

ОПИСАНИЕ РЕЖИМА ПЛАНИРОВАНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Е.Г. Якубовский,

E-mail Yakubovski@rambler.ru

DESCRIPTION OF A MODE OF PLANNING AIRCRAFT

Статья посвящена решению уравнения Навье - Стокса и неразрывности с помощью новых координат и построению на этой основе описания идеи планирования тела в вязкой жидкости. Решение уравнения Навье - Стокса потребовало перехода в двумерное пространство, эквивалентное трехмерному пространству. Скорость в этом двумерном пространстве является комплексной. Определена скорость потока в окружающем тело пространстве с помощью решения уравнения Навье - Стокса и уравнения неразрывности. Зная скорость потока, можно рассчитать силы, действующие на тело.

Article is devoted to the solution of the equation of Navier - Stokes and contiguity by means of new coordinates and to construction on this basis of the description of idea of planning of a body in viscous liquid. The solution of the equation of Navier - Stokes demanded transition to the two-dimensional space equivalent to three-dimensional space. Speed in this two-dimensional space is complex. Speed of a stream in space surrounding a body is defined by the solution of the equation of Navier - Stokes and the contiguity equations.

Knowing speed of a stream, it is possible to calculate the forces operating on a body.

Ключевые слова: планирование летательного аппарата; решение уравнения Навье – Стокса; комплексное пространство.

Keywords: aircraft planning; the solution of the equation of Navier – Stokes; complex space.

Введение

Статья посвящена решению уравнения Навье - Стокса и неразрывности с помощью новых координат и построению на этой основе описания идеи планирования тела в вязкой жидкости. Предварительная попытка построения алгоритмов расчета турбулентного и ламинарного режима см. [1]. Существуют ламинарные решения уравнения Навье - Стокса, которые получаются при нулевом конвективном члене см. [2]. Это решение соответствует малым числам Рейнольдса тела при соответствующих предположениях о симметрии задачи. Существуют приближенные аппроксимации конвективного члена, вводящие дополнительную вязкость, но эти решения логически не обоснованные и не точные [3,4,5,6]. Они сводят нелинейную задачу к линейной задаче, что не допустимо. Если численный счет турбулентного режима реализуется в действительной плоскости, то это вызывает существенные трудности, так как решение комплексное [7]. Трудности связаны с тем, что решение в действительной плоскости турбулентных режимов стремится к бесконечности. Корректный, не взрывной численный счет в турбулентной области решения возможен только в комплексной плоскости. При этом,

зная скорость потока, можно рассчитать силы, действующие на тело. Оказывается можно выбрать тело, для которого сумма сил, включающих силу сопротивления и силу тяжести, действующих на тело равна нулю, а тело движется по инерции. Это достигается за счет изменения направления подъемной силы, не только вертикальное, но и горизонтальное, толкающее. Подъемной силой назовем силу пропорциональную квадрату скорости тела, причем эта сила имеет не только вертикальное направление. Изменение направления подъемной силы связано со смещением направления следа. Возможность такого смещения доказывает существование отрыва пограничного слоя у длинной плоской пластины, что эквивалентно смещению следа. Ведь отрыв пограничного слоя, это и есть образование следа у плоской пластины. В частности при обтекании крыла самолета эту квадратичную силу связывают с вертикальной силой. В литературе толкающую квадратичную силу называют подсосывающей силой, и она действует по направлению движения тела. При этом потери энергии из-за вязкого трения восполняются из окружающей среды, которая охлаждается. Это возможно при определенной форме тела и его скорости, за счет того, что скорость является комплексной и при большой мнимой части ее квадрат действительной части отрицателен.

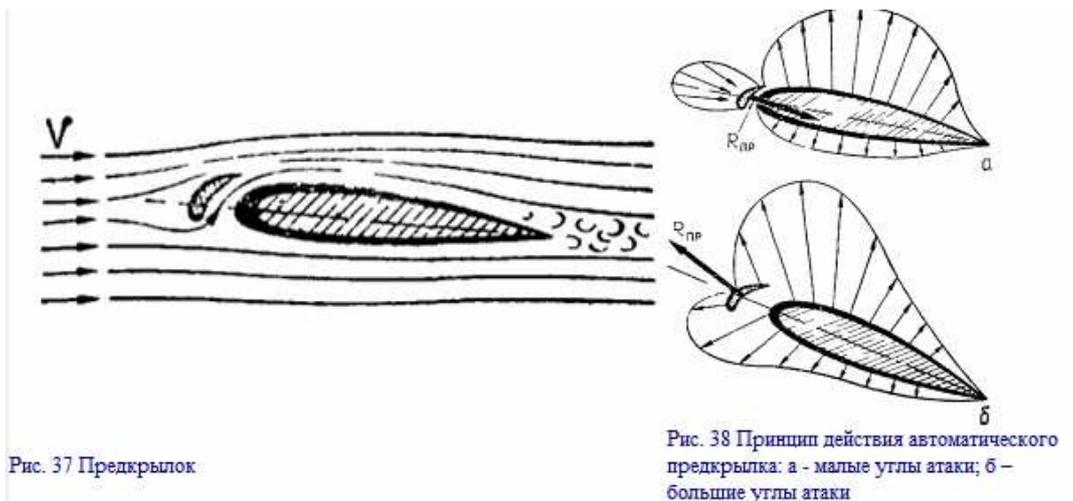
1. Построение комплексного уравнения Навье Стокса и уравнения неразрывности и их решение

Сначала опишем на основе решения уравнения Навье - Стокса кинематику жидкости, вызванную движущимся телом. Потом вычислим силы, действующие на тело. Покажем, что под действием этих сил тело с определенными свойствами в поле тяжести может двигаться поступательно, со скоростью, определяемой формой, весом тела, плотностью и кинематической вязкостью несжимаемой жидкости.

Движение по инерции в идеальной жидкости при отсутствии внешних сил, это известный факт (см. [8]). Оно реализуется для любого тела в трех перпендикулярных направлениях. В статье обосновывается возможность дополнительной компенсации силы тяжести и вязкого трения при движении в одном направлении. Это реализуется за счет того, что квадратичный по скорости член при определенной форме тела создающий подъемную силу, является толкающим, и при определенной скорости сумма всех сил, действующих на тело равна нулю. Это связано с тем, что описываемая скорость или число Рейнольдса жидкости является комплексной. Фаза комплексного числа Рейнольдса тела зависит от формы тела и оказывает влияние на силы, действующие на тело. Поэтому фаза числа Рейнольдса тела может быть такова, что подъемная сила является одновременно и толкающей силой.

Перечислим утверждения о возможности бесконечного планирования.

1. Принципиальная возможность, что тело может создавать толкающую силу следует из приведенных графиков сил, действующих на тело – крыло с предкрылками.



Приведенные графики взяты из Интернета из сайта D:\documents\html\АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ.mht.

2. При комплексной скорости среды и большой мнимой части кинетическая энергия среды, равная

$\rho V^2 / 2 = \rho[(\operatorname{Re} V)^2 - (\operatorname{Im} V)^2 + 2i \operatorname{Im} V \operatorname{Re} V] / 2$ становится отрицательной.

Отрицательной становится и энергия, связанная с вязкими силами, по формуле (7.7) из книги [9]

$$E = \mu \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{i,k=1}^3 \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right)^2 / 2 \right].$$

Эта действительная часть энергии вязкой жидкости может быть равна нулю, или быть отрицательной, так как скорость величина комплексная. Отрицательность действительной части энергии означает передачу энергии от среды к двигающемуся телу. При этом среда, совершая работу, охлаждается, причем подъемная сила изменяет свое направление, становясь толкающей силой, совершающей работу по преодолению вязкого трения. В холодильной машине при расширении газа с совершением работы, причем газ охлаждается, необходим дополнительная энергия уходящая на сжатие газа, для последующего расширения. В случае двигающегося тела, второй фазы нет, газ совершает работу, понижая свою температуру, по движению тела, причем вовлекаются все новые порции воздуха, которые и совершают работу. Т.е. тело, двигаясь, производит охлаждение воздуха. При этом вязкое трение вызывает повышение температуры газа. Такое аномальное поведение среды возможно при определенной форме тела и его скорости.

В книге [9] доказывается теорема о необратимости решения уравнения Навье – Стокса. Приведем это доказательство и покажем, что для комплексного решения оно не применимо. Допустим, имеем решение уравнения Навье – Стокса $\mathbf{V}(x, y, z, t), p(x, y, z, t)$. Тогда скорость при обращении времени будет менять знак

$$\mathbf{V}_1(x, y, z, t) = -\mathbf{V}(x, y, z, -t), p_1(x, y, z, t) = p(x, y, z, -t).$$

При этом существуют члены, которые не меняют знака, так как справедливо

$$\mathbf{V}_1 \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}, \frac{\partial p_1}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}.$$

кроме того, существуют члены, которые знак меняют, справедливо формула для вязкого трения

$$\Delta \mathbf{V}_1 = -\Delta \mathbf{V}.$$

При этом решение с прямым и обратным течением времени не могут удовлетворять уравнению Навье – Стокса. Но дело в том, что оператор Лапласа, ответственный за вязкие силы в случае комплексного решения равен нулю, и решение становится обратимым.

3. Покажем, как объяснить возникновение толкающей силы без понятия комплексной скорости. Согласно уравнению Бернулли относительно тупого носа и на бесконечности потока, имеем $\rho V^2 / 2 + p = p_0$, где p_0 давление на бесконечности. В носовой части тела действует отрицательное давление, равное $p - p_0$, которое подталкивает тело. Эта сила называется подсасывающей и действует на тело наряду с подъемной силой, равной разности давлений на верхней и нижней части крыла.

4. Возможность планирования тела подтверждается известным механизмом параллельного планирования. Так альбатросы планируют не в восходящих потоках, а в параллельно горизонтали ветре. Аналогичный механизм предлагается и для тела определенной формы, которая определяется в результате вычислений.

5. Возможность выбрать форму тела, что возникнет толкающая сила давления, следует из приближенного уравнения Бернулли. Если за задней кромкой тела имеется пространство, где скорость тела меньше чем у передней части тела, то задняя часть тела имеет большее давление и, следовательно, толкающую силу. Важно выбрать форму тела, чтобы эта сила была направлена.

Движение жидкости, вызванное движущимся телом, определяется с

помощью решения уравнения Навье – Стокса и уравнения неразрывности. Причем необходимо для вычисления сил, действующих на тело, описать как турбулентный след, так и пограничный слой. Обе эти области определяют силы, действующие на тело. При этом энергия, затраченная на приведение в движение окружающую среду, берется из этой же среды, причем температура среды сначала падает, приводя в движение окружающую среду, потом по мере пролета тела восстанавливает свою температуру, так как окружающая среда тормозится. Такое anomальное поведение среды возможно только при определенной скорости и форме тела при заданном весе.

Будем во введенном в конце 4 раздела пространстве (x, y) и соответствующем пространстве (s, w) , связанном $x + iy = \exp(\ln s + iw)$, решать уравнение неразрывности (1.2) и уравнение Навье Стокса (1.5) относительно комплексного числа Рейнольдса потока. При этом s играет роль радиуса цилиндрической системы координат, а w ее угол. От оси z задача не зависит. Сведение задачи в трехмерной системе координат к двумерной системе координат см. в разделе 4. При этом преобразовании трехмерное пространство разбивается на совокупность одинаковых двумерных пространств, описываемых одинаковыми уравнениями, и переходящих в трехмерное пространство с помощью специального преобразования. Отличие этих пространств, связано с комплексным радиусом тела. Фаза комплексного размера тела зависит от геометрии тела, и разная у тел разной формы. Эта фаза определяется в трехмерном пространстве в разделе 3. Именно эта фаза тела определяет направление действующей на тело силы, т.е. у тел разной формы разное направление квадратичной по скорости силы. При этом трехмерное пространство описывается радиусом и угловой координатой, которую можно пересчитать в обычные углы сферической системы координат.

Граничные условия это совпадение скорости тела, со скоростью

жидкости на поверхности тела. Причем это можно сделать в любой инерционной системе координат, в которой тело либо покоится и движется жидкость, либо тело движется, а поток на бесконечности неподвижен. Полученная формула описывает эти два случая. Для ламинарной части потока решение ищется в виде ряда Лорана с отрицательными степенями, но с действительным показателем. Для турбулентной области получается решение в виде тригонометрического ряда, причем его коэффициенты убывают как $1/n, n \rightarrow \infty$, т.е. образуют разрывную функцию. Существует теорема математического анализа, если коэффициенты ряда Фурье убывают на бесконечности индекса как величина $1/n$, то этот ряд Фурье определяет дискретную сумму. Эта дискретная сумма и описывает турбулентный процесс.

Определяется скорость движения потока, или его число Рейнольдса $\ln R_s + iR_w$, по формуле $R_x + iR_y = \exp(\ln R_s + iR_w)$. Число Рейнольдса тела определяется $R_0 = (V_x^0 + iV_y^0)a/\nu$, где V_x^0, V_y^0 скорость тела. Фаза комплексного радиуса тела отражает его форму и при повороте рулей тела изменяется. Она вычислена в 3 разделе.

Уравнение неразрывности в координатах, описанных в приложении, имеет вид

$$\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} = 0, \quad (1.1)$$

или, вводя, операторы

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial iy},$$

$$\Lambda^* = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial iy},$$

уравнение (1.1) приводится к виду

$$\Lambda R + \Lambda^* R^* = 0, \quad (1.2)$$

где уравнению неразрывности удовлетворяет (1.3), так как $\Lambda R = 0$.

Получаем решение уравнения неразрывности (1.2)

$$R = R_x + iR_y = a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \frac{\exp(i\gamma n w)}{s^{n\gamma}} (\ln z^*)^k =$$

$$= a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} (\ln z^*)^k / z^{n\gamma}, z = x + iy = s \exp(iw) \quad (1.3)$$

где $w \in [-\pi, \pi]$. Величина R^* это комплексно сопряженная к решению R величина.

При этом можно использовать главную ветвь логарифма. допустим используем дополнительную ветвь

$$R = a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} (\ln s - iw + 2\pi i m)^k / z^{n\gamma} =$$

$$= a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \exp(-2\pi\gamma \cdot i \cdot m) (\ln s - iw)^k / z^{n\gamma}$$

При этом выбор другой ветви сказывается только на константах, которые определяются из метода наименьших квадратов. Т.е. выбор другой ветви логарифма не сказывается на окончательной формуле решения.

При этом уравнение Лапласа запишется в виде

$$\Delta \Lambda^* R = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = 0, \quad (1.4)$$

которое тоже имеет решение в виде (1.3).

Запишем уравнения Навье - Стокса относительно компонент скорости в декартовой системе координат относительно переменных (x, y)

$$\begin{cases} \frac{\partial V_x}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)V_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta V_x \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)V_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V_y \end{cases},$$

относительно числа Рейнольдса потока, равного $R = R_x + iR_y$, уравнение Навье - Стокса запишется в виде

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} + (R^* \Lambda^* R - R \Lambda^* R^*) / 2 = -\frac{1}{\rho} \Lambda^* P + \Lambda^* \Delta R, \quad (1.5)$$

Величина R является комплексной функцией. Величины в конвективном

члене $R_x(z), R_y(z)$ выражаются через комплексные функции R и R^* с учетом уравнения неразрывности. Уравнение (1.5) получено из двух уравнений Навье - Стокса, которые разделили на величину $\nu^2 / |a|^3$, где ν - кинематическая вязкость, a комплексный размер тела. При этом координаты x, y безразмерные величины и равны отношению $x/|a|, y/|a|$. В уравнении (1.2) тоже необходимо произвести замену координат на действительную безразмерную величину $x/|a|, y/|a|$. Время τ тоже безразмерно и равно величине $\tau = t\nu / |a|^2$.

Кроме уравнения неразрывности и уравнения движения, которые образуют замкнутую систему в случае несжимаемой жидкости, надо использовать и тепловое уравнение в случае сжимаемой среды, для определения температуры среды, которое имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho V^2 / 2 + \rho \varepsilon) &= -\operatorname{div}[\rho \mathbf{V}(w + V^2 / 2) - (\mathbf{V}, \vec{\sigma}') - \chi \nabla T] \\ \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla s \right) &= \sigma'_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \operatorname{div}(\chi \nabla T) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Причем решать надо это уравнение в комплексной плоскости, с комплексной температурой. Так как температура входит в нелинейный член, ее значение может быть комплексным. Уравнение с линейными членами можно просуммировать с комплексно сопряженным уравнением и мнимая часть уйдет, а в случае нелинейного члена такое преобразование невозможно. Решая первое уравнение энергии, определим изменение температуры. Решая второе уравнение, определим изменение энтропии. Покажем, что эти величины могут иметь стационарные параметры.

Величина $\vec{\sigma}'_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k}$ определяется по формуле после преобразований см. [2]

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}'_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} &= \eta \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right) + \zeta \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \delta_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \\ &= \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right)^2 + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{V})^2 \end{aligned}$$

Тогда изменение энтропии считается по формуле см. [2]

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} = \rho \frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial \rho}{\partial t} = -s \operatorname{div} \rho \mathbf{V} - \rho \mathbf{V} \nabla s + \frac{1}{T} \operatorname{div}(\chi \nabla T) + \\ + \frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\zeta}{T} (\operatorname{div} \mathbf{V})^2$$

проинтегрируем это уравнение по всему пространству. Первые два члена дают $-\operatorname{div} \rho s \mathbf{V}$, интеграл от которых по объему преобразуется в интеграл по бесконечно удаленной поверхности и равен нулю. Справедливо также соотношение

$$\int \frac{1}{T} \operatorname{div} \chi \nabla T dV = \int \operatorname{div} \left(\frac{\chi \nabla T}{T} \right) dV + \int \frac{(\nabla T)^2}{T^2} dV.$$

считая, что температура жидкости на бесконечности постоянна, интеграл от дивергенции равен нулю. В результате всех этих преобразований, получим следующую формулу

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho s dV = \int \chi \frac{(\nabla T)^2}{T^2} dV + \int \left[\frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\zeta}{T} (\operatorname{div} \mathbf{V})^2 \right] dV.$$

Казалось бы, энтропия величина возрастающая, и в силу положительности правой части должна расти со временем. Но дело в том, что скорость и температура величина комплексная и действительная часть ее квадрата может быть отрицательной. При вычислении подъемной силы крыла самолета используется комплексная скорость. Кроме того, решение нелинейных уравнений получается комплексным, поэтому надо использовать в следствиях из этих уравнений комплексные значения величин. Аналогично в уравнении баланса энергии надо использовать комплексную скорость. При этом для определенного тела движущегося с определенной скоростью энтропия всего объема будет сохраняться. При этом комплексная скорость будет иметь такое значение, что суммарная энтропия системы не изменяется, т.е. процесс стационарный. Это не противоречит принципу возрастания суммарной энтропии в нестационарных процессах, так как процесс получается стационарный и

энтропия такого процесса постоянна. Так как мнимая часть скорости входит со знаком плюс и минус, суммарная энтропия системы действительна.

При этом число Рейнольдса тела равно $R_0 = \frac{aV_0}{\nu}$, где a, V_0 возможно имеют комплексные значения и V_0 скорость тела, относительно скорости жидкости на бесконечности. Величина фазы комплексного размера тела a при изменении геометрии тела, без изменения его размера, меняется (поворот рулей тела, не меняющий его размер, а только геометрию). При этом действительная часть скорости потока в пространстве $(\ln s, w)$ или пространстве (x, y) , $\ln R = R_{\ln s} + iR_w$, соответствует расширению-сжатию потока, а мнимая часть скорости вращения потока, с радиусом кривизны, равным радиусу кривизны траектории.

В случае рассмотрения движения тела, мнимая часть комплексной скорости соответствует вращению центра тела со скоростью $\text{Im} \ln R$. При этом, сумма действительной и мнимой скорости определит поступательную скорость движения тела. Если фаза скорости тела равна нулю, то это поступательное движение вдоль оси Ox_3 декартовой системы координат. Если фаза отлична от нуля, то это движение вдоль радиуса, под углом, равным фазе скорости тела и вращение центра тяжести тела с угловой скоростью, равной мнимой части фазы скорости тела.

Разделим уравнение Навье - Стокса на квадрат модуля R_0 , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \tau} / (R_0^* R_0) + (R^* \Lambda^* R - R \Lambda^* R^*) / (2R_0^* R_0) = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\Lambda^* P}{R_0^* R_0} + \frac{1}{R_0^* R_0} \Lambda \Lambda^* R \end{aligned}$$

При этом изменение $w \in [-\pi, \pi]$.

Найдем ламинарное R_l и турбулентное R_t решение в виде

$$(R_l - R_\alpha)/R_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n / z^{m^*} \quad (1.7)$$

$$(R_t - R_\alpha)/R_0 = a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} (\ln z^*)^k / z^{m^*}$$

где R_α определяется скоростью системы координат, при этом (1.7) удовлетворяет уравнению неразрывности. При этом для перехода от ламинарного режима к турбулентному режиму необходимо учитывать энергию состояния в системе координат, которая движется со скоростью R_0 , которая считается по формуле

$$E_l = \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \rho V^2 a^2 s ds dw / 2 = \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \rho v^2 R_0^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n / z^{m^*} \right]^2 s ds dw / 2$$

$$E_t = \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \rho V^2 a^2 s ds dw / 2 = \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \rho v^2 R_0^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} (\ln z^*)^k / z^{m^*} \right]^2 s ds dw / 2$$

интегрировать по радиусу надо от единицы до бесконечности, так как сечение поверхности в безразмерных координатах образует круг единичного радиуса, а в размерных координатах комплексный радиус a . Когда действительная часть энергии турбулентного решения становится меньше энергии ламинарного режима, происходит переход от ламинарного режима к турбулентному режиму и аналогично происходит обратный переход.

Опишем турбулентное решение. Свяжем скорость системы координат, со скоростью тела относительно бесконечности. Если тело относительно бесконечности неподвижно, то система координат неподвижна $R_\alpha = 0$ и жидкость в этой системе координат движется на бесконечности со скоростью $-R_0$, так как $a_{00} = -1$. Если тело относительно бесконечности двигается со скоростью R_0 , система координат двигается со скоростью равной R_0 и жидкость на бесконечности в этой системе координат неподвижна. При этом граничные условия определяются из условия $R_l = R_\alpha$. Коэффициенты a_{nm} и γ найдем из условия представления

нулевого члена минус единицей $a_{00} = -1$ с помощью метода наименьших квадратов при условии $s = 1$, т.е. на границе тела.

$$\min \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_{ns} \exp(i\gamma n w)(-iw)^s] \times \\ \times [1 - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}^* \exp(-i\gamma m w)(iw)^k] dw$$

т.е. равенство скорости жидкости, на поверхности тела, и скорости тела.

Для коэффициентов a_{mk}^* получаем линейное уравнение, дифференцируя по величине a_{ns}

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\gamma n w)(-iw)^s [1 - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk}^* \exp(-i\gamma m w)(-iw)^k] dw = 0.$$

При этом коэффициент γ считается по формуле $\gamma = (2k + 1)/2, k = 1$.

Определим силу тяги винта, для чего зададим действительное давление в виде

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} [P_{nm} (\ln z)^m / z^m + P_{nm}^* (\ln z)^{*m} / z^{*m}]$$

Движение винта описывается функцией, которая получается из вращающейся части тела – и определяет скорость на вращающейся поверхности

$$(R_l - R_\alpha) / R_0 = a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \frac{\exp\{in\gamma w[\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)]\}}{s(\tau)^{n\gamma}} \{\ln s(\tau) \exp[-iw(\tau)]\}^k$$

$$s(\tau) = s + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n \sin[n\psi(\tau)] + \beta_n \cos[n\psi(\tau)]\} \times$$

$$\times \exp\{-[(\varphi_1 - \varphi_1^0)^2 + (\varphi_2 - \varphi_2^0)^2] / 2\sigma^2\}$$

$$\varphi_1(\tau) = \varphi_1 + \{\gamma \sin[\psi(\tau)] + \delta \cos[\psi(\tau)]\} \exp[-(\varphi_1 - \varphi_1^0)^2 / 2\sigma^2]$$

$$\varphi_2(\tau) = \varphi_2 + \{-\gamma \cos[\psi(\tau)] + \delta \sin[\psi(\tau)]\} \exp[-(\varphi_2 - \varphi_2^0)^2 / 2\sigma^2]$$

$$\psi(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \omega(\tau) d\tau, l = 1, 2,$$

где $\omega(\tau)$ безразмерная скорость вращения, зависящая от времени, причем

$\alpha_0 > 0, \alpha_0 \gg \alpha_n, \beta_n$. Коэффициенты $\alpha_n, \beta_n, \gamma, \delta$ позволяют в параметрическом виде задать форму винта, соответствующей формуле

$$s(\psi) = s[\varphi_1(\psi), \varphi_2(\psi)]. \quad (1.8)$$

где эти зависимости от углов связаны в силу симметрии и вращения винта. Без учета вращения винта имеем зависимость $s = s(\varphi_1, \varphi_2)$, которая определяет форму неподвижного винта в системе координат, где углы берутся относительно центра тела. Вращение углов определяется с помощью линейного ортогонального преобразования с переменным углом. Коэффициенты α_n, β_n определяются при подстановке в формулу (1.8) функций $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)$ и являются функциями величин γ, δ . Направления на центр винта φ_1^0, φ_2^0 . Функция $R_l\{s(\tau)\exp[iw(\tau)]\}$ удовлетворяет уравнению неразрывности и уравнению Навье – Стокса, при решении относительно переменных $s(\tau), w(\tau)$. При этом можно описать отрыв потока от поверхности винта, аналогично тому, как описан турбулентный след и пограничный слой в дальнейшем тексте статьи.

При этом в уравнении Навье – Стокса появится новый член, соответствующий производной по времени τ . Распределение скорости и давления устанавливается со скоростью звука, которая гораздо больше скорости движения, так как рассматривается несжимаемая жидкость, поэтому такой учет вращения винта возможен. Подставим в уравнение Навье Стокса выражение

$$a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \frac{\exp\{in\gamma w[\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)]\}}{s(\tau)^{n\gamma}} \{\ln s(\tau) \exp[-iw(\tau)]\}^k. \quad (1.9)$$

Уравнение Навье Стокса с этим членом, умноженное на величину $\exp[i\xi\gamma w(\tau)][\ln s(\tau) - iw]^\eta / s(\tau)^{\xi\eta}, \xi > 0$, где ξ, η нечетные величины и проинтегрированное по пространству, определит изменение давления. При этом распределение давления определяется формулой

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_0}{\partial \tau} h_{\xi\eta}(a_n) + \omega(\tau) c_{\xi\eta} [\omega(\tau)] + |R_0|^2 \sum_{n,m,p,q=1}^N d_{\xi\eta m p q} a_{nm} a_{pq}^* = \\ = - \sum_{n,m=1}^N M_{\xi\eta m m} P_{nm}^*(\tau), \xi, \eta = 1, \dots, \dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

где член, пропорциональный $\omega(\tau)$ получается при дифференцировании $w(\tau), s(\tau)$ по времени. Определяется комплексное решение $P_{nm}^*(\tau)$, которое совместно с комплексно сопряженной величиной определяет действительное давление. Диагональные элементы матрицы $M_{\xi\eta m m}$ положительны, в силу интеграла от произведения комплексно сопряженных функций. Действительная часть матрицы $\sum_{n,m,p,q=1}^N d_{\xi\eta m p q} a_{nm} a_{pq}^*$ положительно определена в силу нечетности ξ, η . В случае отсутствия винта изменение R_0 определится из уравнения движения, которое описано по формуле (2.3), а в случае стационарного режима член $\frac{\partial R_0}{\partial \tau}$ равен нулю и устанавливается постоянное распределение давления. Причем сумма $P + P^*$ отрицательна.

Определим значения радиуса $s = s(R_0, w)$, при котором угловая компонента решения $\text{Im} \ln R_0 R(s, w) = \text{Im} \ln R(s, w) + \arg a_+ + \arg V_0 = 0$ обращается в ноль. Причем из этого уравнения определится верхняя граница следа. Нижняя граница следа определится из уравнения $\text{Im} \ln R_0 R(s, w) = \text{Im} \ln R(s, w) + \arg a_- + \arg V_0 = 0$. Эта величина определена с точностью до фазы тела $\arg a_{\pm}$, так как величина $\arg a_{\pm}$ входит слагаемым в данную формулу. Это значение соответствует возвратному течению, т.е. скорости, направленной к границе с ее разных сторон, и не реализуется как невозможное. Причем в зависимости от фазы формы тела направление следа меняется. При этом меняется и направление действующей на тело со стороны следа силы. След не расположен за телом, а находится, под

некоторым углом к телу, даже у симметричного тела. Но след образуется с двух сторон тела, причем у симметричного тела след симметричен в ламинарном режиме.

При условии на коэффициент асимметрии $s = 0, s = 1, \arg V_0 = 0$, получим по формуле (3.6) $\arg a = (\arg a_+ + \arg a_-)/2 = 0$ уравнение $\arg R[s_{\pm}(w), w] = -\arg a_{\pm}$, которое имеет две ветви симметричного решения $s(w)$, причем $w_{\max} = -w_{\min}, s_+(w) = s_-(w)$ в ламинарном режиме, когда коэффициенты ряда $R(s, w)$ действительны. Причем в случае сферы имеем две ветви решения $\arg R[s_{\pm}(w), w] = 0$, при условии $\arg a_+ = 0, \arg a_- = 0$. У не симметричного тела появляется отличная от нуля фаза формы тела, асимметрия в следе и возникновение вертикальной силы в ламинарном режиме.

При комплексных коэффициентах ряда $R(s, w)$, что наблюдается в турбулентном режиме, появляется асимметрия в описании следа даже в случае симметричного тела при условии $\arg V_0 = 0$.

При этом след заключен между углами $w_{\min}(\arg a), w_{\max}(\arg a)$, создавая подъемную в направлении, соответствующем, но не противоположном, направлению следа. Расположение следа не обязательно за поверхностью тела является экспериментальным фактом. У бесконечной плоскости тоже происходит отрыв пограничного слоя, что по его построению эквивалентно образованию следа, границей которого, является возвратное течение. Причем он наблюдается на некотором расстоянии от передней кромки плоскости и даже для конечной длинной пластины наблюдается на некотором расстоянии от передней кромки пластины.

При этих условиях соотношение $s = s(R_0, w)$ определяет границу n -ой турбулентной области. Таких областей имеется множество, так как бесконечный ряд имеет счетное количество корней. Первую турбулентную

область образуют радиусы $[a_0(w), a_1(w)]$, вторую $[a_1(w), a_2(w)]$ и т.д. Соседние турбулентные зоны имеют общие области, через которые и движется турбулентная жидкость. При этом жидкость из турбулентной области обратно в ламинарную область не поступает, так как обратного течения нет.

При этом граница пограничного слоя определяется из решения уравнения $\text{Re} \ln R(s, w) = 0$ относительно функции $s = s(w)$, т.е. жидкость по радиусу s из слоя не вытекает, а движется по касательной к границе пограничного слоя. При этом эта область не охватывает тело полностью, а занимает боковые грани тела, так как продольные по скорости области (вдоль оси $0x_3$) не удовлетворяют условию $\ln R_{\ln s}(s, w) = 0$.

При этом уравнение Навье Стокса и неразрывности будет иметь то же решение, но для конечной области. Тогда решение уравнения Навье Стокса будет

$$(R_l - R_\alpha) / R_0^* = \sum_{n,m=-N}^N b_{nm} \exp(in\Phi + im \ln \rho). \quad (1.11)$$

Где введена новая масштабированная угловая переменная $\Phi = 2\pi(w - w^{\min}) / (w^{\max} - w^{\min})$, где w^{\max}, w^{\min} - экстремальные значения границ турбулентной зоны. Кроме того, введем масштабированный радиус

$$\ln \rho = \frac{\ln s / a^{\min}(w)}{\ln[a^{\max}(w) / a^{\min}(w)]} 2\pi,$$

где $a^{\max}(w), a^{\min}(w)$ - максимальное и минимальное значение радиуса границы турбулентной зоны. В случае равенства нулю знаменателя, для величины s следует использовать значение $s = \sqrt{a^{\max}(w) a^{\min}(w)}$. Тогда величина $\ln \rho$ будет непрерывна и в этой точке равна π . Коэффициенты b_{nm} определяются из значений ламинарного решения в пределах границы турбулентной зоны $s = a^{\min}(w), s = a^{\max}(w)$, где $w \in [w^{\min}, w^{\max}]$.

Коэффициенты b_{nm} определяются по формуле

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_l[s(\ln \rho, \Phi), w(\Phi)] \exp(-in\Phi - im \ln \rho) d \ln \rho d\Phi = \\ = b_{nm} / 4\pi^2 .$$

Так как граничные значения в начале и конце периода отличаются и границы области в координатах s, w не прямоугольные (в координатах $\Phi, \ln \rho$ скорость на границе переменная), ряд будет разрывным и значит, коэффициент b_{nm} убывает при условии $n, m \rightarrow \infty$ как $b_{nm} \sim 1/(nm)$, т.е. это турбулентное дискретное решение. Дело в том, что решение в начальный момент времени в координатах s, w непрерывно, а в координатах $\ln \rho, \Phi$ дискретно, в силу дискретности функций $s(\ln \rho, \Phi), w(\Phi)$. Но так как описание следа и пограничного слоя введется в относительно координат $\ln \rho, \Phi$, след и пограничный слой является дискретным, образующим либо вихревую дорожку, либо является пульсирующим турбулентным решением.

Формулу (1.11) можно переписать в виде

$$\sum_{n,m=-N}^N b_{nm} \exp(in\Phi + im \ln \rho) = \sum_{n,m=0}^N A_{nm} \operatorname{sgn}(\Phi - \Phi_n^0) \operatorname{sgn}(\Phi_n^1 - \Phi) \\ \operatorname{sgn}(\ln \rho - \ln \rho_m^0) \operatorname{sgn}(\ln \rho_m^1 - \ln \rho) , \quad (1.12)$$

где в данном случае имеем $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ и тогда скачок с амплитудой

A_{nm} и фазой $\Phi_n^0, \ln \rho_m^0, \Phi_n^1, \ln \rho_m^1$, определится из уравнений

$$4\pi^2 b_{nm} = \sum_{p,q=1}^N A_{pq} \sin[n(\Phi_p^1 - \Phi_p^0)/2] \exp[in(\Phi_p^0 + \Phi_p^1)/2] \\ \sin[m(\ln \rho_q^1 - \ln \rho_q^0)/2] \exp[im(\ln \rho_q^0 + \ln \rho_q^1)/2] / (nm) ,$$

где индексы $n, m = -N, \dots, -1, 1, \dots, N$.

Отметим, что $A_{00} = b_{00}$. Если ряд, стоящий в левой части (1.12) непосредственно не суммируется, требуя большого числа членов, то

правая часть (1.12) определит его дискретную сумму при конечном числе членов. Отметим, что

$$\Phi_n^0 + 2\pi p \leq \Phi_n \leq \Phi_n^1 + 2\pi p, \ln \rho_m^0 + 2\pi q \leq \ln \rho_m \leq \ln \rho_m^1 + 2\pi q$$

почти периодическая координата скачка.

При определенной скорости потока ближайшая к телу турбулентная зона может достигнуть границы тела. При этом перестраивается решение, в силу других граничных условий, т.к. турбулентная зона выходит на поверхность тела в конечном секторе.

Почему же турбулентное решение носит пульсирующий характер? Граница турбулентной области в силу дискретности турбулентного решения не гладкая функция, в отличие от ламинарного решения. Это приводит к пульсации границы и точек, в которых мнимая часть скорости обращается в ноль. Это приводит к нестационарной пульсации коэффициентов $w_{\max}(t), w_{\min}(t), a_{\max}(t, w), a_{\min}(t, w)$, следовательно, пульсации $b_{nm}(t)$.

Так как граница пульсирует вместе с решением, т.е. имеем зависимость $b_{nm}(t)$.

При этом в формуле

$$\ln \rho = \frac{\ln s / a^{\min}(t, w)}{\ln[a^{\max}(t, w) / a^{\min}(t, w)]} 2\pi.$$

имеем границы изменения s , определяются по формуле $s = [a^{\min}(t, w), a^{\max}(t, w)]$. Причем при условии $a^{\min}(t, w) = a^{\max}(t, w)$, имеем $\ln \rho = \pi$. Коэффициенты $b_{nm}(t)$ определяются из решения (1.12) по формуле

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_l[s(t, \ln \rho, \Phi), w(t, \Phi)] \exp(-in\Phi - im \ln \rho) d \ln \rho d\Phi = \\ & = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_l[s(t, \ln \rho, \Phi), w(t, \Phi)] \exp(-in\Phi - im \ln \rho) d \ln \rho d\Phi = . \quad (1.13) \\ & = b_{nm}(t) / (4\pi^2) \end{aligned}$$

Так как граничные значения в начале и конце периода отличаются, и границы турбулентной области не прямоугольные, ряд будет разрывным и значит, коэффициент b_{nm} убывает при условии $n, m \rightarrow \infty$ как $b_{nm} \sim 1/(nm)$, т.е. это турбулентное дискретное решение.

Формулу (1.12) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m=-N}^N b_{nm}(t) \exp\{in\Phi + im \ln \rho\} = \\ & = \sum_{n,m=0}^N A_{nm}(t) \operatorname{sgn}[\Phi - \Phi_n^0(t)] \operatorname{sgn}[\Phi_n^1(t) - \Phi], \quad (1.14) \\ & \operatorname{sgn}[\ln \rho - \ln \rho_m^0(t)] \operatorname{sgn}[\ln \rho_m^1(t) - \ln \rho] \end{aligned}$$

тогда скачок с амплитудой $A_{nm}(t)$ и фазой $\Phi_n^0(t), \ln \rho_m^0(t), \Phi_n^1(t), \ln \rho_m^1(t)$, определится из уравнений

$$\begin{aligned} 4\pi^2 b_{nm}(t) = \sum_{p,q=1}^N A_{pq}(t) \sin[n(\Phi_p^1(t) - \Phi_p^0(t))/2] \exp[in(\Phi_p^0(t) + \Phi_p^1(t))/2] \\ \sin[m(\ln \rho_q^1(t) - \ln \rho_q^0(t))/2] \exp[im(\ln \rho_q^0(t) + \ln \rho_q^1(t))/2] / (nm) \end{aligned} \quad (1.15)$$

где индексы $n, m = -N, \dots, -1, 1, \dots, N$. При этом в силу того, что $b_{nm}(t) \sim \alpha(t)/(nm)$ при условии $n, m \rightarrow \infty$ коэффициенты $A_{pq}(t), \Phi_p^0(t), \ln \rho_q^0(t), \Phi_p^1(t), \ln \rho_q^1(t)$ определяются не зависящими от индексов n, m .

При этом граница турбулентного следа, определяемая как

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \ln \left\{ \sum_{n,m=0}^N A_{nm}(t) \operatorname{sgn}[\Phi - \Phi_n^0(t)] \operatorname{sgn}[\Phi_n^1(t) - \Phi] \right. \\ \left. \operatorname{sgn}[\ln \rho - \ln \rho_m^0(t)] \operatorname{sgn}[\ln \rho_m^1(t) - \ln \rho] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

и выраженная в виде зависимости $\ln \rho = g(t, \Phi)$, зависит от времени. Коэффициенты уравнения (1.15) $A_{pq}(t), \Phi_p^0(t), \ln \rho_q^0(t), \Phi_p^1(t), \ln \rho_q^1(t)$, зависящие от времени, определяются из решения нелинейной системы уравнений (1.13), (1.15), (1.16). Уравнение (1.16) определяет границу турбулентной области. Нелинейная система уравнений (1.15), определяет

значения коэффициентов $A_{pq}(t), \Phi_p^0(t), \ln \rho_q^0(t), \Phi_p^1(t), \ln \rho_q^1(t)$. Уравнение (1.13) определяет коэффициенты $b_{nm}(t)$.

Составим систему дифференциальных уравнений по определению изменения переменных $b_{nm}(t), A_{pq}(t), \Phi_p^0(t), \ln \rho_q^0(t), \Phi_p^1(t), \ln \rho_q^1(t), \ln \rho(t, \Phi)$ вместо нелинейных уравнений, и тогда решать нелинейную систему уравнений (1.15) придется один раз для определения начальных условий. Уравнение (1.15) имеет вид

$$\sum_{p,q=1}^N a_{nmpq}(t) \frac{dA_{pq}}{dt} + \sum_{p=1}^N [f_{np}^0(t) \frac{d\Phi_p^0}{dt} + f_{np}^1(t) \frac{d\Phi_p^1}{dt}] + \sum_{q=1}^N [g_{mq}^0(t) \frac{d \ln \rho_q^0}{dt} + g_{mq}^1(t) \frac{d \ln \rho_q^1}{dt}] = \frac{db_{nm}(t)}{dt}$$

где индексы $n, m = -N, \dots, -1, 1, \dots, N$, а величина A_{pq} возможно комплексная. Причем величина $db_{nm}(t)/dt$ определяется из уравнения (1.13), которое имеет вид

$$\frac{db_{nm}(t)}{dt} = F_{nm}(t, \ln \rho, \Phi)$$

Уравнение (1.16) определяет границу турбулентной области $\ln \rho = g(t, \Phi)$, и величина радиуса определяется из дифференциального уравнения с параметром Φ

$$a(t, \Phi) \frac{d \ln \rho(t, \Phi)}{dt} = b(t, \Phi).$$

При этом если граница пограничного слоя или следа стационарна, то наблюдается ламинарный режим, а если она пульсирует, то наблюдается нестационарный турбулентный режим, говорят о турбулизации пограничного слоя или следа.

Для реализации стабильного движения тела, во-первых, необходимо не допускать выхода турбулентной зоны на поверхность тела, а во-вторых, в случае не выполнения первого пункта, необходимо стабилизировать границу турбулентной зоны. Тогда режим будет стационарный, т.е. не

будет зависимости коэффициентов b_{pq} от времени. Для стабилизации границы турбулентной зоны необходимо, чтобы дискретные скачки скорости потока не выходили на границу турбулентной зоны. Этого можно достигнуть только выбором формы тела, отражаемой в фазе число Рейнольдса.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса тела, вернее изменение фазы числа Рейнольдса тела, и, следовательно, изменение размера тела, и значит происходит увеличение модуля числа Рейнольдса. Первая турбулентная зона, касается своей дальней частью поверхности тела, и начинает работать вторая турбулентная зона, с меньшим охватом поверхности тела. Сопротивление при этом упадет и возникает кризис сопротивления.

2. Вычисление сил, действующих на движущееся в несжимаемой жидкости тело

Определим подъемную силу и силу сопротивления тела, помещенного в поток или движущегося в жидкости, с учетом давления. По теореме импульсов она равна для одного тела см.[1]

$$\begin{aligned}
 F &= \rho a \int_{-\pi}^{\pi} \int_{s(w)}^{\infty} V^2 dsdw + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{s(w)}^{\infty} (P + P^*) dsdw = \\
 &= \rho v^2 / a \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^{\infty} R^2 R_0^2 dsdw + \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^{\infty} (P + P^*) dsdw
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Где ρ двумерная комплексная плотность жидкости, величина b действительная безразмерная величина, определяемая значением интеграла. Тело рассматривается в виде сферы с учетом фазы формы тела.

При этом в ламинарном режиме в системе координат $R_\alpha = R_0$, имеем $a_0 = 0$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^{\infty} R^2 ds dw = \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n / z^{*n} \sum_{m=0}^{\infty} a_m / z^{*m} ds dw = \\
& = \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_q a_{p-q} \exp(ip\gamma w) / s^{2p} ds dw = \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_q a_{p-q} \exp(ip\gamma w) s^{2p} ds dw = \\
& = \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_q a_{2p+1-q} \exp[i(2p+1)\gamma w] / s^{\gamma(2p+1)} ds dw + \\
& \quad + \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_q a_{2p-q} \exp(2ip\gamma w) / s^{2p} ds dw
\end{aligned}$$

Так как $\gamma = (2k+1)/2$ имеем нулевое значение второго интеграла из-за равенства нулю интеграла по углу при $p \neq 0$, член с $p = 0$ равен нулю в силу $a_0 = 0$. Первый интеграл равен

$$\begin{aligned}
h_0 & = \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2p+1} a_q a_{2p+1-q} \exp[i(2p+1)\gamma w] / s^{\gamma(2p+1)} ds dw = \\
& = 2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2p+1} a_q a_{2p+1-q} \frac{\sin \gamma(2p+1)\pi}{[1 - \gamma(2p+1)]\gamma(2p+1)} < 0
\end{aligned}$$

В сумме коэффициентов нужно учитывать, что $a_0 = 0$. В силу действительности коэффициентов имеем действительное значение интеграла по всему пространству, причем имеем $\arg h_0 = \pi$. Причем это действительная постоянная составляющая силы, действующей на тело. Но в пространстве существует след от тела и пограничный слой, которые имеют другое решение, и надо учитывать интеграл по области следа и пограничного слоя, за вычетом интеграла по следу и пограничному слою от решения в виде ряда. Поэтому интеграл от квадрата числа Рейнольдса комплексный.

Форму тела и его размер определим с помощью комплексного радиуса. Причем уравнение радиуса тела зависит от двух углов. Комплексный радиус тела определяется двумя параметрами, размером и фазой. Причем трехмерная задача заменяется плоскостью $\varphi_2^0 = const$, в которой заданы

два параметра, радиус s и угол $w = \varphi$. Ставится задача по определению преобразования $\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_2^0)$ такого, чтобы $\varphi_l = \varphi_l[\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_2^0), \varphi_2^0], l = 1, 2$, При этом получится кривая линия $\varphi_l = \varphi_l(\varphi, \varphi_2^0), l = 1, 2$, причем справедливо $\varphi = \varphi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_2^0)$.

Имеется взаимно однозначное соответствие между трехмерными и двумерными координатами на плоскости $\varphi_2^0 = const$. При этом на плоскости будут учтены производные по координатам φ_l по формуле

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_l} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_l} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Давление со стороны винта вызывает положительную силу, зависящую от направления скорости тела. Все силы, вычисленные по предлагаемым формулам, являются комплексными силами. Величина a_w отражает размер винта. Величина составляющей давления является действительной и определяется по формуле $F_{const} = \gamma_1 |\rho v^2 R_0^2 / a|$ и является тормозящей силой. Максимум, чего можно добиться, это свести силу давления, являющейся силой сопротивления, к минимуму сопротивления.

Величина $s(w) = 1$ это радиус границы тела, круга. При этом форма тела учтена введением комплексного радиуса тела, где его модуль определяет средний размер тела, а фаза форму тела. При этом плотность двумерная комплексная. Интегрировать надо по всему пространству в силу переменности значения скорости по пространству. При этом дифференциал ds содержит две поверхности, соответствующие радиусам $s, s + ds$, образующую входящий и выходящий поток энергии. Если считать силы по произвольной поверхности, охватывающей тело, то действующие на тело силы будут зависеть от выбора поверхности, так как комплексная скорость R и действительное давление существенно зависит от радиуса в особых зонах и поток энергии не пропорционален $1/s^2$. Отметим, что силы,

действующие на тело, определяются однозначно.

При этом для вычисления сил от квадратичной скорости, надо считать интеграл по следу и пограничному слою от разности нового решения и старого решения в особой зоне.

Получается, что для тела, при выполнении условия $\arg a = 0$, подъемная сила квадратичного члена, полученного с использованием особых областей, равна нулю в ламинарном режиме, при отрицательной силе сопротивления.

$$F = |\rho V_0^2 a h| \exp(i \arg a + i \arg a / |R_0| + (w_{+\max} + w_{+\min})/2 + 2i \arg V_0) + \\ + |\rho V_0^2 a h_0| \exp(i \arg a + i \arg a / |R_0| + \arg h_0 + 2i \arg V_0), \arg h_0 = \pi$$

Но имеем соотношение $|h_0| \ll |h|$, и эта сила добавляется к силе тяготения.

При этом, так как при выделении множителя $\exp[i(w_{+\max} + w_{+\min})/2]$ из формулы для описания следа в ламинарном режиме получим симметричное изменение углов следа от $-(w_{\max} - w_{\min})/2$, до угла $(w_{\max} - w_{\min})/2$, значит оставшийся множитель будет действительным, так как коэффициенты ряда действительны. В турбулентном режиме коэффициенты ряда комплексные, и остаточный множитель будет комплексный.

Горизонтальный полет соответствует $\arg V_0 = 0$. Первый член этой формулы соответствует интегралу по следу и пограничному слою, а второй член, соответствует потенциальному описанию потока, интегралу по всему пространству, имеющему малое значение, причем получается соотношение $\arg h_0 = \pi$. Величины $w_{+\max} + w_{+\min} = 2\pi$ для симметричного тела. При этом для симметричного тела $\arg a = 0$, и значит, сила, зависящая от следа, при горизонтальном полете является тормозящей без подъемной силы. Создав асимметрию у тела, появиться отличная от нуля фаза форму тела и отличное от нуля влияние следа.

При этом при определении влияния фазы формы тела на действующие силы нужно учитывать формулу $\arg a = (\arg a_+ + \arg a_-)/2$. $|a| = \sqrt{|a_+ a_-|}$.

Для симметричного тела фаза формы тела равна нулю для горизонтального движения и коэффициент асимметрии равен нулю. Для плоского тела он равен единице и фаза формы тела равна нулю для горизонтального движения. Он определяется в вертикальной плоскости и равен

$$s = \int_0^l \left[\frac{z_{\max}(x) + z_{\min}(x)}{z_{\max}(x) - z_{\min}(x)} \right]^2 \frac{dx}{l}, \quad (2.2)$$

где $z_{\max}(x)$ верхняя, вертикальная граница тела, $z_{\min}(x)$, нижняя, вертикальная граница тела. Отсчет вертикальной координаты введется от уровня $\int_0^l z(x) \frac{dx}{l}$. Тогда в случае симметричного тела фаза формы тела равна нулю, так как верхняя и нижняя граница имеет противоположные знаки.

Рассмотрим, как описывают формулы движение при малых числах Рейнольдса. Комплексное число Рейнольдса тела является единственным определяющим квадратичную силу параметром, так как $\arg h_0 = \pi$ и решение для коэффициентов ряда действительно, так как потенциально, и влияния пограничного слоя и следа мало, первый очень тонкий, а второй удален от тела. Сила сопротивления при потенциальном обтекании определяется тензором присоединенной массы, которая для шара симметрична и боковых сил у сферы нет.

Фаза формы тела при малых числах Рейнольдса определяется по формуле $\arg a(1 + |R_0|)$ и соответствует плохо считаемому движению тел, из-за большого значения фазы, которая зависит от малого изменения числа

Рейнольдса тела. Это плохо считаемое движение тел при малых числах Рейнольдса описывается с помощью тензора присоединенных масс.

При не симметричной приведенной массе имеется боковая сила. При этом пульсации силы прекращаются у сферы, так ее фаза формы тела равна нулю $\arg a = 0$. Максимальная фаза тела, как показано во втором разделе, равна $\pi/4$ и при этом квадратичная сила пульсирует, так как фаза квадратичной силы пульсирует и тело движется по плохо считаемой траектории.

$$F = |\rho V_0^2 ah| \exp(i \arg a + i \arg a / |R_0| + (w_{\max} + w_{\min})/2 + 2i \arg V_0)$$

Какова же структура этого интеграла, определяющего квадратичную силу. Во-первых, все члены пропорциональны фактору, учитывающему форму тела, т.е. $\exp[i \arg a + i(w_{\max} + w_{\min})/2]$. Этот коэффициент непосредственно определяет подъемную силу и силу сопротивления, и его увеличение приведет к улучшению характеристик движения. При этом первый интеграл в формуле (2.1) по всему пространству равен нулю. Этот интеграл определяется по области, определяемой следом.

В силу комплексности коэффициентов ряда турбулентного решения, описывающего число Рейнольдса потока, след будет не симметричен даже для симметричного относительно направления движения тела. При этом может возникнуть подъемная сила для не симметричного тела относительно направления движения в турбулентном потоке. В случае ламинарного режима для симметричного тела относительно направления движения след симметричен и для такого тела $\arg a = 0$.

При выходе турбулентной зоны на поверхность тела, возникнет пульсирующая сила, равная по величине

$$F_t = |\rho V_0^2 a \delta| \exp[i \arg a + i(w_{\max} + w_{\min})/2 + i \arg \delta + 2i \arg V_0],$$

в пространстве $(\ln s, w)$ среднее от этой силы определится комплексным коэффициентом δ , который в силу не стационарности границы турбулентной зоны будет пульсирующий с возможной мнимой фазой у этого коэффициента. Эта пульсация сказывается на силах, действующих на движущийся объект.

Рассчитаем силу трения, связанную с кинематической вязкостью. Она равна для комплексной силы

$$\begin{aligned} F &= \rho v^2 / a \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial \operatorname{Re} RR_0}{\partial y} - \frac{\partial \operatorname{Im} RR_0}{\partial x} \right) \exp(iw) s(w) dw = \\ &= i \rho v^2 / a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 \partial RR_0}{\partial z} \exp(iw) dw = i \rho v^2 / a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 \partial RR_0}{\partial \exp(iw)} \exp(iw) dw = \\ &= \rho v^2 / a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 \partial RR_0}{\partial w} dw = \\ &= 2 \rho v^2 R_0 / a \sum_{k=1}^{\infty} c_k [\exp(i\pi k) - \exp(-i\pi k)] = 4i \rho v V_0 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \pi k \gamma = \\ &= |\rho v d V_0| \exp(-i\pi/2 + i \arg V_0), s(w) = 1, \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \pi k \gamma < 0 \end{aligned}$$

Имеем равенства

$$\frac{\partial \operatorname{Re} R}{\partial y} - \frac{\partial \operatorname{Im} R}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Re} R + i \operatorname{Im} R}{\partial y} - \frac{\partial \operatorname{Re} R + i \operatorname{Im} R}{i \partial x} = i \left(\frac{\partial R}{\partial iy} + \frac{\partial R}{\partial x} \right) = i \frac{2 \partial R}{\partial z}$$

При выводе формулы воспользовались уравнением неразрывности и операторным равенством $\frac{\partial}{\partial iy} + \frac{\partial}{\partial x} = \frac{2 \partial}{\partial z}$, $z = x + iy$ см. [2] §6,i)

Переводя эту силу в комплексное представление, получим

$$F = |\rho v W_0 d| \exp(-i\pi/2 + i \arg V_0).$$

Эта сила увеличивает вес тела. Причем при вертикальном падении $\arg V_0 = -\pi/2$ и эта сила является тормозящей.

Сила линейная по скорости может быть просчитана один раз, и использоваться для произвольного тела. Остается вычислить силу, обусловленную следом и пограничным слоем в ламинарном режиме и турбулентном режим. Причем сила в следе зависит от фазы формы тела. Рассматривается случай, когда турбулентная зона не выходит на границу тела. Если турбулентная область выходит на границу тела, то сила, действующая на тело, резко изменится, и будет пульсировать. Зная изменение скорости, можно определить силы, действующие на тело. Причем при выходе пульсирующего турбулентного режима на границу тела пульсирующим будет и давление, действующее на тело. Давление определяется во всем внешнем пространстве относительно тела. Но если скорость на поверхности тела будет пульсировать, то и давление на поверхности тела будет пульсировать.

Запишем уравнения движения Ньютона для двигающегося в жидкости тела, для чего выпишем силы, действующие на тело

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{dV_1}{dt} = F \cos(\arg V_0) - F_{const} \cos(\arg V_0) + |\rho V_0^2 ah| \cos(\varphi + 2 \arg V_0) - \\ - (m - \rho Z) \cos \theta g \sin(\arg V_0) - kN \cos \theta + |\rho v W_0 d| \cos(-\pi/2 + \arg V_0) \\ m \frac{dV_2}{dt} = F \sin(\arg V_0) - F_{const} \sin(\arg V_0) + |\rho V_0^2 ah| \sin(\varphi + 2 \arg V_0) - \\ - (m - \rho Z) \cos \theta g \cos(\arg V_0) + N \cos \theta + |\rho v W_0 d| \sin(-\pi/2 + \arg V_0) \end{array} \right. ,$$

$$\varphi = \arg a + (w_{\max} + w_{\min})/2$$

где V_1 определяет действительную часть скорости, действующую вдоль горизонтальной оси x , а V_2 действует вдоль вертикальной оси y . Причем нулевая фаза комплексной скорости определяет горизонтальное направление движения без центростремительного ускорения. Справедливо $\arg V_0 = \arg(V_1 + iV_2) V_0^2 = V_1^2 + V_2^2$, сила реакции опоры N в полете равна нулю, k коэффициент трения о поверхность земли, при этом $F = \omega |\rho v b a_w| \exp(i \arg V_0)$ - сила тяги тела. ρZ - масса вытесненной

несжимаемой жидкости, которая определяет Архимедову силу выталкивания в жидкости, угол θ определяет поверхность, в которой происходит движение. Величина F_{const} это сила сопротивления воздуха за счет действующего давления. При этом влияние величины фазы $i \arg a + i \arg a / |R_0| + i(w_{\max} + w_{\min})/2$ определяющей подъемную силу мало, и значит, коэффициент при квадратичной силе сопротивления близок к минус единице. Т.е. так как $(w_{\max} + w_{\min})/2 \sim \pi$ для увеличения подъемной силы и уменьшения силы сопротивления нужно сделать фазу тела $\arg a$ отрицательной, что соответствует асимметричному телу. Максимальное значение фазы тела будет вычислено в следующем разделе, причем будет вычислен профиль, определяющий этот размер. Влияние давления на силу сопротивления не устраняется.

Отметим, что в случае движения в вакууме-эфире силы сопротивления уравниваются, так как кинематическая вязкость вакуума-эфира $i\hbar/m$ в случае поступательного движения. В самом деле, получим

$$|Fa/(\rho V^2)| \exp(i \arg a) = |\rho V_0^2 ah| \exp[i \arg a + i(w_{\max} + w_{\min})/2 + 2i \arg V_0] + \\ + i |\rho V_0 d\hbar/m| \exp(-i\pi/2 + i \arg V_0) = 0$$

Поскольку для сферического тела $\arg a = 0$, $(w_{\max} + w_{\min})/2 = \pi$, кроме того для поступательного движения $\arg V_0 = 0$, имеем фазы двух членов, отличающиеся на π . Значит для нулевой силы, действующей на частицу, необходимо выполнение условий, чтобы модули двух членов были равны. Из этого вытекает необходимость выполнения условия

$$mV_0 = \frac{\hbar |d|}{a |h|},$$

причем эта величина совпадает с определением длины волны частицы, равной ее «размеру».

$$a = \frac{\hbar |d|}{mV_0 |h|}.$$

Если в вакууме частица может двигаться с постоянной скоростью, причем вакуум обладает кинематической вязкостью, то почему большие массы в вязкой жидкости не могут двигаться с постоянной скоростью по инерции. Так как необходимо компенсировать силу тяжести и силу сопротивления, движение по инерции возможно только при определенной массе и форме тела.

Получим из уравнений движения условие постоянства скорости движения без учета тяги тела, т.е. в режиме планирования, т.е. опишем положения равновесия системы. Силы, действующие на тело в полете, при отсутствии тяги, равны

$$F = -F_{const} \exp(i \arg V_0) + |\rho V_0^2 a h| \exp[i \arg a + i \frac{w_{max} + w_{min}}{2} + 2i \arg V_0] + (2.1) \\ + |\rho W_0| d_0 \exp(-i\pi/2 + i \arg V_0) - i(m - \rho Z) g \exp(-i \arg V_0)$$

где в случае учета турбулентной зоны, коэффициент h будет пульсирующий. Приравниваем силу, действующую на тело по формуле (2.1) нулю, причем приведем уравнение к безразмерному виду.

$$-F |a| / (\rho v^2) = R_0^2 h + R_0 d + ic \exp(-i \arg V_0) + F_{const} \exp(i \arg V_0) = 0,$$

где имеем обозначение

$$c = (m - |\rho| Z) g |a| / (|\rho| v^2), R_0 = \frac{V_0 |a|}{v} \exp(i\varphi + i \arg V_0) \\ d = d_0 \exp(-i\pi/2 - i\varphi), \varphi = \arg a / 2 + i(w_{max} + w_{min}) / 4$$

Условие равенства нулю сил действующих на тело, без учета тяги тела, определится из решения квадратного уравнения

$$hR_0^2 + dR_0 \exp(-i \arg a) + ic \exp(-i \arg V_0) + F_{const} \exp(i \arg V_0) = 0, (2.2) \\ c = (m - |\rho| Z) g |a| / (|\rho| v^2)$$

Где h действительная величина в ламинарном режиме. Решение получится в виде

$$R_0 = -\frac{d}{2h} \pm \left\{ \left(\frac{d}{2h} \right)^2 + \frac{F_{const} \cos(\arg V_0) + c \sin(\arg V_0) - i[c \cos(\arg V_0) + F_{const} \sin(\arg V_0)]}{h} \right\}^{1/2}$$

Получим формулу для полета

$$\frac{V_0 |a| \exp(i\varphi + i \arg V_0)}{\nu} = -\frac{d \exp(-i\varphi - i\pi/2)}{2h} \pm \left\{ \left(\frac{d \exp(-i\varphi - i\pi/2)}{2h} \right)^2 + \frac{-F_{const} \cos(\arg V_0) + c \sin(\arg V_0) - i[c \cos(\arg V_0) + F_{const} \sin(\arg V_0)]}{h} \right\}^{1/2} \quad \text{B}$$

случае $\arg V_0 = 0$, получаем приближенное уравнение

$$2\varphi = -\arg(-F_{const} - ic) = \pi - \arg(F_{const} + ic), \pi/4 < \arg a/2 + (w_{\max} + w_{\min})/4 < \pi/2$$

т.е. горизонтальный полет реализуем.

$$\frac{V_0 |a|}{\nu} = \left(\frac{|F_{const} - ic|}{h} \right)^{1/2}.$$

В случае $\arg V_0 \neq 0$ величина $\varphi = \arg a/2 + (w_{\max} + w_{\min})/4$ и модуль a определится из формулы при заданных величинах $\arg V_0, |V_0|$

$$\begin{aligned} \arg \left\{ \left[\frac{V_0 |a|}{\nu} \exp(i\varphi + i \arg V_0) + \frac{d \exp(-i\varphi - i\pi/2)}{2h} \right]^2 - \left[\frac{d \exp(-i\varphi - i\pi/2)}{2h} \right]^2 \right\} &= \\ &\cong \varphi + \arg V_0 = \\ &= \arg \{ F_{const} \cos(\arg V_0) + c \sin(\arg V_0) - i[c \cos(\arg V_0) - F_{const} \sin(\arg V_0)] \} \\ \left| \left[\frac{V_0 |a|}{\nu} \exp(i\varphi + i \arg V_0) + \frac{d \exp(-i\varphi - i\pi/2)}{2h} \right]^2 - \left[\frac{d \exp(-i\varphi - i\pi/2)}{2h} \right]^2 \right| &= \\ = \frac{F_{const} \cos(\arg V_0) + c \sin(\arg V_0) - i[c \cos(\arg V_0) - F_{const} \sin(\arg V_0)]}{h} & \end{aligned}$$

Этот режим планирования реализуется при скорости, равной

$$\begin{aligned} V_0 &\approx \sqrt{\sqrt{[(m - Z|\rho|)g/(a|\rho|h)]^2 + \left(\frac{F_{const}}{|\rho|a} \right)^2}} = \\ &= \sqrt{ga(|\rho_b/\rho_l| - 1)} = \sqrt{250ga} = 110 \text{ m/sec}, a = 5 \text{ m} \end{aligned}$$

Где величина радиуса тела считается в плоскости, в которой считается задача. При размере тела в вертикальной плоскости $a = 5 \text{ m}$, получим скорость движения $V = 110 \text{ m/sec}$, ρ_b, ρ_l . Характерное отношение плотности

тела к плотности воздуха $\rho_b / \rho_l = 250$ при заполненном воздухом теле.

При этом двумерная плотность определена с точностью до множителя и имеет смысл только отношение двумерных плотностей, равное отношению трехмерной плотности.

Масса же трехмерного тела равна по порядку величины значению $m = 4\pi\rho_b a^3 / 3 = 4\pi 250 \cdot 10^{-3} 125 \cdot 10^6 / 3\pi^3 g = 4221kg = 4.2t$. Парящие птицы, при размере тела $a = 50cm$ могут двигаться по инерции со скоростью $35m/sec$ при трехмерной массе $4.2kg$, в случае соответствующей фазы формы тела.

В случае движения в морской среде, при значении отношения плотности тела к плотности среды, близкого к единице, скорость в жидкости может достигать больших значений

$$V_0 = \sqrt{ga(|\rho_b / \rho_l| - 1)} = \sqrt{ga} = \sqrt{9,8 \cdot 10^2} \approx \\ \approx 30m/sec = 108km/h$$

При этом используется размер тела $100m$ и отношение плотностей, равное 2.

Турбулентный режим, в случае если след выходит на поверхность тела, связан с пульсирующими значениями δ . Желательно избегать турбулентный режим, выходящий на границу тела.

Для определения условий подъема тела необходимо решать дифференциальное уравнение

$$-\frac{m|a|}{|\rho|v^2} \frac{dV_0}{dt} = \exp(-i \arg V_0) \frac{dR_0}{d\tau} = R_0^2 - R_0 d + \\ + ic \exp(-i \arg V_0) - F_{const} \exp(i \arg V_0) = h(R_0 - \alpha)(R_0 - \beta). (2.3)$$

$$\tau = \frac{\rho_l v}{m} t \exp(-i \arg \varphi) = \frac{\rho_l v}{\rho_b \pi |a|^2} t \exp(-i \arg \varphi)$$

Приближенным решением этого дифференциального уравнения (считаем, что коэффициенты α, β зафиксированы, и вычислена ошибка фиксации) является функция в окрестности фиксированной точки

$$\int \frac{dR_0^*}{h(R_0^* - \alpha_0)(R_0^* - \beta_0)} + 0(\tau - \tau_0)^2 = \frac{1}{h(\alpha_0 - \beta_0)} \left[\ln \frac{R_0^* - \alpha_0}{R_0^* - \beta_0} - \ln \frac{R_0^{*0} - \alpha_0}{R_0^{*0} - \beta_0} \right] + 0(\tau - \tau_0)^2 = -(\tau - \tau_0) \exp(-2i \arg V_0)$$

Или запишем это равенство по-другому

$$\ln \frac{R_0(\tau_{l+1}) - \alpha(\tau_l)}{R_0(\tau_{l+1}) - \beta(\tau_l)} - \ln \frac{R_0(\tau_l) - \alpha(\tau_l)}{R_0^0(\tau_l) - \beta(\tau_l)} + 0(\tau_{l+1} - \tau_l)^2 = -h(\tau_{l+1} - \tau_l) [\alpha(\tau_l) - \beta(\tau_l)] \exp(i \arg V_0)$$

Суммируя эти равенства в последовательные моменты времени, получим

$$\begin{aligned} & \ln \frac{R_0(\tau) - \alpha(\tau)}{R_0(\tau) - \beta(\tau)} - \ln \frac{R_0(\tau_0) - \alpha(\tau_0)}{R_0(\tau_0) - \beta(\tau_0)} + 0[\max(\tau_{l+1} - \tau_l)] + \\ & + \sum_l \left[\ln \frac{R_0(\tau_{l+1}) - \alpha(\tau_l)}{R_0(\tau_{l+1}) - \beta(\tau_l)} - \ln \frac{R_0(\tau_{l+1}) - \alpha(\tau_{l+1})}{R_0(\tau_{l+1}) - \beta(\tau_{l+1})} \right] = \\ & - \int_{\tau_0}^{\tau} h[\alpha(u) - \beta(u)] \exp(i \arg V_0) du \end{aligned}$$

Суммируя по величине l , получим

$$\begin{aligned} & \ln \frac{R_0(\tau) - \alpha(\tau)}{R_0(\tau) - \beta(\tau)} - \ln \frac{R_0(\tau_0) - \alpha(\tau_0)}{R_0(\tau_0) - \beta(\tau_0)} = - \int_{\tau_0}^{\tau} h(u) [\alpha(u) - \beta(u)] \times \\ & \quad \times \exp(i \arg V_0) du + \\ & + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{R_0(u) - \beta(u)} \frac{d\beta(u)}{du} du - \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{R_0(u) - \alpha(u)} \frac{d\alpha(u)}{du} du \end{aligned}$$

Оценим величину второго и третьего интеграла при условии $\tau \rightarrow \infty$, причем коэффициенты $\alpha(\tau), \beta(\tau), R_0(\tau)$ при этих условиях стремятся к константе.

$$\alpha(\tau) = \alpha_0 + \alpha_p / \tau^p + \dots, \beta(\tau) = \beta_0 + \beta_k / \tau^k + \dots, R_0(\tau) = R_{00} + g_q \exp(\lambda_q \tau) c_q, \operatorname{Re} \lambda_q < 0$$

$$R_0(\tau) - \alpha(\tau) = -\alpha_p / \tau^p + \dots, R_0(\tau) - \beta(\tau) = \alpha_0 - \beta_0 - \beta_k / \tau^k + \dots, \alpha_0 = R_{00}$$

Вклад бесконечно удаленной точки во второй интеграл равен нулю, а третий интеграл стремится к плюс бесконечности. Так как величина $\alpha(\tau), \beta(\tau)$ медленно меняющиеся величины, интегралы с производными от

них малы, и необходимо учитывать третий интеграл, который можно оценить, как величину $p \ln \tau / \tau_0$, который является действительным положительным, и ускоряет процесс перехода к стационарному решению, так как в результате преобразований числитель и знаменатель делим на величину $\exp(-p \ln \tau / \tau_0)$.

При суммировании ошибки ее порядок снижается на единицу, но остается бесконечно малой величиной. Разрешая это уравнение относительно числа Рейнольдса, получим

$$\begin{aligned} & -2 \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{s(u)h(u) + d^2/4} \exp(i \arg V_0) du + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{R_0(u) - \beta(u)} \frac{d\beta(u)}{du} du - \\ & - \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{R_0(u) - \alpha(u)} \frac{d\alpha(u)}{du} du = k(\tau) - k(\tau_0) \rightarrow \\ & \rightarrow -2 \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{s(u)h(u) + d^2/4} \exp(i \arg V_0) du - p \ln \tau / \tau_0, \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}[k(\tau) - k(\tau_0)] < 0$$

$$R_0(\tau) = \frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{2} + \frac{\alpha(\tau) - \beta(\tau)}{2} \frac{1 + \gamma \exp[k(\tau) - k(\tau_0)]}{1 - \gamma \exp[k(\tau) - k(\tau_0)]},$$

$$\gamma = \frac{R_0^*(\tau_0) - \alpha(\tau_0)}{R_0^*(\tau_0) - \beta(\tau_0)}, \alpha = -\frac{d}{2h} + \sqrt{\left(\frac{d}{2h}\right)^2 + \frac{s}{h}}, \beta = -\frac{d}{2h} - \sqrt{\left(\frac{d}{2h}\right)^2 + \frac{s}{h}},$$

$$\alpha - \beta = 2\sqrt{s/h + d^2/4h^2}, \alpha + \beta = -d/h$$

$$\begin{aligned} s = & [F_{const} \exp(i \arg V_0) - i(m - |\rho| Z) g a \exp(-i \arg V_0)] \times \\ & \times \exp(2i \arg a) / (|\rho| v^2) \end{aligned}$$

При этом решение стремится к своему стационарному значению

$$\begin{aligned}
R_0 &= \frac{V_0 |a|}{v} = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \frac{1 + \gamma \exp[k(\tau) - k(\tau_0)]}{1 - \gamma \exp[k(\tau) - k(\tau_0)]} = \\
&= \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \frac{\exp[-\operatorname{Re}k(\tau) + \operatorname{Re}k(\tau_0)] + \gamma \exp[i \operatorname{Im}k(\tau) - i \operatorname{Im}k(\tau_0)]}{\exp[-\operatorname{Re}k(\tau) + \operatorname{Re}k(\tau_0)] - \gamma \exp[i \operatorname{Im}k(\tau) - i \operatorname{Im}k(\tau_0)]} = \\
&= -\frac{d}{2h} + \sqrt{\left(\frac{d}{2h}\right)^2 + \frac{c}{h}} \times \\
&\times \frac{\exp[-\operatorname{Re}k(\tau) + \operatorname{Re}k(\tau_0)] + \gamma \exp[i \operatorname{Im}k(\tau) - i \operatorname{Im}k(\tau_0)]}{\exp[-\operatorname{Re}k(\tau) + \operatorname{Re}k(\tau_0)] - \gamma \exp[i \operatorname{Im}k(\tau) - i \operatorname{Im}k(\tau_0)]} \rightarrow \\
&\rightarrow -\frac{d}{2h} + \sqrt{\left(\frac{d}{2h}\right)^2 + \frac{s}{h}}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Для того, чтобы найти закон изменения формы и размера тела в данном сечении тела при наборе высоты необходимо задаться изменением модуля и аргумента скорости

$$\begin{aligned}
|V_0(\tau)| &= \left| \frac{v}{a} \left[-\frac{d}{2h} + \sqrt{\left(\frac{d}{2h}\right)^2 + \frac{s}{h}} \right] [2 - \exp(-\tau/\sigma_0)] \right|, \\
\arg V_0(\tau) &= \arg \left\{ \frac{v}{a_\infty} \left[-\frac{d}{2h} + \sqrt{\left(\frac{d}{2h}\right)^2 + \frac{s}{h}} \right] [1 - \exp(-\tau/\sigma_0)] \right\}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Зная закон изменения скорости со временем, можно определить, решая уравнение (2.4) закон изменения фазы $\arg \varphi(\tau)$ и размера тела $a(\tau)$.

При начальных условиях равных нулю, получим нулевое число Рейнольдса. Что тело имело конечную скорость, необходим бесконечный размер тела. Поэтому тело должно иметь начальную скорость. Его надо разогнать с помощью внешнего воздействия. Далее тело изменяет свою скорость и направление скорости за счет изменения размера и фазы тела.

Отметим, что для расчета этого режима, можно использовать приближение несжимаемой жидкости. Максимальная скорость, при которой справедливо приближение несжимаемой жидкости, ограничена одной третьей квадрата отношения скорости тела к скорости звука. Т.е. скорость $V = 100 \text{ m/sec}$ еще можно рассматривать, при этом относительное изменение плотности порядка $V^2/3c^2 \approx 0.04$, где c скорость звука в среде.

Т.е. полученные формулы имеют ошибку $V^2/3c^2$, равную 4%. Т.е. форма тела с нулевым сопротивлением определится с ошибкой 4% и необходимо экспериментально дорабатывать в аэродинамической трубе изменение формы тела.

Можно обойтись без экспериментов в аэродинамической трубе, для описания движения тела в воздухе, для этого надо использовать сжимаемую жидкость. Надо использовать систему координат, в которой тело и система координат движется с числом Рейнольдса R_0 , при этом определяется энтропия и температура жидкости, при этом жидкость на бесконечности неподвижна. При этом из уравнений (1.6) определится стационарное распределение возможно комплексной температуры и энтропии. При этом надо использовать двумерное уравнение для сжимаемой жидкости. При этом температура, энтропия и давление как нелинейные члены уравнения и в силу комплексности скорости будут комплексные. Для скалярных величин нет необходимости в ортогональности действительной и мнимой части и физический смысл имеет модуль температуры, энтропии и давления.

Выводы

Описано точное решение уравнения Навье Стокса для несжимаемой жидкости при движении тела в жидкости. Построены решения, как для ламинарной области, так и для турбулентной области. На основе этого решения, вычислены силы, действующие на тело. Оказалось, что при определенной скорости и форме тела возможен горизонтальный полет, с компенсацией силы тяжести и силы сопротивления без использования двигателя. При заданной массе тела, плотности воздуха, объеме тела однозначно определяется как форма тела $\arg a$, так и его скорость. При

этом силы, действующие на тело, определяются модулем и фазой скорости, массой, размером и формой тела, выраженной в фазе формы тела, кинематической вязкостью и плотностью среды, окружающей тело. Энергия для этого аномального движения определенной формы тела,двигающегося с определенной скоростью тела, берется из окружающей среды, которая охлаждается. Кроме того, отметим, что таких режимов существует два, по числу корней квадратного уравнения (2.2). Набор высоты и скорости осуществляется путем предварительного разгона, а далее идет управление за счет изменения фазы тела.

Приложение

3. Вычисление максимальной фазы тела

Как же определить комплексный радиус тела, чтобы его модуль совпадал с действительным радиусом тела. Для этого определим центр тела. При этом центр тела и системы координат определится из уравнения

$$x_s^0 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x_s(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi / (4\pi), \quad (3.1)$$

где $x_s(\theta, \varphi)$ координаты границы тела. Так как углы θ, φ зависят от положения начала координат, центр тела определится в этой формуле однозначно из нелинейного уравнения. Задав произвольный центр тела, получим новую координату центра тела.

При этом $r(R_0, \theta, \varphi) = \eta(\theta, \varphi)$. Формулы преобразования имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \sin \varphi \\ x_2 = r \sin \theta \cos \varphi \\ x_3 = r \cos \theta \end{cases}, \quad (3.2)$$

$$r = \sqrt{\sum_{l=1}^3 x_l^2} = r(y, \theta, \varphi)$$

При этом на поверхности тела имеем значение радиуса $r = \eta(\theta, \varphi)$. При фиксированной величине $y \in [a_{\min}, a_{\max}]$, имеем некоторую поверхность. Причем поверхность заданного тела переходит в сферическую поверхность, при изменении величины y на отрезке $[a_{\min}, a_{\max}]$.

При этом при условии $y > a_{\max}, y < a_{\min}$ получаем, что радиус не зависит от угловых координат.

Итак, имеем задачу по продолжению радиуса на значения удовлетворяющие $y > R_0$, где R_0 определяется по формуле

$$R_0^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \eta^2(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi / (4\pi), \text{ где } \eta(\theta, \varphi) \text{ уравнение поверхности тела.}$$

При этом имеем максимальный радиус тела

$$a_{\max}^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \{ \max_{\theta, \varphi} \eta^2(\theta, \varphi) + [R_0 - \eta(\theta, \varphi)]^2 \} \sin \theta d\theta d\varphi / (4\pi).$$

А минимальный радиус определится из формулы

$$1/a_{\min}^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \{ \max_{\theta, \varphi} 1/\eta^2(\theta, \varphi) + [1/R_0 - 1/\eta(\theta, \varphi)]^2 \} \sin \theta d\theta d\varphi / (4\pi)$$

Определим формулу преобразования внешнего увеличивающегося радиуса

$$1/r(y, \theta, \varphi) = \begin{cases} \delta(y, R_0, a_{\max})/\eta(\theta, \varphi) + [1 - \delta(y, R_0, a_{\max})]/a_{\max}, & R_0 < y < a_{\max} \\ 1/y, & y > a_{\max} \end{cases}.$$

Где

имеем

$$\delta(y, R_0, a) = \exp\left[-\frac{(y - R_0)^2}{(y - a)^2}\right] / \left\{ \exp\left[-\frac{(y - R_0)^2}{(y - a)^2}\right] + \exp\left[-\frac{(y - a)^2}{(y - R_0)^2}\right] \right\}.$$

Формула преобразования для внутреннего уменьшающегося радиуса

$$r(y, \theta, \varphi) = \begin{cases} \delta(y, R_0, a_{\min})\eta(\theta, \varphi) + [1 - \delta(y, R_0, a_{\min})]a_{\min}, & R_0 > y > a_{\min} \\ y, & y < a_{\min} \end{cases}$$

При этом $r(R_0, \theta, \varphi) = \eta(\theta, \varphi)$.

Построим огибающую внутреннего и внешнего радиуса из двух

уравнений

$$r - r(y, \theta, \varphi) = 0, \frac{\partial r(y, \theta, \varphi)}{\partial y} = 0.$$

Исключив величину y из этих уравнений, получим уравнение огибающей $r = h(\theta, \varphi)$, которое для внешней задачи больше величины $\eta(\theta, \varphi)$, а для внутренней задачи меньше этой величины. Построим радиус, где поверхностью тела является огибающая $r = h(\theta, \varphi)$.

Определим формулу преобразования внешнего радиуса с участием огибающей

$$1/\operatorname{Re} w(y, \psi_1, \psi_2) = \begin{cases} \delta(y, R_0, a_{\max})/h(\theta, \varphi) + [1 - \delta(y, R_0, a_{\max})]/a_{\max}, & R_0 < y < a_{\max} \\ 1/y, & y > a_{\max} \end{cases}$$

Формула преобразования для внутреннего радиуса с участием огибающей

$$\operatorname{Re} w(y, \psi_1, \psi_2) = \begin{cases} \delta(y, R_0, a_{\min})\rho(\theta, \varphi) + [1 - \delta(y, R_0, a_{\min})]a_{\min}, & R_0 > y > a_{\min} \\ y, & y < a_{\min} \end{cases}$$

Имеем решаемое уравнение $r = r(R, \theta, \varphi), \frac{\partial r(R, \theta, \varphi)}{\partial R} = 0$. Причем второе

уравнение выглядит таким образом $\delta'_R(R, R_0, a_{\max})\left[\frac{1}{h_+(\theta, \varphi)} - \frac{1}{a_{\max}}\right] = 0$. Т.е.

уравнение для огибающей $h_+(\theta, \varphi) = a_{\max}$. Совершенно аналогично для внутренней части поверхности имеем $h_-(\theta, \varphi) = a_{\min}$.

Определим формулу внешнего радиуса огибающей $\operatorname{Re} w(R, \theta, \varphi) = a_{\max}$.

Формула для внутреннего радиуса огибающей $\operatorname{Re} w(R, \theta, \varphi) = a_{\min}$

Определим мнимую часть радиуса $\operatorname{Im} w(R, \theta, \varphi)$ в случае если имеется соотношение $\eta(\theta, \varphi) > r(R, \theta, \varphi) > a_{\min}$ по формуле

$$|\mathfrak{R}_{\min}(R, \theta, \varphi)|^2 = r^2(R, \theta, \varphi) = a_{\min}^2 + [\operatorname{Im} w(R, \theta, \varphi)]^2.$$

Причем на границе тела

$$h_{\min}(\theta, \varphi) = w(R_0, \theta, \varphi) = a_{\min} [1 + i\sqrt{\eta^2(\theta, \varphi)/a_{\min}^2 - 1}]$$

При этом комплексный радиус имеет значение

$$\begin{aligned}\Re_{\min}(R, \theta, \varphi) &= a_{\min} + i \operatorname{Im} w(R, \theta, \varphi) = \\ &= a_{\min} [1 + i \sqrt{r^2(R, \theta, \varphi) / a_{\min}^2 - 1}]\end{aligned}\quad (3.3)$$

Определим мнимую часть радиуса $\operatorname{Im} w(y, \theta, \varphi)$ по формуле

$$\frac{1}{|\Re(R, \theta, \varphi)|^2} = \frac{1}{r^2(R, \theta, \varphi)} = \frac{1}{a_{\max}^2} + \frac{1}{[\operatorname{Im} w(R, \theta, \varphi)]^2}.$$

В случае если имеется соотношение $\eta(\theta, \varphi) < r(R, \theta, \varphi) < a_{\max}$. При этом имеем определение комплексного радиуса тела

$$\frac{1}{\Re(R, \theta, \varphi)} = \frac{1}{a_{\max}} + \frac{i}{\operatorname{Im} w(R, \theta, \varphi)} = \frac{1}{a_{\max}} \left(1 + i \sqrt{\frac{a_{\max}^2}{r^2(R, \theta, \varphi)} - 1}\right)$$

Причем на границе

$$\begin{aligned}h_{\max}(\theta, \varphi) &= w(R_0, \theta, \varphi) = \frac{a_{\max}}{1 + i \sqrt{a_{\max}^2 / \eta^2(\theta, \varphi) - 1}} = \\ &= \eta^2(\theta, \varphi) [1 - i \sqrt{a_{\max}^2 / \eta^2(\theta, \varphi) - 1}] / a_{\max}\end{aligned}$$

При этом комплексный радиус определится по формуле

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Re_{\max}(R, \theta, \varphi)} &= \frac{1}{a_{\max}} \left[1 + \frac{ia_{\max}}{\operatorname{Im} w(R, \theta, \varphi)}\right] = \\ &= \frac{1}{a_{\max}} \left[1 + i \frac{\sqrt{a_{\max}^2 - r^2(R, \theta, \varphi)}}{r(R, \theta, \varphi)}\right]\end{aligned}\quad (3.4)$$

Откуда получим $\Re_{\max}(R, \theta, \varphi) = r^2(R, \theta, \varphi) [1 - i \sqrt{a_{\max}^2 / r^2(R, \theta, \varphi) - 1}] / a_{\max}$.

Причем на границе тела происходит скачок комплексного радиуса. При определении граничных условий во внешности тела и внутренней части тела надо использовать разный комплексный радиус. Общий радиус вводится по формуле

$$\begin{aligned}\Re(R, \theta, \varphi) &= \sqrt{\Re_{\max}(R, \theta, \varphi) \Re_{\min}(R, \theta, \varphi)} = \\ &= r(R, \theta, \varphi) \sqrt{\frac{a_{\min}}{a_{\max}}} \sqrt{[1 - i \sqrt{a_{\max}^2 / r^2(R, \theta, \varphi) - 1}] [1 + i \sqrt{r^2(R, \theta, \varphi) / a_{\min}^2 - 1}]}\end{aligned}$$

Причем имеем соотношение

$$|\mathfrak{R}(R, \theta, \varphi)| = \begin{cases} a_{\min}, R = a_{\min} \\ a_{\max}, R = a_{\max} \\ \eta(\theta, \varphi), R = R_0 \end{cases}$$

Комплексная величина $\mathfrak{R}(R_0, \theta, \varphi)$ отражает уравнение комплексного радиуса тела.

Кроме среднего радиуса тела существуют максимальный и минимальный радиусы тела

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\max}(R_0, \theta, \varphi) &= \eta^2(\theta, \varphi) [1 - i\sqrt{a_{\max}^2 / \eta^2(\theta, \varphi) - 1}] / a_{\max} \\ \mathfrak{R}_{\min}(R_0, \theta, \varphi) &= a_{\min} [1 + i\sqrt{\eta^2(\theta, \varphi) / a_{\min}^2 - 1}] \end{aligned}$$

При этом определится средний радиус тела

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^2(R_0, \theta, \varphi) &= \eta^2(\theta, \varphi) \frac{a_{\min}}{a_{\max}} [1 - i\sqrt{a_{\max}^2 / \eta^2(\theta, \varphi) - 1}] [1 + i\sqrt{\eta^2(\theta, \varphi) / a_{\min}^2 - 1}] = \\ &= \exp[i(\arctan \sqrt{\eta^2(\theta, \varphi) / a_{\min}^2 - 1} - \arctan \sqrt{a_{\max}^2 / \eta^2(\theta, \varphi) - 1})] \eta^2(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

При этом средний, максимальный и минимальный комплексный радиус тела равен

$$\begin{aligned} R_{0c}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{R}^2(R_0, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi / 4\pi \\ R_{0\max}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{R}_{\max}^2(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi / 4\pi \\ R_{0\min}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{R}_{\min}^2(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi / 4\pi \end{aligned} \quad (3.5)$$

Но наряду с этим радиусом, существует комплексно сопряженный радиус тела, так что фаза формы тела определяется не однозначно.

Определяются два радиуса тела

$$\begin{aligned}
a_+ &= \frac{\mathfrak{R}_{0\max} - \mathfrak{R}_{0\min}}{\exp(i \arg \mathfrak{R}_{0\max}) - \exp(i \arg \mathfrak{R}_{0\min})} \times \\
&\times [\exp(i\pi s + i \arg V_0) - \exp(i \arg \mathfrak{R}_{0\min})] + \mathfrak{R}_{0\min} \\
a_- &= \frac{\mathfrak{R}_{0\max}^* - \mathfrak{R}_{0\min}^*}{\exp(-i \arg \mathfrak{R}_{0\max}) - \exp(-i \arg \mathfrak{R}_{0\min})} \times \\
&\times [\exp(i\pi s + i \arg V_0) - \exp(-i \arg \mathfrak{R}_{0\min})] + \mathfrak{R}_{0\min}^*
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Где величина s , коэффициент асимметрии тела, определенный в формуле (2.2). При этом определится два радиуса тела, зависящих от асимметрии, полученных из двух комплексных радиусов тела. Причем в случае симметричного тела $s=0$ и $\arg V_0=0$, получим нулевой радиус тела $\arg a = (\arg a_+ + \arg a_-)/2 = 0$. И в случае плоского тела при $s=1, \arg V_0=0$ выполняется $\arg a = (\arg a_+ + \arg a_-)/2 = 0$.

Подсчитаем максимально возможную фазу формы тела, вычислив среднюю фазу тела, вычислив ее не с помощью коэффициента асимметрии, используя $\arg a = (\arg a_+ + \arg a_-)/2$, где углы имеют единственное значение, а с помощью $\arg a = (\arg a_{\max} + \arg a_{\min})/2$, где сумма углов может иметь значение плюс и минус.

Приближенно интеграл считается по формуле

$$R_{0c} = \frac{Va_{av}}{v} \exp[i(\arctan \sqrt{a_{av}^2/a_{\min}^2 - 1} - \arctan \sqrt{a_{\max}^2/a_{av}^2 - 1})/2]$$

где величина a_{av} это средний размер тела.

Вычислим эту величину для эллипсоида. Радиус, построенный из центра эллипсоида равен

$$\eta(\theta, \varphi) = \frac{a^2 + b^2 + 2c^2}{4} + \frac{a^2 - b^2}{4} (\cos 2\theta \cos 2\varphi - \cos 2\varphi) - \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{4} \cos 2\theta$$

При этом $a_{\min} = \sqrt{a^2 + b^2}, a_{\max} = c, a_{av} = \sqrt{r^2 + 2c^2}/2$.

$$\arg R_{0c} = [\arctan \sqrt{c^2/2r^2} - \arctan \sqrt{4c^2/(r^2 + 2c^2) - 1}]/2; r^2 = a^2 + b^2.$$

Максимум этого выражения при условии $c \gg r$, т.е. в случае вытянутого

эллипсоида, равен $\arg R_{0c} = \frac{\pi}{8}, |R_{0c}| = \frac{Vc}{v\sqrt{2}}$.

В случае тарелки $a = b, 2a^2 > c^2$ имеем

$$a_{\min}^2 = c^2, a_{\max}^2 = 2a^2 = r^2, a_{av}^2 = (r^2 + 2c^2)/4, \text{ при условии } r \gg c.$$

$$\begin{aligned} \arg R_{0c} &= (\arctan \sqrt{r^2/4c^2 - 1/2} - \arctan \sqrt{4r^2/(r^2 + 2c^2) - 1})/2 = \\ &= (\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{3})/2 < \frac{\pi}{8}, |R_{0c}| = \frac{Vr}{v2} = \frac{Va}{v\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Получается, что тарелка имеет меньшую фазу формы тела и, следовательно, испытывает большее сопротивление.

Большая шероховатость поверхности

$$r = a \sin^2 \varphi \sin^2 \theta, a_{\min}^2 = a^2, a_{\max}^2 = a^2, a_{av}^2 = a^2/4$$

определяет число Рейнольдса

$$\begin{aligned} R_{0c} &= \exp[i(\arctan \sqrt{a^2/4a^2 - 1} - \arctan \sqrt{4a^2/a^2 - 1})/2] = \\ &= \frac{Va}{2v} \exp(-i \arctan \sqrt{3}/2) \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{V}{2} \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \frac{a}{v} \exp[-(i \arctan \sqrt{3})/2] = \\ &= 0.03 \frac{Va}{v} \exp(-i\pi/6) \end{aligned}$$

При значении параметров

$$r = a \sin^4 \varphi \sin^4 \theta, a_{\min}^2 = a^2, a_{\max}^2 = a^2, a_{av}^2 = a^2 9/64, \text{ имеем число Рейнольдса}$$

$$\begin{aligned} R_{0c} &= \frac{Va}{4v} \exp[i(\arctan i\sqrt{55}/8 - \arctan \sqrt{64/9 - 1})/2] = \\ &= \frac{3Va}{8v} \exp[-i \arctan \sqrt{55}/3/2] \frac{8 - \sqrt{55}}{8 + \sqrt{55}} = 0.01 \frac{Va}{v} \exp(i\pi/5.29) \end{aligned}$$

Наибольшей фазой обладает система, у которой $a_{\min} = 0, a_{\max} = a_{av}$ причем

$$R_{0c} = \frac{Va_{av}}{v} \exp(i\pi/4). \text{ При этом имеем соотношение } a_{\min} < a_{av} < a_{\max}.$$

Можно добиться, что $a_{av} = a_{\max}^\alpha a_{\min}^{1-\alpha}$, тогда число Рейнольдса потока равно

$$R_{0c} = \frac{Va_{\max}^{\alpha} a_{\min}^{1-\alpha}}{\nu} \exp[i(\arctan \sqrt{a_{\max}^{2\alpha} / a_{\min}^{2\alpha}} - 1 - \arctan \sqrt{a_{\max}^{2-2\alpha} / a_{\min}^{2-2\alpha}} - 1) / 2] =$$

$$= \frac{Va_{\max}^{\alpha} a_{\min}^{1-\alpha}}{\nu} \exp(i\pi/4), n \gg 1, \alpha = 1 - 1/n$$

Для максимального значения фазы формы тела предлагается следующий профиль

$$r = a_{\max}^{(1+\cos\varphi)\sin\theta/2} a_{\min}^{(1-\cos\varphi)(1-\sin\theta)/2}, r_{\min} = a_{\min}, r_{\max} = a_{\max}.$$

При этом изменение угла φ, θ на константу не изменит значение интеграла, и значит, фаза формы тела, и модуль радиуса тела не изменятся. Т.е. это характеристики данного тела, его формы и размера. При этом у симметричного тела след может быть расположен под углом.

Тогда имеем значение интеграла

$$R_{0c}^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{V^2 r^2(\theta, \varphi)}{\nu^2} \times$$

$$\times \exp[i(\arctan \sqrt{r^2(\theta, \varphi) / a_{\min}^2} - 1 - \arctan \sqrt{a_{\max}^2 / r^2(\theta, \varphi)} - 1)] \sin\theta d\theta d\varphi / 4\pi$$

При условии $a_{\max} \gg a_{\min}$ интеграл определяется значением $\theta \sim \pi/2, \varphi = 0$ с максимумом в точке $\theta = \pi/2, \varphi = 0$. При этом в точке максимума подынтегрального выражения имеем

$$a_{av} = a_{\max}^{(1+\cos\varphi)\sin\theta/2} a_{\min}^{(1-\cos\varphi)(1-\sin\theta)/2} = a_{\max}.$$

Максимум подынтегральной функции достигается в точке $\varphi = 0$. При этом интеграл равен приближенно

$$R_{0c} = \frac{Va_{\max}^{1-1/n} a_{\min}^{1/n}}{2\pi\nu} \exp[i(\arctan \sqrt{a_{\max}^{2-2/n} / a_{\min}^{2-2/n}} - 1 - \arctan \sqrt{a_{\max}^{2/n} / a_{\min}^{2/n}} - 1) / 2] =$$

$$= \frac{Va_{\max}^{1-1/n} a_{\min}^{1/n}}{2\pi\nu} \exp(i\pi/4), n \sim \frac{a_{\max}}{a_{\min}} > 1$$

Т.е. вычислено максимальное значение, которое может принимать фаза формы тела.

4. Формулы перехода из трехмерного пространства в двумерное пространство

Ставится задача по определению преобразования $\varphi(\varphi_1, \varphi_2)$ такого, чтобы $\varphi_l = \varphi_l[\varphi(\varphi_1, \varphi_2)], l = 1, 2$, При этом получится кривая линия $\varphi_l = \varphi_l(\varphi), l = 1, 2$, причем справедливо $\varphi = \varphi(\varphi_1, \varphi_2)$. Т.е. имеется взаимно однозначное соответствие между двумерными и одномерными координатами на кривой линии.

Простейшим примером таких функций являются соотношения

$$\begin{aligned} c \tan \varphi_l &= h_l(c_l \tan \varphi), c_l \tan \varphi = h_l^{-1}(c \tan \varphi_l), \\ \sum_{l=1}^2 c_l^2 \tan^2 \varphi &= c^2 \tan^2 \varphi = \sum_{l=1}^2 [h_l^{-1}(c \tan \varphi_l)]^2, c^2 = \sum_{l=1}^2 c_l^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

При этом функции $h_l, l = 1, 2$, определяющие траектории, вдоль которых берется решение, необходимо задавать. Функции $c_l = c_l(\tan \varphi_1, \tan \varphi_2)$ и зависимость $\tan \varphi = \tan \varphi(\tan \varphi_1, \tan \varphi_2, \varphi_{10}, \varphi_{20})$ необходимо определить. Разрешая систему уравнений $c \tan \varphi_l = h_l(c_l \tan \varphi), l = 1, 2$ относительно коэффициентов c_l , получим $c_l = c_l(\tan \varphi_1, \tan \varphi_2, \tan \varphi), l = 1, 2$, определим связь $\tan \varphi = \tan \varphi(\tan \varphi_1, \tan \varphi_2, \varphi_{10}, \varphi_{20})$ из условия, чтобы определитель обобщенной матрицы Якоби $\partial c_l(\tan \varphi_1, \tan \varphi_2, \tan \varphi) / \partial \tan \varphi_k, l, k = 1, \dots, 2$ равнялся нулю.

$$c_n = c_n(\tan \varphi_1, \tan \varphi_2, \tan \varphi) = c_n(\varphi_{10}, \varphi_{20}, \tan \varphi) + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial c_n(\xi_1, \dots, \xi_N, \tan \varphi)}{\partial \tan \varphi_k} (\tan \varphi_k - \tan \varphi_{k0})$$

При этом возникнет система нелинейных уравнений с уравнениями в частных производных первого порядка относительно $\tan \varphi$. Решая ее с помощью метода характеристик, получим зависимость

$$\tan \varphi = \varphi(\tan \varphi_1, \tan \varphi_2, \varphi_{10}, \varphi_{20}).$$

Т.е. имеем преобразование координат $c_l = c_l(\tan \varphi_1, \tan \varphi_2, \varphi_{10}, \varphi_{20}), l = 1, 2$.

При этом из (4.1) следует зависимость $g_l(\tan \varphi_1, \tan \varphi_2, \varphi_{10}, \varphi_{20}) = g_l(\tan \varphi), l = 1, 2$. Откуда следует зависимость $\tan \varphi_l = \tan \varphi_l(\tan \varphi, \varphi_{10}, \varphi_{20})$

Подставляем эти значения в уравнения (4.2), которое является необходимым условием существования преобразования координат $c_l = c_l(\tan \varphi_1, \tan \varphi_2, \varphi_{10}, \varphi_{20}), l = 1, 2$.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial \tan \varphi_1} & c_1 - c_1^0 \\ \frac{\partial c_2}{\partial \tan \varphi_1} & c_2 - c_2^0 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.2)$$

Откуда определим величины $\varphi_{10} = \varphi_{10}(\tan \varphi_1, \tan \varphi_2, \varphi_{20})$. В силу полученного соотношения имеем формулы для коэффициентов c_l и для одномерной координаты $c_l = c_l(\tan \varphi_1, \tan \varphi_2, \varphi_{20}), \tan \varphi = \tan \varphi(\tan \varphi_1, \tan \varphi_2, \varphi_{20}), l = 1, 2$. При этом известна двусторонняя связь между одномерным углом и двумя углами основной системы координат $\tan \varphi_l = \tan \varphi_l(\tan \varphi, \varphi_{20}), l = 1, 2, \tan \varphi = \tan \varphi(\tan \varphi_1, \tan \varphi_2, \varphi_{20})$, т.е. преобразование определено.

При этом имеем следующее определение новой переменной по двум углам через значение одномерной координаты $\tan \varphi$, зная связь между координатами $\tan \varphi_i = \tan \varphi_i(\tan \varphi, \varphi_{20})$. Введем периодический угол $w = 2\varphi$.

При этом имеем следующее определение новой переменной по двум углам через значение обобщенной координаты φ , зная связь между координатами $\varphi_i = \varphi_i(\varphi, \varphi_{20})$

$$s^2 dw^2 = s^2 \sum_{i,k=1}^2 g_{ik} d\varphi_i d\varphi_k = s^2 \sum_{i,k=1}^2 g_{ik}(\varphi) \frac{d\varphi_i(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi_k(\varphi)}{d\varphi} d\varphi^2$$

$$s(w - w_0) = s \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\sum_{i,k=1}^2 g_{ik}(\varphi) \frac{d\varphi_i(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi_k(\varphi)}{d\varphi}} d\varphi$$

Зная формулу перехода из одномерного пространства в двумерное $\varphi_l = \varphi_l(\varphi, \varphi_{20}), l=1,2$, можно вычислить скорость и ее направление по известной формуле для скоростей V_φ, V_s . При этом имеем следующую формулу

$$V_{\varphi_1} = \frac{\rho d\varphi}{dt} \frac{\rho_1 \partial \varphi_1(\varphi, \varphi_{20})}{\rho \partial \varphi} = V_\varphi(s, \varphi) \frac{\rho_1 \partial \varphi_1(\varphi, \varphi_{20})}{\rho \partial \varphi}$$

$$V_{\varphi_2} = V_\varphi(s, \varphi) \frac{\rho_2 \partial \varphi_2(\varphi, \varphi_{20})}{\rho \partial \varphi}, V_\varphi(s, \varphi) = \frac{\rho d\varphi}{dt}$$

Величина ρ_l радиус кривизны координатной сетки s, φ_1, φ_2 . Величина ρ , это радиус кривизны координатной сетки, в заданном сечении.

Причем, зная скорость на поверхности ρ, φ , определяется скорость потока в трехмерном пространстве. Причем по информации о силах, действующих в двумерной плоскости, можно вычислить и силы, действующие на данное тело.

Построим функцию, равную на поверхности тела константе, и будем считать ее радиусом тела, для чего запишем уравнение Лапласа в цилиндрическом случае. При этом уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial U}{\partial u} \right) + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 U}{\partial w^2} = 0,$$

уравнение приводится к виду

$$\frac{1}{u^2} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \ln u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial w^2} \right] = 0, \quad (4.3)$$

рассмотрим решение $U = \exp(-m \ln s + in \gamma w)$, где имеем значение величины $\gamma = (2k + 1)/2, k=1, \dots$. Подставим его в дифференциальное уравнение (4.3), разложив оператор, входящий в (4.4), на множители

$$\left(\frac{\partial}{\partial \ln u} + \frac{\partial}{\partial i w}\right)U = 0 ,$$

и определим величину $\ln s$ из формулы

$$-n \frac{\partial \ln s}{\partial \ln u} + n = 0 ,$$

откуда полагая начальное условие для величины s равным 1, получим

$$s = u(y, w) / u(y_0, w) .$$

При этом уравнение Лапласа (4.3) соответствует цилиндрическому уравнению Лапласа.

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial U}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 U}{\partial w^2} = 0 . \quad (4.4)$$

Но граничное условие соответствует постоянному радиусу. Перейдя в систему координат $x = s \cos w, y = s \sin w$, получим систему координат со свойствами декартового пространства x, y , относительно которых и будем записывать уравнение Навье – Стокса и неразрывности.

Список литературы

1. *Снегуров А.А. Якубовский Е.Г.* Турбулентный и ламинарный режим течения // Abstracts of International Conference – Fluxes and Structures in fluids, St-Peterburg, 2007, p.289-291.
2. *Л.Д.Ландау Е.М.Лифшиц* Гидродинамика, т.VI, М.-, «Наука»,1988г., 736стр
3. *Deardorff J.W.* A Numerical Study of Three-Dimensional Turbulent Channel Flow of Large Reynold Number, J.Fluid Mech.,**41**,453-480 (1970)
4. *Deardorff J.W.* A Three-Dimensional Numerical Investigation of the Idealized Planetary Boundary Layer, Geophys.Fluid Dyn,**1**,377-410,(1970)

5. *У.Шуманн, Г.Гретцбах, А.Клейзер* Прямые методы численного моделирования турбулентных течений. // Методы расчета турбулентных течений, М.:Мир, 1984,с.103-226.
6. *Fersiger J.H.* Large Eddy Numerical Simulations of Turbulent Flows. // AIAAJ, 1977, v.15, №9, 1261-1267
7. *Orszag S.A.,Palera A.T.* Subcritical Transition to Turbulence in Plane Channel Flow.-Thys.Rev. Letter,1981, v.47, №12, p.832-835
8. *Кочин Н.Е, Кибель И.А., Розе И.В.* Теоретическая гидромеханика М.:, ч.I, Государственное Издательство Физико-математической литературы, 1963г, 585с
9. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Государственное Издательство Физико-математической литературы, 1963г., ч.II,400с.
10. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики . М.: «Наука», 1981г., 512с.