Точное решение уравнения Навье – Стокса

при частном случае отрицательного давления -a/r

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Получено точное решение уравнения Навье – Стокса в случае давления, равного потенциалу в ядре атома. При этом получается счетное количество решений со счетным количеством энергий состояния.

1. Точное решение уравнения Навье - Стокса

Исследование решения уравнения Навье – Стокса см. [1]. Ситуация с решением уравнения Навье – Стокса аналогична ситуации с решением уравнения Шредингера. При этом имеется в общем случае счетное количество решений. Это не удивительно, ведь уравнение Шредингера сводится к уравнению Навье – Стокса. Докажем это. Для чего запишем уравнение Шредингера и преобразуем его, воспользовавшись тождеством $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_l^2} = \psi[\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2} + \frac{1}{\psi^2}(\frac{\partial \psi}{\partial x_l})^2]$

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_l^2} + U\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi\sum_{l=1}^{3}[\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2} + \frac{1}{\psi^2}(\frac{\partial \psi}{\partial x_l})^2] + U\psi .$$

Разделив на массу $m\psi$, получим уравнение

$$i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m^2}\sum_{l=1}^{3}(\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l})^2 = -\frac{\hbar^2}{2m^2}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2} + U/m .$$

Получим уравнение в частных производных, взяв градиент от обеих частей уравнения, введем действительную скорость по формуле $\mathbf{V} = -i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi$.

$$\frac{\partial i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{m^2}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_l}\frac{\partial\nabla\ln\psi}{\partial x_l}=\frac{i\hbar}{2m}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2 i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi}{\partial x_l^2}+\nabla U/m$$

Подставляя значение скорости в преобразованное уравнение Шредингера, получим

$$\frac{\partial V_p}{\partial t}+\sum_{l=1}^{3}V_l\frac{\partial V_p}{\partial x_l}=\nu\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2 V_p}{\partial x_l^2}-\frac{\partial U}{\partial x^p}/m,\nu=\frac{i\hbar}{2m}.$$

Получим трехмерное уравнение Навье – Стокса с давлением, соответствующим потенциалу. Но задача гидродинамики отличается от уравнения Навье – Стокса, полученного из уравнения Шредингера, уравнением неразрывности.

В случае потенциала имеем решение уравнения Шредингера $\psi=R_{nl}(\eta)Y_{lm}(\theta,\varphi);R_{nl}(\eta)=\eta^l\exp(-\eta/2)L_{n+l}^{2l+1}(\eta)$. Где используются атомные единицы, которые в пересчете на классическое решение равны плотности, единицы длины и времени $\rho,\frac{\nu^2\rho}{\alpha},\frac{\nu^3\rho^2}{\alpha^2}$, где давление определяется по формуле $p=-\alpha/r$.

Тогда радиус Бора равен $a_0=-\frac{\nu^2\rho}{\alpha}$. Энергия равняется $E=\frac{i\nu^3\rho^2}{\alpha}$.

Величина безразмерного радиуса равна $\rho=-\frac{nr\alpha}{\nu^2\rho}$. Причем в формулы для величины энергии и значения радиуса Бора, вместо постоянной Планка, надо подставлять значение $-2i\nu m$.

Тогда решение гидродинамической задачи и решение уравнения Шредингера связаны соотношением $V_k=-2\nu\frac{\partial\ln\psi_{nlm}}{\partial x^k}=-2\nu\frac{\partial\ln R_{nl}(\eta)Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial x^k}$, где

$$\eta = -\frac{\alpha}{\nu^2 \rho}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \theta = \arctan\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}, \varphi = \arg(x_2 + ix_1) = \arctan\frac{x_1}{x_2}.$$

Причем энергия состояния мнимая и равна $E_n = -\frac{i\nu^3\rho^2}{2\alpha n^2}$, а безразмерный радиус отрицательный. При этом имеется счетное количество решений гидродинамической задачи.

При этом радиальная скорость равна

$$V_\rho = -2\nu\left(\frac{\partial \ln \psi_{nlm}}{\partial \eta} + \eta^{-1}\right) = -2\nu\left[\frac{\partial[l \ln \eta - \eta/2 + \ln L_{n+l}^{2l+1}(\eta)]}{\partial \eta} + \eta^{-1}\right] =$$
$$= \nu\left[1 - 2l/\eta - 2\frac{\partial \ln L_{n+l}^{2l+1}(\eta)}{\partial \eta} - 2\eta^{-1}\right].$$

В силу отрицательности безразмерного радиуса η скорость частиц вакуума, описывающих элементарные частицы положительна. При этом безразмерное время, описывающее систему мнимое. Оно равно $-\frac{i\nu^3\rho^2}{\alpha^2}$, и в силу мнимости кинематической вязкости является мнимым. Мнимость времени означает вращение или колебание системы, описываемой мнимым временем. Т.е. скорость системы колеблется во времени.

Литература

1. *Якубовский Е.Г.* Исследование решения уравнения Навье – Стокса, «Научное обозрение. Реферативный журнал», т.1, 2016, http://science-review.ru/abstract/pdf/2016/1/632.pdf