Особенности решения нелинейного уравнения для скалярного поля

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Аннотация

Решение уравнения для скалярного поля в действительной плоскости получено в пространстве обобщенных функций. Комплексное решение этого уравнения конечно. Решим это уравнение в комплексной плоскости.

В статье [1] доказывается, что решение системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с комплексными координатами положения равновесия быстро стремится к бесконечности, являясь обобщенной функцией. В случае действительных координат положения равновесия действительное решение конечно. При этом в случае комплексных начальных условий, эта система нелинейных дифференциальных уравнений имеет конечное комплексное решение. Перенормировки в квантовой теории поля возникли из-за стремления действительного решения к бесконечности, т.е. действительное решение является обобщенной функцией, при наличии комплексных координат положения равновесия. Простейшей системой, для которой используется перенормировка, является плотность лагранжевой функции скалярного поля, который в случае комплексного скалярного поля имеет вид

$$L(\psi,\psi^*) = (\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi^*) - m^2 \psi\psi^* - g(\psi\psi^*)^2/2 \qquad (1)$$

При этом тензор плотности энергии и импульса равен

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \psi^* \partial_\nu \psi + \partial_\nu \psi^* \partial_\mu \psi - L g_{\mu\nu}$$

При этом плотность энергии и импульса равна

$$T_{00} = \hbar\left(\frac{\partial \psi^*}{c\partial t}\frac{\partial \psi}{c\partial t} + \nabla\psi^* \nabla\psi + m^2 c^2 \psi^* \psi / \hbar^2\right).$$

$$cT_{i0} = \hbar\left(\frac{\partial \psi^*}{c\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{c\partial t}\right)$$

Тензор плотности энергии и импульса является действительным, причем плотность энергии является положительно определенной.

При этом поле ψ имеет размерность $cm^{-1/2}s^{-1/2}$.

А импульс и энергия поля равны

$$P_\mu = \int T_{\mu 0} d^3 x .$$

Покажем, что собственное значение оператора импульса может быть комплексным. Радиальная проекция оператора импульса определяется по формуле

$$\hat{p}_r \psi = -i\hbar(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r})\psi \quad .$$
$$\psi = \exp(ikr/\hbar)/r; p_r = k$$

При комплексном значении $k, \mathrm{Im} k > 0$, получаем комплексное, ограниченное значение эрмитова оператора. Справедливость формулы для радиальной проекции оператора импульса следует из соотношения

$$\hat{p}_r^2 \psi = -\hbar^2 (\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r})(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r})\psi = -\hbar^2 (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r})\psi$$

Причем как доказано в [3] задача 59, эта проекция оператора импульса является эрмитовой в действительном пространстве, но ничто не мешает определить собственное число комплексным, с положительной мнимой частью. В комплексном пространстве для волновой функции надо ввести область определения.

Покажем, что собственное значение энергии может быть комплексным. Так для ямы постоянной глубины U_0 размером a, см. задачу в [1] к параграфу §22. Вне ямы решение имеет вид $\psi_n = b\exp(\pm\chi_n x), \chi_n = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E_n)}$. Внутри ямы решение ищем в виде

$\psi_n = c\sin(k_n x + \delta), k_n = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}$.

Условие непрерывности волновых функций ψ'_n / ψ_n на границе ямы, определяет решение

$$\sin\delta = \frac{k_n\hbar}{\sqrt{2mU_0}} \qquad\qquad \sin(k_n a+\delta) = -\frac{k_n\hbar}{\sqrt{2mU_0}}$$

Вычисления надо производить аккуратно, с учетом всех тонкостей периодических функций. При этом имеем одинаковые ветви у арксинуса $\delta = (-1)^p \arcsin\frac{k_n\hbar}{\sqrt{2mU_0}} + \pi p, k_n a + \delta = -(-1)^p \arcsin\frac{k_n\hbar}{\sqrt{2mU_0}} + \pi p$. При условии p нечетном, получаем уравнение, где в неявном виде задано значение энергии

$$k_n a = 2\arcsin\frac{k_n\hbar}{\sqrt{2mU_0}} = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}a = 2\arcsin\sqrt{\frac{E_n}{U_0}} \qquad (1.1)$$

Откуда определится конечное число действительных и счетное количество комплексных значений энергии E_n во всем пространстве. Комплексное значение E_n получается при значении аргумента у арксинуса больше единицы.

При комплексной энергии образуются квазистационарные состояния с комплексной волновой функцией. Это состояние продлится не долго, частица перейдет на действительные уровни энергии. Обозначим $y = \arcsin(\frac{(4n+2\varphi_n)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}})$, перепишем эту формулу для аргумента, больше единицы

$$y = -i\ln[i\frac{(4n+2\varphi_n)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}} + \sqrt{1-(\frac{(4n+2\varphi_n)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}})^2}\,]] + 2\pi n,$$

откуда имеем

$$k_n a = 4\pi n + 2\varphi_n, \varphi_n = \arg[\sqrt{1-(\frac{(4n+2\varphi_n)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}})^2} + i\frac{(4n+2\varphi_n)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}}].$$

Где величина φ_n определится из нелинейного уравнения.

Для комплексного корня имеем значение $y = \arcsin(\frac{(4n+1)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}})$

$y=-i\ln\{i\frac{(4n+1)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}}[1+\sqrt{1-(\frac{a\sqrt{2mU_0}}{(4n+1)\pi\hbar})^2}]\}+2\pi n+O(\frac{a\sqrt{2mU_0}}{(4n+1)\pi\hbar})$, где для арксинуса использовано главное значение, как для квадратного корня, а для образовавшегося логарифма имеется счетное количество ветвей. Асимптотика решения для комплексного корня равна

$$k_n a=4\pi n-2i\ln\{i\frac{(4n+1)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}}[1+\sqrt{1-(\frac{a\sqrt{2mU_0}}{(4n+1)\pi\hbar})^2}]\}+O(\frac{a\sqrt{2mU_0}}{(4n+1)\pi\hbar})= \\ =\pi(4n+1)-2i\ln\frac{(4n+1)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}}+O(\frac{a\sqrt{2mU_0}}{(4n+1)\pi\hbar}).$$

Причем для комплексного корня при большом значении n выполняется $\frac{(4n+1)\pi\hbar}{a\sqrt{2mU_0}}>>1$. Т.е. имеем

$$\chi_n=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E_n)}=\sqrt{-a+bi}=\sqrt{a^2+b^2}\exp(i\varphi),\varphi\in[\pi/4,\pi/2],$$

при условии, что мнимая часть b положительная. При этом вне стационарной ямы знак величины b определяется знаком $\mathrm{Im}(U_0-E_n)$, т.е. этот знак положителен в силу отрицательной мнимой части у величины $E_n=\frac{k_n^2\hbar^2}{2m}$. Имеем условие $\mathrm{Re}\chi_n>0$ в силу условия на фазу χ_n, и значит, затухание сохранится при колебательном решении. При этом ветви всех функций, входящих в одну формулу, одинаковы. Внутри стационарной ямы волновая функция равна

$$\psi_n=c[\sin(\mathrm{Re}k_n x+\delta)\cosh(\mathrm{Im}k_n x)+i\cos(\mathrm{Re}k_n x+\delta)\sinh(\mathrm{Im}k_n x)]= \\ =c\sqrt{\sin^2(\mathrm{Re}k_n x+\delta)+\sinh^2(\mathrm{Im}k_n x)}\exp(i\varphi),0<x<a.$$

Получается, что комплексное решение при любом n имеет физический смысл.

Чем же это объясняется? Дело в том, что модель действительного пространства для объяснения всех эффектов квантовой механики не достаточна. Возникают комплексные собственные значения. Значит надо строить модель квантовой механики в комплексном пространстве. При этом операторы импульса во всем комплексном пространстве не будут эрмитовые. Докажем, что оператор импульса не эрмитов в комплексном пространстве. Он равен $\hat{p}_x\psi = -i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$, для чего вычислим скалярное произведение, оно окажется равным в случае действительного пространства

$$<\varphi|\,\hat{p}_x\psi> = \int \varphi^*\hat{p}_x\psi dxdydz = -i\hbar\int \varphi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdydz = i\hbar\int\psi\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}dxdydz$$

$$<\hat{p}_x\varphi\,|\,\psi> = \int[-i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial x}]^*\psi dxdydz = i\hbar\int\psi\frac{\partial\varphi^*}{\partial x^*}dxdydz$$

.

Если пространство действительно, то получим равенство скалярных произведений, и значит оператор импульса эрмитов. Но если пространство комплексное, то равенства выражений не будет и оператор импульса будет не эрмитов. Аналогичное доказательство можно реализовать для оператора координаты $\hat{x}G = xG = i\hbar\dfrac{\partial G}{\partial p_x}$ в импульсном представлении. Оказывается в комплексном пространстве операторы, импульса и координаты являются операторами антисимметричными, и не являются эрмитовыми.

Для оператора энергии в [2]§8 доказывается, что справедливо равенство $\int\psi^*(\hat{H}^{*T} - \hat{H})\psi dxdydz = 0$, для произвольных функций ψ. Но в комплексном пространстве $\hat{H}^{*T} = -\dfrac{\partial}{\partial x^{*2}} - \dfrac{\partial}{\partial y^{*2}} - \dfrac{\partial}{\partial z^{*2}} + U \neq \hat{H} = -\dfrac{\partial}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y^2} - \dfrac{\partial}{\partial z^2} + U$, таким образом определенный гамильтониан не является эрмитовым в комплексном пространстве, а является эрмитовым в действительном пространстве. Т.е. оператор $\hat{H}\psi = i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$ в комплексном пространстве не является эрмитовым. Определение энергии комплексной во втором примере, говорит о том, что действительное пространство не описывает все свойства квантовой механики, и надо строить квантовую механику в комплексном пространстве.

Значит, определение действительной плотности функции Лагранжа не включает комплексное значение энергии и импульса и является ошибочным. Плотность лагранжевой функции надо определять без учета комплексно сопряженных членов в виде

$$L(\psi)=\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi/2-m^2\psi^2/2-g\psi^4/4 \qquad (2)$$

Плотность лагранжевой функции (2) сводится к уравнению с комплексным скалярным квантовым полем

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial {x^0}^2}=\Delta\psi+m^2\psi+g\psi^3. \quad (3)$$

Уравнение для скалярного поля имеют вид

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^0\partial x_0}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^l\partial x_l}-g\psi^3-m^2c^2\psi/\hbar^2;$$

Воспользуемся формулами

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^0\partial x_0}=\psi[\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x^0\partial x_0}+\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^0}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_0}],\frac{\partial^2\psi}{\partial x^l\partial x_l}=\psi[\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x^l\partial x_l}+\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^l}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_l}]$$

Подставим эти формулы в дифференциальное уравнение

$$-\psi[\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x^0\partial x_0}+\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^0}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_0}]=\psi[\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x^l\partial x_l}+\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^l}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_l}]-g\psi^3-m^2c^2\psi/\hbar^2$$

Разделим это уравнение на величину $\psi m^2c^2/\hbar^2$ и возьмем градиент от этого уравнения, получим

$$-\frac{\hbar^2}{m^2c^2}[\frac{\partial^2\nabla\ln\psi}{\partial x^0\partial x_0}+2\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^0}\frac{\partial\nabla\ln\psi}{\partial x_0}]=\frac{\hbar^2}{m^2c^2}[\frac{\partial^2\nabla\ln\psi}{\partial x^l\partial x_l}+2\frac{\partial\ln\psi}{\partial x^l}\frac{\partial\ln\nabla\psi}{\partial x_l}]-$$
$$-2g\psi\nabla\psi\frac{\hbar^2}{m^2c^2}$$

Воспользуемся равенством, связывающим детерминированную скорость частиц вакуума с нелинейным уравнением для скалярного поля $u_k=-\frac{i\hbar}{mc}\nabla_k\ln\psi, k=0,...,3$, получим уравнение (описание частиц вакуума получено из их свойства иметь кинематическую вязкость $\nu = i\frac{\hbar}{2m}$ и из эмпирической плотности вакуума)

$$\frac{i\hbar}{2mc}\frac{\partial^2 u^k}{\partial x^0 \partial x_0} + u_0 \frac{\partial u^k}{\partial x_0} = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 u^k}{\partial x^l \partial x_l} - u^l \frac{\partial u^k}{\partial x_l} - g\psi u^k \frac{\hbar}{mc}$$

Получим детерминированное уравнение, аналог релятивистского уравнения Навье – Стокса с кинематической вязкостью $\nu = i\frac{\hbar}{2m}$ с учетом нелинейного члена

$$u_0 \frac{\partial u^k}{\partial x_0} + u^l \frac{\partial u^k}{\partial x^l} = -\frac{i\hbar}{2mc}\left(\frac{\partial^2 u^k}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2 u^k}{\partial x^l \partial x_l}\right) - gu^k \frac{\hbar}{mc}\exp\left(\int iu_n dx^n mc/\hbar\right).$$

Т.е. комплексная скорость является пульсирующей. Решение ищем в виде $u^k = \sum_{n=0}^{N} a_n^k(x_0) g_n(x_0, \mathbf{x})$, величина $g_n(x_0, \mathbf{x})$ обращает волновое уравнение в ноль, подставляем в уравнение, умножаем на величину $g_m^*(\mathbf{x})$ и интегрируем по пространству, получим

$$\frac{i\hbar}{2mc}\frac{d^2 a_m^k(x_0)}{dx^0 dx_0} + F_{mn} a_n^k(x_0) + G_{mnp} a_{n0}(x_0)\frac{da_p^k(x_0)}{\partial x_0} + H_{mnpl} a_n^l(x_0) a_p^k(x_0) =$$
$$= -K_{mn}(x_0) a_n^k(x_0) \exp[iS_n^p a_{np}(x_0) + i\int_0^{x_0} S^p a_{p0}(u) du]$$

Разрешаем это уравнения относительно интеграла в фазе, получим дифференциальное уравнение

$$\int_0^{x_0} S^p a_{p0}(u) du = i \ln K_{mn}^{-1}(x_0)\frac{d^2 a_n^k(x_0)}{dx_0^2} + F_{mk}\left[\frac{da_n^k(x_0)}{dx_0}, a_n^l(x_0)\right] -$$
$$- 2\pi n + S_n^p a_{np}(x_0) - \ln a_n^k(x_0).$$

Дифференцируем это уравнение по времени, получим

$$S^p a_{p0}(x_0) = i\frac{K^{-1}_{mn}(x_0)\dfrac{d}{dx_0}\dfrac{d^2 a^k_n(x_0)}{dx_0^2} + F'_{mk}[\dfrac{da^k_n(x_0)}{dx_0}, a^l_n(x_0), x_0]}{K^{-1}_{mn}(x_0)\dfrac{d^2 a^k_n(x_0)}{dx_0^2} + F_{mk}\dfrac{da^k_n(x_0)}{dx_0}, a^l_n(x_0)]} + S^p_n\frac{da_{np}(x_0)}{dx_0}.$$

Это дифференциальное уравнение имеет точки ветвления, оно сводится к виду

$$K^{-1}_{mn}(x_0)\frac{d^3 a^k_n(x_0)}{dx_0^3} = G_{mk}[\frac{d^2 a^k_n(x_0)}{dx_0^2}, \frac{da^k_n(x_0)}{dx_0}, a^l_n(x_0), x_0].$$

Причем когда матрица $K^{-1}_{mn}(x_0)$ имеют нулевой определитель, возникает точка ветвления решения. При определенном значении решения, третья производная считается с точностью до константы, или возникает бесконечная третья производная. Равенство нулю третьей производной означает плоскую кривую. Бесконечность третьей производной означает, что кривая в конфигурационном пространстве является очень не плоской. Т.е. импульс частицы является сильно изрезанным. О движении по инерции в случае нелинейного квантового поля нельзя говорить. И это в отсутствии электромагнитного или другого вида взаимодействия, а следствие нелинейности уравнения. Такая изрезанная траектория может образоваться вследствие распада частицы, т.е. момент распада x_0 соответствует равенству нулю определителя. Бесконечности величины $\frac{d^3 a^k_n(x_0)}{dx_0^3}$ означает конечный скачок второй производной $\frac{d^2 a^k_n(x_0)}{dx_0^2}$. При этом изменяется квантовое число n. Т.е. гамильтонова плотность системы $H(\psi) = \partial_0\psi\partial^0\psi/2 + (\frac{\partial\psi}{\partial x^l})^2/2 + m^2\psi^2/2 + g\psi^4/4$ изменится, энергия расходуется на образование новых частиц. Причем энергия этого поля равна

$$E=\int \hat{H}(\psi)d^3x=\int[\partial_0\psi\partial^0\psi/2+(\frac{\partial\psi}{\partial x^l})^2/2+m^2\psi^2/2+g\psi^4/4]d^3x.$$

Где изменилось определение плотности вероятности. Оно может быть комплексным и нормировка квантового поля не $\psi/\sqrt{\int\psi^*\psi d^3x}$. При этом интеграл $\int\psi^2 d^3x=\int|\psi|^2(\cos 2\arg\psi+i\sin 2\arg\psi)d^3x$ может равняться нулю и нормировка волновой функции невозможна.

Это допущение основано, на том, что условие $(\psi_n|\hat{A}|\psi_n)=E_n<\psi_n|\psi_n>$ при условии $\hat{A}\psi_n=E_n\psi_n$ можно разрешить с помощью предельного перехода вне зависимости от нормы $<\psi_n|\psi_n>$.

Собственное значение в случае дискретного спектра не зависит от нормы собственного вектора. В самом деле, из равенства $A_{ik}g_{k\alpha}=\lambda_\alpha g_{i\alpha}$ следует значение собственного числа $\lambda_\alpha=g^{-1}_{\alpha i}A_{ik}g_{k\alpha}$ вне зависимости от значения нормы собственного вектора. При этом в случае $A_{ik}=A_{ki}$ собственные векторы ортогональны, и значит, $g^{-1}_{\alpha i}=g_{i\alpha}$. Причем любой симметричный оператор в случае дискретного спектра можно представить в виде $A_{ik}=<\psi_i|\hat{A}|\psi_k>$ и значит, его собственное число не зависит от нормы собственного вектора. Отметим, что в случае симметричного или антисимметричного оператора можно построить ортогональный базис, а в случае оператора общего вида собственные векторы могут быть не ортогональны. При этом собственное число все равно можно определить, используя обратную матрицу. Существует теорема, что в случае разных собственных значений у квадратной матрицы A_{ik} размерности N, существуют N независимых собственных вектора см. [4]§8, и значит, определитель, составленный из матрицы собственных векторов не нулевой, и матрица, обратная матрице из собственных векторов существует.

При этом в случае бесконечного количества собственных значений, выражение для собственного числа $\lambda_\alpha=g^{-1}_{\alpha i}A_{ik}g_{k\alpha}$ может расходиться, тогда определять собственное число надо с помощью предельного перехода, в случае нулевой нормы $<\psi_n|\psi_n>$. Но если предельный переход определит собственное число, значит, и сумма в формуле $\lambda_\alpha = g^{-1}_{\alpha i} A_{ik} g_{k\alpha}$ будет сходящейся, так как $\lambda_n = E_n$.

Условие существования ортогонального базиса не является необходимым для существования собственного числа, достаточно чтобы собственные векторы были независимы. В случае дискретного спектра, выбрав независимую систему функций можно определить матрицу этого преобразования $A_{ik} =<\psi_i|\hat{A}|\psi_k>$, а значит, и вычислить спектр для матрицы общего вида с разными собственными значениями.

В случае свободного поля нормировка осуществляется по формуле $\int \exp[2i(-Et + p_l x_l)/\hbar] d^3x = \exp(-2iEt/\hbar)\delta(p_1)\delta(p_2)\delta(p_3)(\pi\hbar)^3$. При этом величина средней координаты равна

$$\int x_k \exp[2i(-Et + p_l x_l)/\hbar] d^3x = \frac{i\hbar\partial}{2\partial p_k}\int \exp[2i(-Et + p_l x_l)/\hbar] d^3x =$$

$$= \exp(-2iEt/\hbar)\frac{-i\hbar\partial}{2\partial p_k}\delta(p_1)\delta(p_2)\delta(p_3)(\pi\hbar)^3$$

нормировав эту величину, получим

$$< x >= -i\hbar\frac{\partial \ln\delta(p_k)}{2\partial p_k} = -i\hbar\frac{\partial(\ln\frac{1}{\sigma_{p_k}\sqrt{2\pi}} - \frac{p_k^2}{2\sigma_{p_k}^2})}{2\partial p_k} = i\hbar\frac{p_k}{2\sigma_{p_k}^2}.$$

Если в качестве σ_{p_k} взять величину $\sigma_{p_k} = \hbar/2\sigma_{x_k}$, то получим для среднего значения координаты $< x_k >= i\sigma_{x_k}^2\frac{2p_k}{\hbar}$. При рассмотрении чисто действительного пространства величина средней координаты равна бесконечности.

В случае $< x_k^2 >$ получим значение

$$< x_k^2 >= -\frac{\hbar^2}{4}\frac{\partial^2 \delta(p_k)}{\delta(p_k)\partial p_k^2} = -\frac{\hbar^2}{4}(-\frac{1}{\sigma_{p_k}^2} + \frac{p_k^2}{\sigma_{p_k}^4}) =$$

$$= \sigma_{x_k}^2 (1 - \frac{4\sigma_{x_k}^2 p_k^2}{\hbar^2}) = \sigma_{x_k}^2 (1 - \frac{p_k^2}{\sigma_{p_k}^2})$$

В комплексном пространстве возможен отрицательный средний квадрат. Корень из среднего квадрата координаты величина мнимая и равна $i\sigma_{x_k}^2 p_k / \hbar = i\hbar p_k / \sigma_{p_k}^2$. Эта величина среднего квадрата координаты для одной частицы в свободном пространстве. Дисперсия координаты равна $< (x_k - < x_k >)^2 >=< x_k^2 > - < x_k >^2 = \sigma_{x_k}^2$.

Переход в комплексное пространство не меняет значение энергии для атома водорода и гармонического осциллятора, так как вычисленное значение энергии действительно при действительных волновых функциях, следовательно, определение средних величин не меняется.

Литература

1. *Якубовский Е.Г.* Комплексные решения уравнений в частных производных. VIII Международная Научно-практическая конференция «Актуальные вопросы развития инновационной деятельности в новом тысячелетии», Новосибирск, 2014г., стр.60-65

   http://math-systems.ru/files/Arhiv/19-20.09.2014/mis8.pdf#page=66

2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика Нерелятивистская теория т.III, Наука, М.,1969,768с.
3. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. Т.1, М.: Мир, 1974г, 338с.
4. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1980, 352стр.