Решение систем нелинейных уравнений в частных производных с производной по времени первого порядка с коэффициентами, зависящими от времени

Е.Г. Якубовский

e-mail yakubovski@rambler.ru

Аннотация

В статье [1] получено решение системы квазилинейных уравнений в частных производных с первой производной по времени. Но данное решение получено без учета излучения энергии. В статье [2] получено решение с учетом излучения энергии но при не зависящих от времени коэффициентах. В предлагаемой статье это решение получено с учетом излучения энергии и с учетом зависимости коэффициентов от времени.

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений второго порядка с коэффициентами, зависящими от времени

$$\frac{\partial U_k}{\partial t}+\sum_{l,n=1}^{3}[a_{0nl}(t,x_1,...,x_3)+\sum_{s=1}^{3}a_{1nls}(t,x_1,...,x_3)U_s+...]\frac{\partial^2 U_k}{\partial x_l\,\partial x_n}+$$
$$+\sum_{l=1}^{3}[b_{0l}(t,x_1,...,x_3)+\sum_{s=1}^{3}b_{1ls}(t,x_1,...,x_3)U_s+...]\frac{\partial U_k}{\partial x_l}+ \quad .$$
$$+[c_0(t,x_1,...,x_3)+\sum_{s=1}^{3}c_{1s}(t,x_1,...,x_3)U_s+...]U_k=d_k(t,x_1,...,x_3),k=1,...,3$$

Решение ищем в виде $\mathbf{U}(t,x_1,...,x_3)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{y}_n(t)\varphi_n(x_1,...,x_3)$. При этом величина $d_k(t,x_1,...,x_3)$, это внешнее воздействие. Для решения этого уравнения подставляем разложение функции решения в уравнение в частных производных, умножаем на величину $\varphi_s(x_1,...,x_3)$ и интегрируем по пространству. Получим дифференциальное уравнение (1). Функции $\varphi_n(x_1,...,x_3)$ выберем синусоидальными, тогда если решение непрерывная функция, то коэффициенты ряда убывают как величина $1/n^2$ см. [3]§169 и процесс редукции возможен.

Исследуем систему нелинейных не автономных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_l}{dt} = Q_l(t, y_1,..., y_N), l = 1,..., N \qquad (1)$$

Исследуются комплексные и действительные решения задачи Коши этого дифференциального уравнения в случае действительных и комплексных начальных условиях, при действительном аргументе t. Начальные условия имеют вид $y_l(t_0) = y_l^0, l = 1,..., N$, где величина t_0 соответствует начальному моменту интегрирования, а величина y_l^0 в общем случае комплексная. Причем в случае действительных значениях $y_k, k = 1,..., N$, правая часть (1) может оказаться однозначной, но возможно комплексной.

В случае не автономного дифференциального уравнения можно определить частное решение и построить частное колебательное решение. Рассмотрим не автономную систему дифференциальных уравнений первого порядка в максимально общем виде

$$\frac{dx_n}{dt} = F_n[\varphi_n(t), \frac{x_1}{\exp[\int_0^t \lambda_1(u)du]},..., \frac{x_N}{\exp[\int_0^t \lambda_N(u)du]}], \lim_{t\to\infty} \lambda_n(t) = \lambda_{n\infty} \qquad (2)$$

Где величина λ_n мнимая. В окрестности частного решения $x_n^0 = \exp[\int_0^t \lambda_n(u)du] z_n$, где z_n определится из уравнения

$$\begin{gathered} \lambda_n z_n + \frac{dz_n}{dt} = F_n[\varphi_n(t), z_1,..., z_N] \\ \lim_{t\to\infty} \varphi_n(t) = const_n \end{gathered} . \qquad (3)$$

При условии $t \to \infty$ величина $\lambda_n(t) = \lambda_{n\infty}, \varphi_n(t) = const_n$ и величины z_n являются константами. Запишем систему нелинейных уравнений (3) на бесконечности времени

$$F_n(const_n, z_1, ..., z_N) = \lambda_{n\infty} z_n \qquad (4)$$

Из уравнения (4) определим величины z_m .

Для вычисления переменных z_n в другие моменты времени, нужно воспользоваться их значениями на бесконечности времени, и решать дифференциальное уравнение (2) с переменным значением $\varphi_n(t), \lambda_n(t)$, получим частное решение $x_n^0(t) = \exp[\int_0^t \lambda_n(u)du] z_n(t)$. В окрестности частного решения, система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{d(x_n - x_n^0)}{dt} = \frac{\partial F_n[\varphi_n(t), \dfrac{x_1^0}{\exp[\int_0^t \lambda_1(u)du]}, ..., \dfrac{x_N^0}{\exp[\int_0^t \lambda_N(u)du]}]}{\partial x_m}(x_m - x_m^0) =$$
$$= \frac{\partial F_n(const_n, z_1, ..., z_N)}{\partial x_m}(x_m - x_m^0)$$

И в случае если постоянная на бесконечности времени матрица $\dfrac{\partial F_n(const_n, z_1, ..., z_N)}{\partial x_m}$ имеет собственные числа с отрицательной действительной частью, решение системы (2) сходится к осциллирующей функции $x_n^0 = \exp[\int_0^t \lambda_n(u)du] z_n$, где величина λ_n мнимая, а величины z_n являются константами на бесконечности времени. Причем данная теорема имеет место при условии $\lambda_n(t) = 0$, как на бесконечности, так и всем отрезке интегрирования.

Систему дифференциальных уравнений (1) можно представить при не кратных положениях равновесия путем подстановки $y_l - b_l^s(t) = \sum_{k=1}^{N} g_{lk}(t) x_k$. Где величина $b_l^s(t)$ частное решение системы (1). При этом определятся собственные числа и собственные векторы линеаризованной системы (1).

$$[\frac{\partial Q_k}{\partial y_m}(t,b_1^s,...,b_N^s)-\Lambda_\alpha^s(t)\delta_{km}]g_{m\alpha}^s=0$$
$$|\frac{\partial Q_k}{\partial y_m}(t,b_1^s,...,b_N^s)-\Lambda_\alpha^s(t)\delta_{km}|=0$$
.

Система уравнений (1) в новых обозначениях запишется в виде

$$g_{nm}\frac{dx_m}{dt}+\frac{dg_{nm}}{dt}x_m=[\frac{\partial Q_n}{\partial y_m}+\frac{1}{2}\sum_{k,m=1}^{N}\frac{\partial^2 Q_n(t,b_1^s,...,b_N^s)}{\partial y_k\partial y_m}(y_k-b_k^s)+...](y_m-b_m^s).$$

Эту систему нелинейных уравнений можно представить в виде

$$\frac{dx_n}{dt}=\lambda_n^{s0}x_n+\frac{1}{2}\sum_{q,k,m=1}^{N}g_{nq}^{-1}(t)\frac{\partial^2 Q_q(t,b_1^s,...,b_N^s)}{\partial y_k\partial y_m}(y_k-b_k^s)(y_m-b_m^s)+...=$$
$$=\lambda_n^{s0}x_n+\sum_{q,k,m=1}^{N}g_{nq}^{-1}(t)\frac{\partial^2 Q_n(t,0,...,0)}{2\partial x_k\partial x_m}\times \quad . \quad (5)$$
$$\times x_k x_m+...=F_n(t,x_1,...,x_N),\lambda_n^{s0}=\Lambda_n^s-g_{nk}^{-1}\frac{dg_{km}}{dt}\frac{x_m}{x_n}$$

Систему уравнений (2) можно записать в виде

$$\frac{dx_l}{dt}=\exp[G_l(t,x_1,...,x_N)]\prod_{s=1}^{S}[x_l-a_l^s(t)], \qquad (6)$$

где введен множитель $\exp[G_l(t,x_1,...,x_N)]$, который равен $\exp[G_l(t,x_1,...,x_N)]=F_l(t,x_1,...,x_N)/\prod_{s=1}^{S}[x_l-a_l^s(t)]$. Величины a_l^s удовлетворяют условию $F_k(t,a_1^s,...,a_N^s)=\frac{da_k^s}{dt},k=1,...,N;s=1,...,S$, где величина S конечна. Покажем, что множитель $\exp[G_l(t,x_1,...,x_N)]$ в ноль не обращается в координатах положения равновесия.

При условии $x_l\to a_l^\alpha,l=1,...,N$ имеем конечный предел

$$\exp[G_l(t,a_1^\alpha,...,a_N^\alpha)]=$$
$$=\frac{\partial F_l(t,a_1^\alpha,...,a_N^\alpha)}{\partial x_l}/[(a_l^\alpha-a_l^1)...(a_l^\alpha-a_l^{\alpha-1})(a_l^\alpha-a_l^{\alpha+1})...(a_l^\alpha-a_l^S)]=$$
$$=\lambda_l^{\alpha 0}(t)/[(a_l^\alpha-a_l^1)...(a_l^\alpha-a_l^{\alpha-1})(a_l^\alpha-a_l^{\alpha+1})...(a_l^\alpha-a_l^S)]$$

Где произвели сокращение множителя x_l, числитель дроби в ноль не обращается, так как рассматриваются не совпадающие корни, являющиеся координатами положения равновесия. Показали, что этот множитель в ноль не обращается для всех уравнений одновременно.

При этом дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\frac{dx_l}{dh_l(t,t_0)}=\prod_{s=1}^{S}(x_l-a_l^s)$$
$$\frac{dh_l(t,t_0)}{dt}=\exp\{G_l[t,x_1(h_l),...,x_N(h_l)]\}, \qquad (7)$$

Т.е. свести к интегрируемой системе относительно почти монотонной функции $h_l=h_l(t,t_0)$.

Лемма 1. Необходимым и достаточным условием стремления неизвестной функции к устойчивым координатам положения равновесия является условие $h_l(t,t_0)\to\infty$, причем $t\to\infty$ при не кратных координатах положения равновесия.

Имеем соотношения

$$\exp[G_l(t,x_1,...,x_N)]\to\exp[G_l(t,a_1^s,...,a_N^s)]=$$
$$=\Lambda_l^s(t)/[(a_l^\alpha-a_l^1)...(a_l^\alpha-a_l^{\alpha-1})(a_l^\alpha-a_l^{\alpha+1})...(a_l^\alpha-a_l^S)];\lim_{t\to\infty}\lambda_l^{s0}(t)=\lim_{t\to\infty}\Lambda_l^s(t)$$

при условии $t\to\infty$ и значит $h_l(t,t_0)\to\infty, l=1,...,N$, как интеграл от константы. Справедлива и обратная лемма, при условии $h_l(t,t_0)\to\infty, l=1,...,N$, реализуется одно из устойчивых положений равновесия. Это следует из вида решения, при условии $h_l(t,t_0)\to\infty, l=1,...,N$ имеется отрицательная действительная часть у числа λ_l^s в формуле (7) согласно лемме 3, и решение стремится к координате положения равновесия a_l^s в формуле (4). При этом величина времени стремится к бесконечности.

Лемма 2. Решением дифференциального уравнения (1) является функция $x_l(t)$, удовлетворяющая формуле (7).

Для получения (7) разделим уравнение (6) на произведение множителей $x_l - a_l^s$ и умножим (7) на величину $dh_l(t,t_0)$. Раскладываем полученную дробь на сумму простых дробей и их интегрируем. Потенцируя полученное выражение, получим (7)

$$\prod_{s=1}^{S} (x_l - a_l^s)^{\lambda_l^s} \exp(2\pi i \lambda_l^s \Delta n_l^s) / \prod_{s=1}^{S} (x_l^0 - a_l^s)^{\lambda_l^s} = \exp[h_l(t,t_0) - \alpha_l(t,t_0)];$$

$$\lambda_l^s = 1/[(a_l^s - a_l^1)...(a_l^s - a_l^{s-1})(a_l^s - a_l^{s+1})...(a_l^s - a_l^S)], \qquad , (7)$$

$$\alpha_l(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \lambda_l^s(u) \frac{\dfrac{da_l^s(u)}{du}}{x_l - a_l^s(u)} du, \lim_{t\to\infty} a_l^s(t) = const_l^s$$

где все значения координат положения равновесия не кратные.

При решении в действительной плоскости существует формула

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \ln|\frac{x}{x_0}|. \qquad (*)$$

Можно доказать, что при интегрировании выражения получится интеграл

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(2x+q)dx}{(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)} = \int_{x_0}^{x} \frac{(2x+q)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} =$$
$$= \{\ln[(x-\alpha)^2+\beta^2] + \frac{q+2\alpha}{\beta}[\arctan\frac{x-\alpha}{\beta} + \pi n]\}|_{x_0}^{x}.$$

И значит, вычисление интеграла по модулю формула (*), является не правильным, а для получения арктангенса нужно использовать формулу (**).

В комплексной плоскости формула другая

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \ln|x| + i\arg x + 2i\pi n - \ln|x_0| - i\arg x_0 - 2i\pi n_0 = \ln x/x_0 + 2\pi i(n-n_0). (**)$$

Причем $n \neq n_0$ в случае, если между начальным моментом и текущим состоянием произошло изменение состояния, например, излучение энергии или получение энергии. При излучении энергии энергия состояния, зависящая от квантового числа n_0, начинает зависеть от квантового числа n. Причем может произойти излучение энергии между начальным моментом и текущим моментом, что выражается в изменении квантового числа n_l^s, что вызывает скачок координаты. Каждой ветви решения соответствует свое целое число. На координаты положения равновесия, определяющие стационарное решение, экспоненциальный множитель не оказывает влияние.

Переход с одного значения целого числа на другое связан с изменением фазы аргумента $\arg(x_l - a_l^s) - \arg(x_l^0 - a_l^s) = \pm 2\pi$, при изменении времени $h_l(t, t_0)$.

Лемма 3. Сумма коэффициентов λ_l^s по индексу s равна нулю, т.е. $\sum_{s=1}^{S} \lambda_l^s = 0$.

Для доказательства этого тождества рассмотрим полином $S-1$ степени относительно y

$$P(y) = \sum_{s=1}^{S} \frac{(y - a_l^1)...(y - a_l^{s-1})(y - a_l^{s+1})...(y - a_l^S)}{(a_l^s - a_l^1)...(a_l^s - a_l^{s-1})(a_l^s - a_l^{s+1})...(a_l^s - a_l^S)},$$

В точках положения равновесия $y = a_l^s, s = 1,...,S$ полином удовлетворяет $P(a_l^s) = 1$. В силу единственности полинома степени $S-1$, проходящего через S точек, получаем $P(y) = 1$, так как это значение удовлетворяет точкам аппроксимации. Распишем формулу для полинома, равного единице, разделив его на произведение $(y - a_l^1)...(y - a_l^S)$, получим

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{1}{(a_l^s - a_l^1)...(a_l^s - a_l^{s-1})(a_l^s - a_l^{s+1})...(a_l^s - a_l^S)(a_l^s - y)} + \\ + \frac{1}{(y - a_l^1)...(y - a_l^{s-1})(y - a_l^s)(y - a_l^{s+1})...(y - a_l^S)} = 0,$$

полагая, $y = a_l^{S+1}$ получим тождество $\sum_{s=1}^{S+1} \lambda_l^s = 0$, в случае, если имеется $S+1$ положение равновесия.

В случае если разлагается дробь

$$P(y)=\frac{Q_{S-1}(y)}{(y-a_l^1)...(y-a_l^{s-1})(y-a_l^{s+1})...(y-a_l^S)}.$$

Где $Q_{S-1}(y)$ полином степени $S-1$. Значение коэффициентов изменится, но свойство $\sum_{s=1}^{S}\lambda_l^s=0$ останется, $\lambda_l^s=\frac{Q_{s-1}(a_l^s)}{(a_l^s-a_l^1)...(a_l^s-a_l^{s-1})(a_l^s-a_l^{s+1})...(a_l^s-a_l^S)}$.

Докажем это. Для чего рассмотрим сумму

$$P(y)=\sum_{s=1}^{S}\frac{Q_{S-1}(a_l^s)(y-a_l^1)...(y-a_l^{s-1})(y-a_l^{s+1})...(y-a_l^S)}{(a_l^s-a_l^1)...(a_l^s-a_l^{s-1})(a_l^s-a_l^{s+1})...(a_l^s-a_l^S)}.$$

Эта сумма равна $P(y)=Q_{S-1}(y)$. Распишем формулу для полинома, равного $Q_{S-1}(y)$, разделив его на произведение $(y-a_l^1)...(y-a_l^S)$, получим

$$\begin{gathered}\sum_{s=1}^{S}\frac{Q_{S-1}(a_l^s)}{(a_l^s-a_l^1)...(a_l^s-a_l^{s-1})(a_l^s-a_l^{s+1})...(a_l^s-a_l^S)(a_l^s-y)}+\\+\frac{Q_{S-1}(y)}{(y-a_l^1)...(y-a_l^{s-1})(y-a_l^s)(y-a_l^{s+1})...(y-a_l^S)}=0\end{gathered}.$$

полагая, $y=a_l^{S+1}$ получим тождество $\sum_{s=1}^{S+1}\lambda_l^s=0$, в случае, если имеется $S+1$ положение равновесия.

Но чтобы реализовать решение, надо знать положения равновесия этой системы нелинейных уравнений.

Теорема 1. Рассматривается задача Коши при произвольных действительных начальных условиях для системы нормальных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (1). Случай вырожденного решения задачи Коши – положения равновесия, не рассматривается. В случае если у системы (1) имеются комплексно-сопряженные положения равновесия с действительной частью, то при конечном аргументе t действительное решение задачи Коши системы (1) при действительных начальных условиях стремится к бесконечности. Потом это решение переходит в комплексное решение, стремясь к положению равновесия, в случае, если комплексные координаты положения равновесия имеют действительную часть. При этом правую часть (1) считаем регулярной функцией, действительной при действительных аргументах. Она имеет конечное число не кратных положений равновесия.

Доказательство.

Если решать систему (2) при не кратных положениях равновесия, то получим согласно с леммой 2

$$\begin{aligned}\{-2\lambda_{iml}^{s}\arctan[(x_l-a_l^s)/b_l^s]+\lambda_{rel}^{s}\ln[(x_l-a_l^s)^2+(b_l^s)^2]\}|_{t_0}^{t}+\\ +\sum_k \lambda_l^k\ln(x_l-c_l^k)|_{t_0}^{t}=h_l(t,t_0),\end{aligned} \quad (8)$$

где $a_l^s+ib_l^s$ выделенное комплексное положение равновесия, c_l^s остальные положения равновесия. Коэффициенты λ_l^s удовлетворяют $\sum_s \lambda_l^s=0$ в соответствии с леммой 3. При этом в сумме $\sum_{s=1}^{S}\lambda_l^s$ величина действительной части λ_{rel}^s в случае комплексного значения λ_l^s участвует дважды и в силу того, что все числа λ_l^s удовлетворяют условию $\sum_s \lambda_l^s=0$, имеем формулу $2\lambda_{rel}^s+\sum_k \lambda_l^k=0$.

Обоснуем формулу (8). Для этого два комплексно сопряженных члена решения преобразуем (для упрощения записи индекс l опускаем)

$$\frac{\lambda_{re}^s+i\lambda_{im}^s}{x-a^s-ib^s}+\frac{\lambda_{re}^s-i\lambda_{im}^s}{x-a^s+ib^s}=\frac{2(x-a^s)\lambda_{re}^s-2b^s\lambda_{im}^s}{(x-a^s)^2+(b^s)^2}, \quad (9)$$

где $\lambda^s=\lambda_{re}^s+i\lambda_{im}^s$. После интегрирования (9) по аргументу x, получим формулу (8)

$$\lambda_{re}^s\ln[(x-a^s)^2+(b^s)^2]-2\lambda_{im}^s\arctan\frac{x-a^s}{b^s}.$$

Решение равняется

$$x_l(t)=a_l^s+b_l^s\tan D_l(t),$$

где

$$D_l(t)=\{\sum_k \lambda_l^k \ln(x_l-c_l^k)|_{t_0}^t+\lambda_{rel}^s \ln[(x_l-a_l^s)^2+(b_l^s)^2]\}|_{t_0}^t-$$
$$-h_l(t,t_0)\}/2\lambda_{iml}^s=\{\sum_k \lambda_l^k+2\lambda_{rel}^s+\sum_k \lambda_l^k \ln(1-c_l^k/x_l)+$$
$$+\lambda_{rel}^s \ln[(1-a_l^s/x_l)^2+(b_l^s)^2/x_l^2]-\sum_k \lambda_l^k \ln(x_l^0-c_l^k)-$$
$$-\lambda_{rel}^s \ln[(x_l^0-a_l^s)^2+(b_l^s)^2]-h_l(t,t_0)\}/2\lambda_{iml}^s, \sum_k \lambda_l^k+2\lambda_{rel}^s=0$$

При этом величина $\sum_k (\lambda_l^k c_l^k+2\lambda_{rel}^s a_l^s)$ действительная в силу существования комплексно-сопряженных положений равновесия. Т.е. имеем равенство при условии $|x_l|\to\infty$

$$x_l(t)=a_l^s+b_l^s \tan D_l(t)=$$
$$=a_l^s+b_l^s \tan\{[\sum_k \lambda_l^k \ln(1-c_l^k/x_l)+$$
$$+\lambda_{rel}^s \ln[(1-a_l^s/x_l)^2+(b_l^s)^2/x_l^2]+$$
$$-\sum_k \lambda_l^k \ln(x_l^0-c_l^k)-\lambda_{rel}^s \ln[(x_l^0-a_l^s)^2+(b_l^s)^2]-h_l(t,t_0)]/2\lambda_{iml}^s\}=. \quad (10)$$
$$=a_l^s+b_l^s \tan\{[-(\sum_k \lambda_l^k c_l^k+2\lambda_{rel}^s a_l^s)/x_l+0(1/x_l^2)]+$$
$$-\sum_k \lambda_l^k \ln(x_l^0-c_l^k)-\lambda_{rel}^s \ln[(x_l^0-a_l^s)^2+(b_l^s)^2]-h_l(t,t_0)]/2\lambda_{iml}^s\}$$

Это уравнение имеет решение, стремящееся к бесконечности при условии

$$\{\sum_k \lambda_l^k \ln(x_l^0-c_l^k)+\lambda_{rel}^s \ln[(x_l^0-a_l^s)^2+(b_l^s)^2]+h_l(t,t_0)\}/2\lambda_{iml}^s\to$$
$$\to\pi/2+\frac{Q_l}{x_l}+A_l\Delta t \quad (11)$$

Подставляя формулу (11) в формулу (10), получим

$$x_l(t)=a_l^s-$$
$$-\frac{2\lambda_{iml}^s b_l^s}{\sum_n \lambda_l^n \ln(1-c_l^n/x_l)+\lambda_{rel}^s \ln[(1-a_l^s/x_l)^2+(b_l^s)^2/x_l^2]+Q_l/x_l+A_l\Delta t}.$$

При этом это уравнение имеет решение $|x_l|\to\infty$, так как сводится к значению

$$\frac{\sum_n \lambda_l^n c_l^n + 2\lambda_{rel}^s a_l^s + Q_l}{x_l} + A_l \Delta t + S_l^2 (\frac{1}{x_l})^2 + ... = \frac{2\lambda_{iml}^s b_l^s}{x_l - a_l^s}.$$

Это уравнение определяет бесконечное решение, которое меняет знак бесконечности справа от координаты бесконечности.

При этом решение дифференциального уравнения при росте $H_l(t,t_0)$ согласно лемме 2, может иметь комплексные корни

$$\sum_k \lambda_l^k \ln(x_l - a_l^k)|_{t_0}^t = h_l(t,t_0) .$$

При этом, так как справедливо $\sum_k \lambda_l^k = 0$ согласно лемме 3, и положения равновесия имеют действительную часть, имеются числа с отрицательной действительной частью λ_l^k, значит, имеется сходимость к одному из положений равновесия. Действительное решение будет стремиться к бесконечности, причем нарушатся условия существования и единственности задачи Коши. При этом при бесконечности $h_l(t,t_0)$ согласно лемме 1 неизвестная функция будет стремиться к одному из положений равновесия. Это положение равновесия не может быть действительным, так как действительное решение бесконечно. Значит, решение будет иметь точку ветвления, и стремиться к комплексному положению равновесия. Значит, при комплексных положениях равновесия получается конечное комплексное решение при изменении $h_l(t,t_0)$. Т.е. в некоторой точке начнется комплексное решение.

Конец доказательства.

Приведем пример, описывающий это свойство дифференциального уравнения, переход к комплексному решению. Так для дифференциального уравнения может возникнуть комплексное решение, вместо бесконечного действительного решения

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2 .$$

Причем положения равновесия чисто мнимые $x = \pm i$, и значит, решение может не стремиться к положению равновесия. Причем действительное решение этого дифференциального уравнения быстро стремится к бесконечности $x = \tan[t - t_0 + \arctan(x_0)]$.

Используя неявную схему решения, получим следующее уравнение

$$x = x_0 + (1 + x^2)\Delta t + 0(\Delta t)^2.$$

Разрешая относительно неизвестной функции x, получим неявную схему

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4[x_0 + \Delta t + 0(\Delta t)^2]\Delta t}}{2\Delta t}.$$

Эта неявная схема с постоянным шагом правильно описывает стремление решения к бесконечности. Когда бесконечность достигнута, при условии $x_0 > 1/(4\Delta t) - \Delta t - 0(\Delta t)^2$ определится конечное комплексное решение. Численный счет этого уравнения подтвердил правильность проведенного анализа решения. Для этого необходимо разбить квадратный корень на действительную и мнимую часть и численно считать это уравнение. Вначале идет действительное решение, которое непрерывным образом переходит в комплексное решение. Действительная часть уменьшается, и остается вращение вокруг положения равновесия.

Решение с комплексными начальными данными определится формулой $x = \tan[t - t_0 + \arctan(x_0 + i\delta)]$ при любом t. Т.е. приближенно имеем

$$x(t)=-i\frac{\exp\{i[t-t_0+\arctan(x_0+i\delta)]-\exp\{-i[t-t_0+\arctan(x_0+i\delta)]\}}{\exp\{i[t-t_0+\arctan(x_0+i\delta)]\}+\exp\{-i[t-t_0+\arctan(x_0+i\delta)]\}}=$$

$$=-i\frac{\exp\{i[t-t_0+\arctan(x_0)]-\alpha\}-\exp\{-i[t-t_0+\arctan(x_0)]+\alpha\}}{\exp\{i[t-t_0+\arctan(x_0)]-\alpha\}+\exp\{-i[t-t_0+\arctan(x_0)]+\alpha\}}=$$

$$=-i\frac{\cos[t-t_0+\arctan(x_0)]-\sinh\alpha+i\sin[t-t_0+\arctan(x_0)]\cosh\alpha}{\cos[t-t_0+\arctan(x_0)]\cosh\alpha+i\sin[t-t_0+\arctan(x_0)]\sinh\alpha}=$$

$$=-i\frac{-1+i\tan[t-t_0+\arctan(x_0)]\coth\alpha}{1+i\tan[t-t_0+\arctan(x_0)]\tanh\alpha}.$$

$$=i-2i\exp\{2i[t-t_0+\arctan(x_0+i\delta)]\}+i\exp\{4i[t-t_0+\arctan(x_0+i\delta)]\}+...=$$

$$=i-2i\exp[2i(t-t_0+\alpha)-2\beta]+i\exp[4i(t-t_0+\alpha)-4\beta]+...$$

$$\arctan(x_0+i\delta)=\alpha+i\beta$$

При этом знаменатель этой дроби в ноль не обращается, так как модуль знаменателя не равен нулю. В случае обращения $\tan[t-t_0+\arctan(x_0)]$ в бесконечность, значение дроби, конечно, так как имеется такой же бесконечный член в числителе, а величина α не равна нулю.

Т.е. конечного решения задачи в действительной плоскости не существует. А в комплексной плоскости имеется конечное непрерывное решение.

При этом переходный процесс сопровождается излучением энергии, которую можно вычислить. На бесконечности времени имеется стационарное решение, которое без возбуждения сохраняет свое значение.

Действие для каждого дифференциального уравнения определяется по формуле

$$\frac{SE}{\hbar\omega}=\int_{\tau^0}^{\tau}(-\mathrm{H}d\tau+pd\rho);$$

Где все параметры системы уравнений в частных производных безразмерны, величина E - это энергия системы, величина ω - характерная частота колебаний системы, величина $\hbar$ - постоянная Планка. Траекторию частицы определяет минимум механического действия (принцип наименьшего действия). Исходя из этого аналогии, можно утверждать, что фаза комплексной волны пропорциональна механическому действию. В частности в случае квазиклассической частицы этот коэффициент пропорциональности равен постоянной Планка и волновая функция равна $\psi = \exp(-iS/\hbar)$. Значит, и в случае волны излучения этот коэффициент пропорциональности равен постоянной Планка. Причем это соотношение обобщается и на комплексные значения действия, импульса и энергии. При этом действие в случае комплексного решения равно $\frac{SE}{\hbar\omega} = -\arg\psi = -\arg\rho = i\ln\rho$.

Покажем, что собственное значение оператора импульса может быть комплексным. Радиальная проекция оператора импульса определяется по формуле

$$\widehat{p}_r\psi = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\psi \quad .$$
$$\psi = \exp(ikr/\hbar)/r;\ p_r = k$$

При комплексном значении $k, \mathrm{Im}\,k > 0$, получаем комплексное, ограниченное значение эрмитова оператора. Справедливость формулы для радиальной проекции оператора импульса следует из соотношения

$$\widehat{p}_r^2\psi = -\hbar^2\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\psi = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi$$

Причем как доказано в [4] задача 59, эта проекция оператора импульса является эрмитовой в действительном пространстве, но ничто не мешает определить собственное число комплексным, с положительной мнимой частью.

Мнимость эрмитова оператора импульса говорит о том, что модель действительного пространства, описывающего микромир, не объясняет всех экспериментов квантовой механики. Для описания всех экспериментов квантовой механики необходим переход в комплексное пространство. При этом оператор импульса в комплексном пространстве не эрмитов.

Значит, в случае действительного решения функция Гамильтона H, вычисленная по этим безразмерным формулам, где вместо времени используется безразмерная величина τ, равна константе, что и является первыми интегралами. Из этих формул имеем $\mathrm{H} = -\frac{\partial S}{\partial \tau}, p = \frac{\partial S}{\partial \rho}$.

$$\frac{E}{\hbar\omega} P(\rho,\tau) = -\frac{id \ln \rho}{d\tau} = -\frac{id\rho}{\rho d\tau}.$$

$$\frac{E}{\hbar\omega} p = \frac{id\rho}{\rho d\rho} = \frac{i}{\rho}$$

При этом первый интеграл равен без учета излучения

$$P(\rho,\tau) = \sum_{s=1}^{2} [\lambda^s \ln(\rho - a^s) + 2\pi i \lambda^s n^s] - (\tau - \tau_0); \qquad (12)$$

Дифференцируя разрешенное относительно τ уравнение (12) по величине τ, получим $F(\rho)\frac{d\rho}{d\tau} = 1$, откуда имеем N первых интегралов, зависящих от времени, содержащих функцию Гамильтона, где величина $F(\rho) = \sum_{s=1}^{2} \frac{\lambda^s}{\rho - a^s}$.

$$P(\rho,\tau)E + \frac{i\hbar\omega}{\rho F(\rho)} =$$

$$= \sum_{s=1}^{2} [\lambda^s \ln(\rho - a^s) + 2\pi i \lambda^s n^s]E - \tau E + \frac{i\hbar\omega}{\rho \sum_{s=1}^{2} \frac{\lambda^s}{\rho - a^s}} = \mathrm{H}, \quad (13)$$

$$p = \frac{i\hbar\omega}{\rho E}$$

Так как, член пропорциональный постоянной Планка появляется только при наличии комплексного решения, значит, координата x_l комплексная и в ноль не обращается. При действительной координате этого члена нет.

Из второго уравнения (13) определим закон сохранения импульса, импульс частицы p и поля сохраняется. Первый член первого уравнения (13) назовем классическим значением энергии (так как она получается для макросистем при постоянной Планка равной нулю), а второй член квантовым значением энергии поля, так как она определяется значением постоянной Планка. Сумма этих энергий сохраняется. Квантовая часть безразмерной энергии поля имеет порядок $\frac{\hbar\omega}{E}$, и в макромире при большой энергии системы и малых частотах равна нулю. В микромире этот квантовый член сравним по величине с классическим членом. При этом первый интеграл зависит от N констант H. Первая формула (13) это закон сохранения энергии с учетом излучения квантовой энергии.

При этом правая и левая часть первого уравнения (13) может быть комплексной. Но при скачкообразном изменении квантового члена левой части (9), скачком изменится и классическая часть, причем изменится H, т.е. значение первого интеграл изменится.

Эта формула получена в предположении, что начальное и конечное состояние решения не одинаковы. Если между ними произошло излучение, то энергия системы изменится в соответствии со значением логарифма и появится зависимость от целого числа n^s, соответствующая разным ветвям логарифма. При этом определится значение ρ как функция квантового числа n^s из уравнений (13). Определение решения по формуле (13) может содержать точки ветвления решения. Но при этом первая производная от решения стремится к бесконечности в силу наличия точки ветвления, и значит, нарушаются условия единственности и существования решения задачи Коши этого обыкновенного дифференциального уравнения. При этом сходящийся ряд, описывающий решения в точке ветвления не существует, значит, решение задачи Коши в комплексной плоскости в точке ветвления не существует, а происходит скачок решения.

Переход с одного значения целого числа на другое связан с изменением фазы аргумента

$$\arg(\rho^{n^s} - a^s) - \arg(\rho^0 - a^s) = \pm 2\pi, \qquad (14)$$

при изменении времени $\tau - \tau_0$. Где после скачка имеем новое значение координаты ρ^0, соответствующее значению после скачка.

Как только граница ветви логарифма достигнута, происходит перестройка целого числа, изменение на единицу, и как следствие скачок решения задачи при неизменном значении P в первом интеграле (13) проявится зависимость $\rho = \rho(n^s)$. Такая перестройка решения возможна при приближении к точке ветвления, т.е. когда граница ветви логарифма достигнута. Скачок решения определяется зависимостью $\rho = \rho(n^s)$ при неизменной константе P в первом интеграле (13). При этом как скачкообразное, так и непрерывное изменение классической части энергии компенсируется изменением квантовой энергии. В случае действительных значений ρ никаких скачков не будет, квантовый член равен нулю, значит, величина n^s неизменна.

Получим значение энергии состояния, для фиксированного момента времени полагая в (9) $\mathrm{H} = E$

$$\mathrm{H} = \frac{i\hbar\omega}{\{1 - \sum_{s=1}^{2} [\lambda^s \ln(\rho - a^s) + 2\pi i \lambda^s n^s] + \tau - \tau_0)\}\rho \sum_{k=1}^{2} \frac{\lambda^k}{\rho - a^k}}.$$

Выводы.

Нелинейные уравнения в частных производных имеют квантовые эффекты излучения энергии в микромире. В макромире этот эффект пренебрежимо мал.

Список литературы

1. Якубовский Е.Г. Комплексные ограниченные решения уравнений в частных производных. Материалы международной научно-практической конференции. Теоретические и практические аспекты естественных и математических наук. Новосибирск: Изд. «Сибак», 2012, с. 19-30. http://sibac.info/index.php/2009-07-01-10-21-16/5809-2013-01-17-07-57-12

2. Якубовский Е.Г. Решение систем обыкновенных дифференциальных нелинейных уравнений первого порядка с учетом излучения. «Энциклопедический фонд России», 2015, 16стр.
http://russika.ru/userfiles/390_1439696711.pdf

3 Смирнов В.И. Курс высшей математики т.2, М.: Наука. 1974, 655стр.

4 Flugge S. Practicle Quantum Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1971, 338