alpha^k\frac{ds_\alpha}{\sqrt{-g_\alpha}dt}$$

Уравнение движения α тела или частицы запишется в виде

$$\frac{du_\alpha^i}{ds}=-\sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N}\Gamma_{pq\beta}^i u_\alpha^p u_\beta^q, u_\alpha^i=\frac{dx_\alpha^i}{ds} \qquad (1)$$

Координаты x_α^l соответствуют координатам свободного пространства, в котором находится тело α. При этом символ Кристоффеля $\Gamma_{lpq\beta}$ зависит от координат $x_\gamma^l, l=0,...,3; \gamma=1,...,N$, определяющих «силу», действующую на тело α. От этих же аргументов зависит правая часть выражения для суммарной силы в задаче многих тел.

В случае наличия нескольких приращений dx^q, имеем формулы для приращений $\delta u^i=-\sum_{\alpha=1}^{N}\Gamma_{pq\alpha}^i u^p dx_\alpha^q$, $du^i=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial u^i}{\partial x_\alpha^q}dx_\alpha^q$. Так как, имеем $Du^i=du^i-\delta u^i$, значит формула для нескольких приращений выглядит таким образом

$$Du^i=\sum_{\alpha=1}^{N}(\frac{\partial u^i}{\partial x_\alpha^q}+\Gamma_{pq\alpha}^i u^p)dx_\alpha^q=du^i+\sum_{\alpha=1}^{N}\Gamma_{pq\alpha}^i u^p dx_\alpha^q$$

Вывод уравнений для символа Кристоффеля, для тензора кривизны, уравнения ОТО одного из множества тел ничем не отличается от вывода уравнения для одного тела, приведенный в [1]. Только дифференцировать надо по координатам α тела, как у тензора кривизны $R_{iknm\alpha}$, у тензора Риччи и у определения символа Кристоффеля и у метрического тензора имеется зависимость от координат всех N тел. Величина тензора кривизны для α тела равна

$$R_{iklm\alpha}=\frac{1}{2}[\frac{\partial^2 g_{im\alpha}}{\partial x_\alpha^k\partial x_\alpha^l}+\frac{\partial^2 g_{kl\alpha}}{\partial x_\alpha^i\partial x_\alpha^m}-\frac{\partial^2 g_{il\alpha}}{\partial x_\alpha^k\partial x_\alpha^m}-\frac{\partial^2 g_{il\alpha}}{\partial x_\alpha^i\partial x_\alpha^m}]+$$
$$+g_{mp\alpha}(\Gamma_{kl\alpha}^n\Gamma_{im\alpha}^p-\Gamma_{km\alpha}^n\Gamma_{il\alpha}^p)$$

Причем он обладает теми же свойствами при перестановке индексов $iklm$, что и тензор кривизны для одного тела.

При этом получим $4N$ координат, описывающих $6N$ независимых метрических тензоров

Метрический интервал для решения уравнение ОТО для взаимодействия α и β тела, при этом определен метрический интервал каждого тела, который имеет вид

$$ds_{\alpha\beta}^2 = \exp(\nu_\alpha)c^2 dt_{\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\beta}^2[d\theta_{\alpha\beta}^2 + \sin^2\theta_{\alpha\beta}d\varphi_{\alpha\beta}^2] - \exp(\lambda_\alpha)dR_{\alpha\beta}^2$$

$$ds_\alpha^2 = \sum_{\beta=1}^N ds_{\alpha\beta}^2 = \exp(\nu_\alpha)c^2 dt_\alpha^2 - R_\alpha^2[d\theta_\alpha^2 + \sin^2\theta_\alpha d\varphi_\alpha^2] - \exp(\lambda_\alpha)dR_\alpha^2$$

$$R_\alpha^2 = \sum_{\beta=1}^N R_{\alpha\beta}^2, R_\alpha^2 d\theta_\alpha^2 = \sum_{\beta=1}^N R_{\alpha\beta}^2 d\theta_{\alpha\beta}^2,$$

$$R_\alpha^2 \sin^2\theta_\alpha d\varphi_\alpha^2 = \sum_{\beta=1}^N R_{\alpha\beta}^2 \sin^2\theta_{\alpha\beta} d\varphi_{\alpha\beta}^2 / N = \tag{2}$$

$$= \sum_{\beta=1}^N \left(\frac{R_{\alpha\beta}\sin\theta_{\alpha\beta}d\varphi_{\alpha\beta}}{R_\alpha \sin\theta_\alpha d\varphi_\alpha}\right)^2 R_\alpha^2 \sin^2\theta_\alpha d\varphi_\alpha^2 / N = \sum_{\beta=1}^N R_\alpha^2 \sin^2\theta_\alpha d\varphi_\alpha^2 / N$$

$$\left(\frac{R_\alpha \sin\theta_\alpha d\varphi_\alpha}{R_{\gamma\beta}\sin\theta_{\gamma\beta}d\varphi_{\gamma\beta}}\right)^2 = \sum_{\delta=1}^N \left(\frac{R_{\alpha\delta}\sin\theta_{\alpha\delta}d\varphi_{\alpha\delta}}{R_{\gamma\beta}\sin\theta_{\gamma\beta}d\varphi_{\gamma\beta}}\right)^2 = \delta_{\alpha\gamma} = \left(\frac{R_{\gamma\beta}\sin\theta_{\gamma\beta}d\varphi_{\gamma\beta}}{R_\alpha \sin\theta_\alpha d\varphi_\alpha}\right)^2$$

При этом справедливо $\left(\frac{\partial t_\alpha}{\partial t_{\gamma\delta}}\right)^2 = \sum_{\beta=1}^N \left(\frac{\partial t_{\alpha\beta}}{\partial t_{\gamma\delta}}\right)^2 = \delta_{\alpha\gamma}$; и значит, имеем $\left(\frac{\partial t_{\gamma\delta}}{\partial t_\alpha}\right)^2 = [\left(\frac{\partial t_\alpha}{\partial t_{\gamma\delta}}\right)^2]^{-1} = \delta_{\alpha\gamma}$. Откуда и получаем требуемое соотношение

$$dt_\alpha^2 = \sum_{\beta=1}^N dt_{\alpha\beta}^2 / N = \sum_{\beta=1}^N \left(\frac{\partial t_{\alpha\beta}}{\partial t_\alpha} dt_\alpha\right)^2 / N .$$

Где величина $\nu_\alpha = \sum_{\beta=1}^N \nu_{\alpha\beta}(R_{\alpha\beta}, t_\alpha)$, $\lambda_\alpha = \sum_{\beta=1}^N \lambda_{\alpha\beta}(R_{\alpha\beta}, t_\alpha)$. Величина

$$g_{00\alpha} = g_{00\alpha\beta} = \exp(\nu_\alpha), g_{11\alpha} = g_{11\alpha\beta} = -\exp(\lambda_\alpha), g_{22\alpha\beta} = -R_{\alpha\beta}^2,$$

$$g_{33\alpha\beta} = -R_{\alpha\beta}^2 \sin^2\theta_{\alpha\beta} .$$

Уравнение ОТО для α тела, нужно рассматривать относительно координаты центра инерции этого тела, равного $\mathbf{r}_\alpha$. При этом радиус другого тела равен $R_{\alpha\beta} = |\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_\alpha|$. При этом уравнение ОТО для индекса α, β имеем $\alpha \neq \beta$.

При этом уравнения ОТО распадутся на уравнения координат каждого тела. Уравнения для α тела, относительно β координат при тензоре энергии импульса равном нулю (см.[1]) сведутся к уравнениям

$$\begin{aligned}
&\exp(-\lambda_\alpha)\left(\frac{\nu'_{\alpha\beta}}{R_{\alpha\beta}} + \frac{1}{R^2_{\alpha\beta}}\right) - \frac{1}{R^2_{\alpha\beta}} = 0 \\
&\exp(-\lambda_\alpha)\left(\frac{\lambda'_{\alpha\beta}}{R_{\alpha\beta}} - \frac{1}{R^2_{\alpha\beta}}\right) + \frac{1}{R^2_{\alpha\beta}} = 0 \\
&\dot{\lambda}_{\alpha\beta} = 0
\end{aligned} \qquad (3)$$

Где штрих означает производную по радиусу $R_{\alpha\beta}$, а точка производную по времени. Складывая первое и второе уравнение (3) получим $\lambda'_{\alpha\beta} + \nu'_{\alpha\beta} = 0$, откуда имеем $\lambda_\alpha + \nu_\alpha = f_\alpha(t_\alpha)$, где в силу выбора формулы (2) имеется произвол в преобразовании времени, т.е. к величине ν_α можно добавить произвольную функцию времени, поэтому можно выбрать $f_\alpha(t_\alpha)$, равной нулю. Решая второе уравнение (2), получим

$$\exp(-\lambda_{\alpha\beta})c(R_{\alpha 1})c[R_{\alpha(\beta-1)}]c[R_{\alpha(\beta+1)}]...c(R_{\alpha N}) = 1 + \frac{const}{R_{\alpha\beta}}. \quad (4)$$

Постоянную можно выбрать из условия совпадения с законом тяготения Ньютона, используя формулу при малом потенциале $g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} = 1 - \frac{2\gamma m}{c^2 R}$.

Имеем формулу $c(R_{\alpha\beta}) = \dfrac{\exp(-\lambda_{\alpha\beta})}{1 - \dfrac{2\gamma m_\beta}{c^2 R_{\alpha\beta}}}$, которая следует из (4). При этом имеем

соотношение $\prod_{\beta=1}^{N} c(R_{\alpha\beta}) = 1$. Причем, используя выведенную формулу

$\lambda_\alpha + \nu_\alpha = 0$, и определенное значение $c(R_{\alpha\beta})$, имеем $\exp(-\lambda_\alpha) = \exp(\nu_\alpha) = \prod_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N} (1 - \frac{r_{g\beta}}{R_{\alpha\beta}}), r_{g\beta} = \frac{2\gamma m_\beta}{c^2}$.

Откуда имеем формулы для метрического тензора для α тела $g_{00\alpha}$, который будет равен

$$g_{00\alpha} = \prod_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N} (1 - \frac{2\gamma m_\beta}{c^2 |\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}). \qquad (5)$$

При этом для величины $g_{rr\alpha}$ имеем

значение $g_{rr\alpha} = -\frac{1}{\prod_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N} (1 - \frac{2\gamma m_\beta}{c^2 |\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|})}$. (6)

Функция Лагранжа релятивистской задачи N тел для α тела имеет вид

$$L_\alpha = -m_\alpha c^2 \sqrt{g_{ik\alpha} \frac{dx_\alpha^i}{cdt} \frac{dx_\alpha^k}{cdt}} =$$

$$= -m_\alpha c^2 \sqrt{\prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{N} (1 - \frac{r_{g\beta}}{R_{\alpha\beta}}) - \frac{V_{\alpha r}^2 / c^2}{\prod_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N} (1 - \frac{r_{g\beta}}{R_{\alpha\beta}})} - \frac{V_{\alpha\theta}^2}{c^2} - \frac{V_{\alpha\varphi}^2}{c^2} \sin^2 \theta_\alpha}$$

Разложение в первом порядке малости функции Лагранжа для одного тела имеет вид

$$L_{1\alpha} = -m_\alpha c^2 + m_\alpha [\sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N} \frac{\gamma m_\beta}{R_{\alpha\beta}} + \frac{V_{\alpha r}^2}{2} + \frac{V_{\alpha\theta}^2}{2} + \frac{V_{\alpha\varphi}^2}{2} \sin^2 \theta_\alpha]$$

Во втором порядке малости добавляются члены

$$L_{2\alpha} = m_\alpha [-\sum_{\beta,\gamma=1,\beta,\gamma\neq\alpha}^{N} \frac{\gamma^2 m_\beta}{2c^2 R_{\alpha\beta}} \frac{m_\gamma}{R_{\alpha\gamma}} + \frac{V_{\alpha\theta}^4}{8c^2} + \frac{V_{\alpha\varphi}^4}{8c^2} \sin^4 \theta_\alpha + \frac{V_{\alpha\theta}^2}{4} \frac{V_{\alpha\varphi}^2}{c^2} \sin^2 \theta_\alpha +$$
$$+ \sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N} \frac{\gamma m_\beta}{2R_{\alpha\beta}} (\frac{3V_{\alpha r}^2}{c^2} + \frac{V_{\alpha\theta}^2}{c^2} + \frac{V_{\alpha\varphi}^2}{c^2} \sin^2 \theta_\alpha)] .$$

При этом функция Лагранжа для всех тел не равна сумме функций Лагранжа для каждого тела. В самом деле, если сложить функции Лагранжа всех тел, то кинетическая энергия будет считаться в первом приближении правильно, а вычисленная потенциальная энергия равна удвоенному правильному значению.

Использовать функцию Лагранжа нужно для каждого тела в отдельности, составляя уравнение для каждого тела со своей функцией Лагранжа $\frac{d}{ds}\frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{x}_\alpha^k} - \frac{\partial L_\alpha}{\partial x_\alpha^k} = 0, \alpha = 1,...,N; k = 0,...,3; \dot{x}_\alpha^k = \frac{dx_\alpha^k}{ds}$, где координаты других тел используются как постоянные параметры. При этом уравнения Лагранжа будут связаны, так как каждая функция Лагранжа зависит от всех $4N$ переменных. Кроме того, эти уравнения с использованием функции Лагранжа, соответствуют уравнениям, равенства нулю ковариантной производной от четырехмерной скорости см. [2].

Суммарный метрический тензор построить невозможно, так как тогда он должен зависеть от $4N$ координат, описывающих N тел. Каждое тело описывается 4 координатами. При этом пространство координат, описывающих метрический тензор, будет не полностью заполнено, так как имеется 10 уравнений $g_{ik} = g_{ik}(y_1^0, y_1^1, y_1^2, y_1^3, ..., y_N^0, y_N^1, y_N^2, y_N^3)$ при $4N$ неизвестных $\mathbf{y}_\alpha = \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\alpha^0(s), \alpha = 1,...,N$, где вектор координаты четырехмерны. Решение этого уравнения определит множество 10 мерных подобластей в $4N$ мерном пространстве. Т.е. получится множество значений энергий, импульсов и моментов импульса, так как это множество 10 мерных областей имеет разный объем, причем соответствующий разным ветвям корней этого уравнения. Поэтому размерность координат, описывающих параметры задачи, может быть меньше размерности параметров задачи, но не больше.

Существует точка зрения, что можно построить один метрический тензор уравнения ОТО в зависимости от произвольной точки пространства времени для N тел. Но при этом он будет зависеть от $4N$ начальных условий координаты. Тогда метрическому тензору g_{lk} будет соответствовать $4N$ чисел, причем определить можно только 10 чисел, по значениям заданных метрических тензоров. Решение этого уравнения определит множество 10 мерных подобластей в $4N$ мерном пространстве. Причем необходимо определить импульс и момент импульса каждого тела. Если определять импульс и момент импульса α тела, по метрическому тензору, определяемому по координатам α тела, то не понятно, каковы значения других координат. Если вычислить метрический тензор в зависимости от метрического интервала и начальных условий, при заданном значении метрического интервала, то невозможно будет определить импульс и момент импульса каждого тела. Если бы пространство аргументов было бы 10 мерным, сохраняющийся импульс и момент импульса были бы однозначны. Причем каждой области соответствует свой сохраняющийся импульс и момент импульса. Т.е. заданному метрическому тензору соответствует множество импульсов и моментов импульса. Скорость тел определяется по другим уравнениям и определяет тензор энергии импульса материи.

Но как определить запаздывание вычисленных метрических тензоров. Для этого необходимо определить метрический тензор с учетом запаздывания по формуле

$$g_{lk\alpha} = \sum_{\mathbf{n}_1 \ldots \mathbf{n}_N = 1}^{\infty} h_{lk\alpha \mathbf{n}_1 \ldots \mathbf{n}_N}(s) \varphi_{\mathbf{n}_1 \ldots \mathbf{n}_N}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)$$
$$\mathbf{x}_\alpha = \sum_{\mathbf{n}_1 \ldots \mathbf{n}_N = 1}^{\infty} z_{\alpha \mathbf{n}_1 \ldots \mathbf{n}_N}(s) \varphi_{\mathbf{n}_1 \ldots \mathbf{n}_N}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) \quad .$$

Где в индексе $\mathbf{n}_k = (n_{k0}, n_{k1}, n_{k2}, n_3)$, а величина $\mathbf{x}_\alpha$ четырехмерная координата α тела. Подставить в уравнение ОТО, умножить на величину $\varphi_{\mathbf{m}_1 \ldots \mathbf{m}_N}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)$ и проинтегрировать по четырехмерным координатам. Для этого необходимо ввести функции координат для каждого тела $\mathbf{y}_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta, \alpha, \beta = 1, \ldots, N, l \neq k$ в зависимости от метрического интервала и решить уравнение движения (1), при известных метрических тензорах (2), (5), (6). Это определит движение каждого тела с учетом запаздывания и распределение метрического интервала в пространстве и во времени.

При этом производная от величины метрического интервала равна

$$\frac{\partial s}{\partial x_\beta^p} = \frac{\partial \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{N} g_{ik\alpha} dx_\alpha^i dx_\alpha^k}}{\partial x_\beta^p} = \frac{g_{ik\beta}(\delta_p^i dx_\beta^k + \delta_p^k dx_\beta^i) + \frac{\partial g_{ik\alpha}}{\partial x_\beta^p} dx_\alpha^i dx_\alpha^k}{2\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{N} g_{ik\alpha} dx_\alpha^i dx_\alpha^k}} =$$

$$= g_{pk\beta} \frac{dx_\beta^k}{ds} + \frac{\partial g_{ik\alpha}}{\partial x_\beta^p} \frac{dx_\alpha^i}{ds} dx_\alpha^k \qquad .$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x_\beta^p \partial x_\gamma^q} = \frac{\partial g_{pk\beta}}{\partial x_\gamma^q} \frac{dx_\beta^k}{ds} + \frac{\partial g_{qk\gamma}}{\partial x_\beta^p} \frac{dx_\gamma^k}{ds}$$

Получим систему нелинейную обыкновенных автономных дифференциальных уравнений относительно $h_{lk\alpha\mathbf{n}_1...\mathbf{n}_N}(s), z_{\alpha\mathbf{n}_1...\mathbf{n}_N}(s)$ относительно второй производной по метрическому тензору. Решение этих уравнений описано в [3], причем в случае наличия комплексных координат положения равновесия, эти решения являются комплексными. Физический смысл комплексного решения см. [4].

Но какой суммарный параметр можно определить для системы N тел. Оказывается это псевдотензор энергии-импульса. Причем определится импульс и момент импульса каждого тела. Определяется псевдотензор энергии-импульса каждого тела, который суммируется, образуя суммарный псевдотензор энергии-импульса.

Выводы

Решение задачи по обобщению уравнений ОТО на множество тел показало, что существует $6N$ мерный метрический тензор ОТО для N тел. На каждое тело воздействуют свои компоненты метрического тензора ОТО, зависящие от координат всех N остальных тел, так же как и разную суммарную силу, действующую на одно тело в случае классической задачи N тел. При этом, как показано в статье, задачу определения движения каждого из N тел можно описать нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, где аргументом является значение метрического интервала.

Вычислен метрический тензор каждого тела в случае его зависимости от модуля расстояния других тел до этого каждого тела.

Список литературы

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля т.II, М.: Наука,1973,564с.
2. *Коренев Г.В.* Тензорное исчисление М.:, издательство МФТИ,2000, 240с.

3. *Якубовский Е.Г.* Комплексные решения уравнений в частных производных. Международный независимый институт Математики и Систем «МиС», №8, 2014, с. 60-66
http://math-systems.ru/files/Arhiv/19-20.09.2014/mis8.pdf#page=66

4. *Якубовский Е. Г.* Модель комплексного пространства и распознавание образов. На стыке наук. Физико-химическая серия. Т.2, Казань, - 2014, стр. 186-187.
http://istina.msu.ru/media/publications/article/211/bd0/6068343/raspoznavobrazovwithouteqution.pdf