Сингулярности решения задачи движения двух тел

или способ предсказания землетрясения

Якубовский Е.Г.

НМСУГ e-mail yakubovski@rambler.ru

В случае, когда планеты выстраиваются вдоль радиуса, сила притяжения, действующая на Землю, увеличивается, что может вызвать землетрясение. Причем планетам не обязательно выстраиваться вдоль радиуса, достаточно, чтобы радиус центра тяжести планет имел большое значение, и он будет действовать как новая планета. Точный расчет реализован с помощью комплексного радиуса планет, и, следовательно, возможной сингулярности знаменателя гравитационной силы.

Решение обыкновенной системы нелинейных уравнений второго порядка в случае наличия комплексных координат положения равновесия, имеет комплексное решение, см. [1]. Это создает в случае решения задачи N тел предпосылки к наличию землетрясения, так как знаменатель может обратиться в ноль или быть малым внутри Земли и спровоцировать землетрясение.

Функция Лагранжа движения пары тел записывается в виде

$$L = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} + U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$$

Вводится относительное расстояние между телами $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Начало координат помещается в центр тяжести этой системы тел.

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0 .$$

Тогда координаты этих тел определяются по формуле

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$
$$\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} .$$

Подставляя радиус вектор этих тел, получим функцию Лагранжа

$$L=\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2}+U(|\mathbf{r}|), m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}.$$

В случае действительного относительного расстояния, сингулярность возникает только при условии удара двух тел. т.е. $|\mathbf{r}|=0$.

В случае учета третьего тела начало координат надо брать в центре инерции

$$m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+m_\Sigma\mathbf{r}_\Sigma=0.$$

Где величина $m_\Sigma\mathbf{r}_\Sigma$ равна $(m_3+...m_N)\mathbf{r}_\Sigma=m_\Sigma\mathbf{r}_\Sigma=m_3\mathbf{r}_3+...+m_N\mathbf{r}_N$

Координаты каждого тела равны

$$\mathbf{r}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}-\frac{m_0}{m_1+m_2}\mathbf{r}_\Sigma$$

$$\mathbf{r}_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}-\frac{m_0}{m_1+m_2}\mathbf{r}_\Sigma.$$

$$m_0=m_3+...m_N$$

Подставляем в функцию Лагранжа, получаем

$$L=\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2}+\frac{m_0^2}{(m_1+m_2)}\dot{\mathbf{r}}_\Sigma^2+U(|\mathbf{r}|), m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}.$$

Это выражение можно представить в виде

$$L=|\sqrt{m}\dot{r}_l+i\frac{m_0\sqrt{2}}{\sqrt{m_1+m_2}}\dot{r}_{\Sigma l}|^2/2+U(|\mathbf{r}|).$$

Или вводя радиус $R_l=\dot{r}_l+i\frac{m_0\sqrt{2}}{\sqrt{(m_1+m_2)m}}\dot{r}_{\Sigma l}$. Получим функцию Лагранжа

$$L=\frac{m\dot{\mathbf{R}}^2}{2}+U(|\mathbf{R}-i\frac{m_0\sqrt{2}}{\sqrt{m_1m_2}}\mathbf{r}_\Sigma|).$$

Теперь сингулярность возникает при условии $\mathbf{R}-i\frac{m_0\sqrt{2}}{\sqrt{m_1m_2}}\mathbf{r}_\Sigma=0$, где величина $\mathbf{R}$ описывает траекторию относительного движения двух тел, т.е. равна $\mathbf{R}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$. При этом значение потенциальной энергии берется относительно величины $-i\frac{m_0\sqrt{2}}{\sqrt{m_1 m_2}}\mathbf{r}_\Sigma$, которая во времени меняется не значительно, почти константа. Равенство нулю или малое значение выражения $\mathbf{R}-i\frac{m_0\sqrt{2}}{\sqrt{m_1 m_2}}\mathbf{r}_\Sigma = 0$, означает, что внутри Земли появляются сингулярности или неоднородности гравитационной силы притяжения, которые могут спровоцировать землетрясение. Но для определения землетрясения нужно знать изменение комплексных координат всех тел, вернее определить комплексные начальные условия в определенный момент времени, а далее комплексные координаты определятся из решения уравнений.

Дело в том, что парное взаимодействие планет определяет траекторию $r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$ причем эксцентриситет e и угол φ действительны. Величины r, p комплексные. Причем парное взаимодействие можно описывать как действительными, так и комплексными числами. Комплексное решение появляется при учете множества тел. Т.е. необходимо определить координаты положения равновесия N тел.

$$\frac{md^2\mathbf{r}_l}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma m_k(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l)}{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l, \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l)^{3/2}}.$$

Это уравнение инвариантно относительно преобразования $\mathbf{R}_l = \exp(2i\pi p/3)\mathbf{r}_l, p = \pm 1$, где $\mathbf{r}_l$ действительная координата, а $\mathbf{R}_l$ получающаяся комплексная координата. Т.е. достаточно проверить условие минимума знаменатели потенциальной энергии, в точке минимума знаменателя достигается максимум действующей силы

$$\min\{[\mathbf{R}\cos(2\pi p/3)+\frac{m_0\sqrt{2}}{\sqrt{m_1 m_2}}\mathbf{r}_\Sigma \sin(2\pi p/3)]^2+$$
$$+[\mathbf{R}\sin(2\pi p/3)+\frac{m_0\sqrt{2}}{\sqrt{m_1 m_2}}\mathbf{r}_\Sigma \cos(2\pi p/3)]^2\}=$$
$$=\min\{R^2+\frac{2m_0^2}{m_1 m_2}r_\Sigma^2+2(\mathbf{R},\mathbf{r}_\Sigma)\frac{m_0\sqrt{2}}{\sqrt{m_1 m_2}}\sin\frac{4\pi p}{3}\}=$$
$$=\min\{R^2+\frac{2m_0^2}{m_1 m_2}r_\Sigma^2\pm\sqrt{3}Rr_\Sigma\cos\theta\frac{m_0\sqrt{2}}{\sqrt{m_1 m_2}}\},\ p=\pm 1$$

Где $\mathbf{R}=\mathbf{r_e}-\mathbf{r_s}$, $\mathbf{r_e}$ радиус вектор Земли, $\mathbf{r}_s$ радиус вектор Солнца, $\mathbf{r}_\Sigma$ центр тяжести остальных планет, где центр системы координат находится в центре тяжести всей Солнечной системы, который почти совпадает с центром Солнца. В момент времени, когда эта функция достигает минимума, происходит землетрясение. Имеется два значения параметра p, какой из них реализовался в нашей Солнечной системе не ясно, но влияние этих двух значений одинаково. Минимум достигается в зависимости от величины r_Σ при заданном относительном расстоянии между Солнцем и Землей. При условии минимума $r_\Sigma=\pm\frac{\sqrt{3m_1 m_2}}{2m_0\sqrt{2}}R\cos\theta$, получается, что он равен $(\frac{m_0\sqrt{2}}{\sqrt{m_1 m_2}}r_\Sigma\mp\frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\theta)^2+R^2(1-\frac{3}{4}\cos^2\theta)$. Минимум этого выражения достигается при условии $\cos\theta_0=\pm\frac{2\sqrt{2}m_0 r_\Sigma}{\sqrt{3m_1 m_2}R}$ и он равен $\min(R^2-\frac{2m_0^2}{m_1 m_2}r_\Sigma^2)=\min R^2(1-\frac{2m_0^2}{m_1 m_2}\frac{r_\Sigma^2}{R^2})$. Причем значение минимума зависит от точности соответствия угла значению $\cos\theta_0=\pm\frac{2\sqrt{2}m_0 r_\Sigma}{\sqrt{3m_1 m_2}R}$.

Причем в самом не благоприятном случае, когда 5 самых тяжелых планет выстраивается вдоль радиуса, выполняется условие $\sqrt{m_1 m_2}R=8.2\cdot 10^4 >> \sqrt{2}m_0 r_\Sigma=748$ и дополнительная сила, действующая со стороны планет, составляет $1.6 \cdot 10^{-4}$ силы притяжения Солнца. Но точный расчет показывает, что планеты не должны точно выстраиваться вдаль радиуса, а должны образовывать угол $\cos\theta = \pm \frac{2\sqrt{2} m_0 r_\Sigma}{\sqrt{3 m_1 m_2} R}$ с направлением Солнце - Земля.

Этот расчет по порядку величины совпадает с отношением силы притяжения планет Солнечной системы и Земли, расположенных на одном радиусе, к силе притяжения Солнца и Земли $\sum_l \frac{m_l}{R_l^2} / \frac{m_s}{R_s^2} = 0.4 \cdot 10^{-4}$

Эта сила создает ускорение g, которое определяет разность давлений по формуле $\Delta p = \rho \cdot g_s h$, равную $g_s = \frac{\gamma m_s}{R_s^2} 1.6 \cdot 10^{-4} = 8.38 \cdot 10^{-5} cm/s^2$, причем безразмерные параметры равны $P_s = g_s T_s^2 / R_s$, где $T_s = 1000 year$ период времени между землетрясениями в одном и том же месте. 1.

1. $m_s = 2 \cdot 10^{33} g$ масса Солнца.
2. $R_s = 1.5 \cdot 10^8 km$ расстояние от Земли до Солнца
3. $m_m = 7.3 \cdot 10^{25} g$, это масса Луны
4. $R_m = 3.84 \cdot 10^5 km$ расстояние от Земли до Луны

Период действия лунного притяжения равен половина суток $T_m = 0.5 day$. Сила притяжения Луны создает в объеме Земли ускорение $g_m = 3.3 \cdot 10^{-3} cm/s^2$. Имеем обозначение безразмерного действия Луны $P_m = g_m T_m^2 / R_m$. При этом воздействие является периодическим $P_s = g_s T_s^2 / R_s \sin(\frac{2\pi t}{T_s})$. Причем, при малом T_s воздействие будет компенсироваться, а при большом T_s накапливаться. Тогда действие планет Солнечной системы относительно действия Луны определяется отношением безразмерных параметров. Действие, заключающееся в деформации планеты Земля и вызывающее землетрясения

Земли, за счет планет Солнечной системы в $\frac{P_s}{P_m} = 3.46 \cdot 10^7$ раза эффективнее, чем действие за счет Луны. Основной вклад в дополнительную силу определяет Юпитер, как тело с наибольшей массой и находящееся ближе всех тяжелых планет к Солнцу. Но данный прогноз не указывает место землетрясения, поэтому воздействие планет следует уточнить, с указанием места землетрясения. Земля вращается, и под действие притяжения планет попадают разные районы Земли. Но максимум действующей силы достигается в один момент времени, так же как и затмения. Но районы наблюдения затмения движутся по поверхности Земли, причем действие затмения в данном районе, длится короткое время. Но действие землетрясения, расположено на одной линии с направлением Земля – Солнце, причем расстояния до Юпитера гораздо больше, чем до Луны, поэтому полоса воздействия на Землю со стороны Юпитера гораздо уже, чем полоса воздействия Луны.

Причем радиус R_i площади поверхности Земли, на которую распространится действие притяжения, равен $R_i^2 / R_e^2 = R_u^2 / R_{eu}^2$, где R_e, R_u радиус Земли и Юпитера, R_{eu} расстояние между Землей и Юпитером. Величина R_i определяется из формулы $R_i = 58m$. При этом угловые размеры Юпитера равны 10^{-5}, при характерном угле между направлением Земля – Солнце и направлением Земля – Юпитер $1.6 \cdot 10^{-4}$. Т.е. ширина полосы действия на Земле повышенного притяжения планет $0.8km$. При орбитальной скорости планеты Юпитер $60km/s$ расстоянии на орбите Юпитера угловым размером $1.6 \cdot 10^{-4}$ он пройдет за 34 минуты. Т.е. длина полосы, на которой скажется притяжение Юпитера, на поверхности Земли $954km$, т.е. всего 2% длины окружности Земли. Но ширина полосы всего $800m$.

Литература

1. Якубовский Е.Г. Комплексные решения уравнений в частных производных. Международный независимый институт Математики и Систем «МиС», №8, 2014, с. 60-66 http://math-systems.ru/files/Arhiv/19-20.09.2014/mis8.pdf#page=66