Решение проблемы описания многих тел с помощью парных траекторий

Якубовский Е.Г.

НМСУГ e-mail yakubovski@rambler.ru

Аннотация. *Проблема описания движения N тел, взаимодействующих с помощью гравитационного поля, не решена. Задача решается с помощью численных методов, которые при длительном счете приводят к ошибкам решения. Предлагается формула на основе парного взаимодействия, описывающая траектории всех взаимодействующих тел при релятивистских скоростях движения.*

Дифференциальные уравнения движения N тел интегрируются приближенно либо с помощью рядов (аналитические методы), или численным интегрированием (численные методы) см. [1],[2],[3]. Но оба эти метода являются приближенными и при больших временах дают большую ошибку. В книге [4], реализуется расчет задачи трех тел, одно из которых имеет небольшую массу. Исследуется задача устойчивости этой системы тел. Но это частный случай решении задачи движения N тел. В книге [5], описаны применения известных методов для расчета траекторий трех небесных тел, одно из которых имеет малую массу.

Решение задачи N тел является актуальной проблемой небесной механики и для точного расчета движения космических искусственных тел является не заменимой. Предлагаемая теория позволяет точно рассчитывать траекторию космического аппарата, что на сегодняшний день является актуальнейшей проблемой космонавтики.

Рассмотрим вспомогательную задачу взаимодействия пар тел с особой приведенной массой. Тогда относительное взаимодействие и движение каждой пары можно определить. При этом необходимо приведенную массу считать особым образом по формуле $m_n m_k / \sum_{l=1}^{N} m_l$. Но как восстановить траекторию каждого тела? Для этого запишем силу, действующую на одно тело

$$\frac{d\mathbf{u}_k^s}{ds} = \sum_{n=1,n\neq k}^{N} \mathbf{G}^s(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_n, \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_n) = \sum_{n=1,n\neq k}^{N} \Gamma_{pq}^s(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_n)(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_n)^p(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_n)^q. \quad (1)$$

Решим вспомогательную задачу о парном взаимодействии тел с приведенной инертной массой $m_n m_k / \sum_{l=1}^{N} m_l$, в гравитационном поле с относительным расстоянием $\mathbf{R}^{kn}$ между двумя телами

$$\frac{m_n m_k}{\sum_{l=1}^{N} m_k} \frac{d\mathbf{U}^{kn}}{ds} = m_k \mathbf{G}^k(\mathbf{R}^{kn}, \mathbf{U}^{kn}). \quad (2)$$

Сократим эту формулу на m_k и просуммируем эту формулу по индексу n, исключая из суммы член с нулевым знаменателем и добавив член $\mathbf{R}^{kk} = 0$, получим формулу

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{\sum_{s=1}^{N} m_s} \frac{d\mathbf{U}^{kn}}{ds} = \frac{d\mathbf{U}_0^k}{ds} = \sum_{n=1,n\neq k}^{N} \mathbf{G}^k(\mathbf{R}^{kn}, \mathbf{U}^{kn}) \quad (3)$$

Где величина $\mathbf{U}_0^k$ определяется из равенства $\mathbf{U}^k = \sum_{n=1}^{N} m_n \mathbf{U}^{kn} / \sum_{n=1}^{N} m_n$. Вычтем из уравнения (3) уравнение (1), получим

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{\sum_{s=1}^{N} m_s} \frac{d\mathbf{U}^{kn}}{ds} - \frac{d\mathbf{u}^k}{ds} = \sum_{n=1,n\neq k}^{N} \mathbf{G}^k(\mathbf{R}^{kn}, \mathbf{U}^{kn}) - \sum_{n=1,n\neq k}^{N} \mathbf{G}^k(\mathbf{r}^k - \mathbf{r}^n, \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^n). \quad (4)$$

Запишем уравнение (4) но с индексом p

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{m_n}{\sum\limits_{s=1}^{N}m_s}\frac{d\mathbf{U}^{pn}}{ds}-\frac{d\mathbf{u}^k}{ds}=\sum_{n=1,n\neq p}^{N}\mathbf{G}^p(\mathbf{R}^{pn},\mathbf{U}^{pn})-\sum_{n=1,n\neq p}^{N}\mathbf{G}^p(\mathbf{r}^p-\mathbf{r}^n,\mathbf{u}^p-\mathbf{u}^n) \quad (5)$$

Вычтем из уравнения (4) уравнение (5), получим уравнение

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}\frac{m_n}{\sum\limits_{s=1}^{N}m_s}\frac{d\mathbf{V}^{kn}}{ds}-\frac{d\mathbf{u}^k}{ds}-\sum_{n=1}^{N}\frac{m_n}{\sum\limits_{s=1}^{N}m_s}\frac{d\mathbf{V}^{pn}}{ds}+\frac{d\mathbf{u}^p}{d\tau}=\\
&=\sum_{n=1,n\neq k}^{N}\mathbf{G}^k(\mathbf{R}^{kn},\mathbf{U}^{kn})-\sum_{n=1,n\neq k}^{N}\mathbf{G}^k(\mathbf{r}^k-\mathbf{r}^n,\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^n)- \quad (6)\\
&-\sum_{n=1,n\neq p}^{N}\mathbf{G}^p(\mathbf{R}^{pn},\mathbf{U}^{pn})+\sum_{n=1,n\neq p}^{N}\mathbf{G}^p(\mathbf{r}^p-\mathbf{r}^n,\mathbf{u}^p-\mathbf{u}^n)
\end{aligned}$$

Подстановка величины $\mathbf{R}^{kn}$ равной $\mathbf{R}^{kn}=\mathbf{r}^k-\mathbf{r}^n$ обращает это уравнение в тождество. Равенство правой части этой формулы нулю очевидно. Докажем равенство нулю левой части. Она равна

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}\frac{m_n}{\sum\limits_{s=1}^{N}m_s}\frac{d(\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^n)}{ds}-\frac{d\mathbf{u}^k}{ds}-\sum_{n=1}^{N}\frac{m_n}{\sum\limits_{s=1}^{N}m_s}\frac{d(\mathbf{u}^p-\mathbf{u}^n)}{ds}+\frac{d\mathbf{u}^p}{ds}=\\
&=\sum_{n=1}^{N}\frac{m_n}{\sum\limits_{s=1}^{N}m_s}\frac{d\mathbf{u}^k}{ds}-\frac{d\mathbf{u}^k}{ds}-\sum_{n=1}^{N}\frac{m_n}{\sum\limits_{s=1}^{N}m_s}\frac{d\mathbf{u}^p}{ds}+\frac{d\mathbf{u}^p}{ds}= \quad .\\
&=\frac{d\mathbf{u}^k}{ds}-\frac{d\mathbf{u}^k}{ds}-\frac{d\mathbf{u}^p}{ds}+\frac{d\mathbf{u}^p}{ds}=0
\end{aligned}$$

Т.е. получено частное решение системы уравнений (6). В результате использования этого частного решения получим частное решение системы уравнений движения. Но так как уравнение движения имеет единственное решение как единственное решение задачи Коши для системы обыкновенных уравнений движения по закону Ньютона, это частное решение является единственным решением уравнения движения.

При этом уравнение движения определится из равенства, которое следует из равенства (4), правая часть которого равна нулю, в соответствии с доказанным свойствам $\mathbf{R}^{kn} = \mathbf{r}^k - \mathbf{r}^n, \mathbf{U}^{kn} = \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^n$, где координаты и скорости четырехмерны

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{\sum_{s=1}^{N} m_s} \frac{d\mathbf{U}^{kn}}{ds} = \frac{d\mathbf{u}^k}{ds}. \qquad (7)$$

Вводим понятие релятивистских координат $\mathbf{r}^k$ для каждого тела, равных $\mathbf{u}^k = \frac{d\mathbf{x}^k}{ds_k} = \frac{d\mathbf{x}^k}{cdt\sqrt{1-(V^k)^2/c^2}} = \frac{d\mathbf{r}^k}{ds}$, где величина s соответствует инерциальной системе отсчета, двигающейся со скоростью V_0, т.е. имеем $s - s_0 = c\sqrt{1-V_0^2/c^2}(t-t_0)$. Такое определение метрического интервала соответствует ОТО, в которой метрический интервал один, в отличии от СТО, в котором метрический интервал соответствует локально каждому телу, определяемый скоростью тела. Т.е. в релятивистском пространстве уравнения движения совпадут с уравнением движения Ньютона, причем скорость, соответствующая четырехмерной скорости не ограниченно растет. При этом уравнения движения будут инвариантны относительно преобразования Лоренца см. (1). При таком описании релятивистских координат, будет наблюдаться инвариантность относительно преобразования Лоренца всех тел, появится инвариантная координата центра инерции, и уравнения движения можно будет проинтегрировать. При этом, необходим пересчет релятивистских координат в декартовы координаты.

Причем силы, действующие на тела $\mathbf{G}^p(\mathbf{R}^{pn}, \mathbf{U}^{pn}), \mathbf{G}^p(\mathbf{r}^p - \mathbf{r}^n, \mathbf{u}^p - \mathbf{u}^n)$, определяются в релятивистском пространстве, так как задача по определению ускорений в уравнении Ньютона решается в релятивистских координатах. При этом релятивистские координаты пересчитываются в декартовы координаты. Причем при решении относительно метрического интервала запаздывание учитывать не надо, оно учитывается автоматически.

Причем декартовы координаты $\mathbf{x}^k$, связаны с релятивистскими координатами $\mathbf{r}^k$ соотношением

$$\mathbf{x}^k = \int\limits_{\mathbf{r}_0^k}^{\mathbf{r}^k} \frac{ds_k}{ds} d\mathbf{r}^k = \int\limits_{\mathbf{r}_0^k}^{\mathbf{r}^k} \frac{1}{\sqrt{(1+u_k^2)(1-V_0^2/c^2)}} d\mathbf{r}^k. \qquad (8)$$

Где величина V_0 скорость инерциальной системы координат, а величина u_k модуль пространственной компоненты четырехмерной скорости тела, которая не ограничена и равна в релятивистских и обычных координатах. Соотношение (8) получается из формулы

$$ds_k = c\sqrt{1-V_k^2/c^2}dt = \frac{cdt}{\sqrt{1+u^2}}, ds = \sqrt{1-V_0^2/c^2}cdt; \mathbf{V}_k/c = \frac{u_k}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Где индекс k определяет номер частицы.

В релятивистских координатах можно ввести понятие центра инерции, учитывая изменение времени, причем пространство и время, определяющие центр инерции, инвариантны относительно преобразования Лоренца.

Тогда имеем относительно релятивистских координат

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{\sum\limits_{s=1}^{N} m_s} \frac{d^2\mathbf{R}^{kn}}{ds^2} = \frac{d^2\mathbf{r}^k}{ds^2}.$$

Проинтегрировав это равенство, получим уравнение движения каждого из N тел в релятивистских координатах

$$\mathbf{r}_0^k(s)=\frac{d\mathbf{r}^k(0)s}{ds}+\mathbf{r}^k(0)+\sum_{n=1}^{N}\frac{m_n}{\sum_{s=1}^{N}m_s}[\mathbf{R}^{kn}(s)-\frac{d\mathbf{R}^{kn}(0)s}{ds}-\mathbf{R}^{kn}(0)]=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{m_n\mathbf{R}^{kn}(s)}{\sum_{s=1}^{N}m_s}=\mathbf{R}_0^k(s)$$

Т.е. движение каждого тела определяется движением центра инерции парной системы тел. Начальные условия определяются из условия $\frac{d\mathbf{r}^k(0)}{ds}s+\mathbf{r}^k(0)=\frac{d\mathbf{R}_0^k(0)}{ds}s+\mathbf{R}_0^k(0)$. Т.е. начальные условия движения, соответствуют начальным условиям вычисленной траектории.

При этом если построенное решение подставить в вычисленные относительные траектории планет $\mathbf{r}_0^k(s)-\mathbf{r}_0^n(s)$ и воспользоваться $\mathbf{R}^{kn}(s)=\mathbf{r}^k(s)-\mathbf{r}^n(s)$, то получим $\mathbf{R}^{kn}(s)=\mathbf{r}_0^k(s)-\mathbf{r}_0^n(s)$. В самом деле

$$\mathbf{r}_0^k(s)-\mathbf{r}_0^n(s)=\sum_{p=1}^{N}\frac{m_p}{\sum_{s=1}^{N}m_s}\mathbf{R}^{kp}(s)-\sum_{p=1}^{N}\frac{m_p}{\sum_{s=1}^{N}m_s}\mathbf{R}^{np}(s)=$$

$$=\sum_{p=1}^{N}\frac{m_p}{\sum_{s=1}^{N}m_s}[\mathbf{r}^k(s)-\mathbf{r}^p(s)]-\sum_{p=1}^{N}\frac{m_p}{\sum_{s=1}^{N}m_s}[\mathbf{r}^n(s)-\mathbf{r}^p(s)]=\mathbf{r}^k(s)-\mathbf{r}^n(s)=\mathbf{R}^{kn}(s)$$

При этом справедливо также $\mathbf{U}^{kn}=\mathbf{r}_0^k-\mathbf{r}_0^n$.

При этом каждое тело двигается вокруг центра инерции системы тел $\mathbf{r}_0^k(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{m_n}{\sum_{s=1}^{N}m_s}\mathbf{R}^{kn}(s)=\mathbf{r}^k(s)-\sum_{n=1}^{N}\frac{m_n\mathbf{r}^n(s)}{\sum_{s=1}^{N}m_s}$. Для того, чтобы тело двигалось относительно центра инерции, равнодействующая сила, действующая на тело, должна быть направлена на центр инерции. См.

свойства точных решений [6]. Что и определяет данное решение уравнений.

Докажем, что полученная траектория движения удовлетворяет уравнению движения, для чего используем формулу (7) и используя уравнение о парных траекториях, получим

$$\frac{d^2\mathbf{r}_0^k}{ds^2}=\sum_{n=1}^{N}\frac{m_n}{\sum_{s=1}^{N} m_s}\frac{d^2\mathbf{R}^{kn}}{d\tau^2}=\sum_{n=1,n\neq k}^{N}\mathbf{G}^k(\mathbf{R}^{kn},\mathbf{U}^{kn})$$

Используя равенство $\mathbf{R}^{kn}=\mathbf{r}^k-\mathbf{r}^n=\mathbf{r}_0^k-\mathbf{r}_0^n,\mathbf{U}^{kn}=\mathbf{u}_0^k-\mathbf{u}_0^n$, получим уравнение движения

$$\frac{d^2\mathbf{r}_0^k}{ds^2}=\sum_{n=1,n\neq k}^{N}\mathbf{G}^k(\mathbf{R}^{kn},\mathbf{U}^{kn})=\sum_{n=1,n\neq k}^{N}\mathbf{G}^k(\mathbf{r}_0^k-\mathbf{r}_0^n,\mathbf{u}_0^k-\mathbf{u}_0^n).$$

Т.е. доказано, что траектории отдельных тел, вычисленные с помощью парных траекторий, удовлетворяют уравнению движения. Кроме того, полученная формула для траектории отдельных взаимодействующих тел удовлетворяет начальным условиям и значит, задача N тел по определению траекторий взаимодействующих тел сводится к определению парных траекторий пары тел, которая может быть решена аналитически.

Задача о движении двух тел в центрально симметричном поле сводится к задаче об относительном движении тела. При этом для решения задачи N тел, необходимо определить только относительное движение двух тел.

В случае, если относительная траектория пар тел является эллипсом или окружностью, при отрицательной или нулевой приведенной энергии, его координаты в плоскости вращения меняются по закону

$$x_k - x_n = r_{kn}\cos\varphi = a_{kn}(\cos\xi - e_{kn})$$
$$y_k - y_n = r_{kn}\sin\varphi = a_{kn}\sqrt{1-e_{kn}^2}\sin\xi$$
$$r_{kn} = \sqrt{(x_k - x_n)^2 + (y_k - y_n)^2} = a_{kn}(1 - e_{kn}\cos\xi), \tau = \sqrt{\frac{m_{kn}a_{kn}^3}{\gamma m_k m_n}}(\xi - e_{kn}\sin\xi)$$
$$r_{kn} = \frac{p_{kn}}{1 + e_{kn}\cos\varphi}$$
$$p_{kn} = \frac{M_{kn}^2}{\gamma m_{kn} m_k m_n}, a_{kn} = \frac{p_{kn}}{1 - e_{kn}^2}, e_{kn} = \sqrt{1 + \frac{2E_{kn}M_{kn}^2}{\gamma^2 m_{kn} m_k^2 m_n^2}}, m_{kn} = \frac{m_k m_n}{\sum_{p=1}^{N} m_p}$$

.

Полному обороту по эллипсу соответствует изменение $\xi \in [0, 2\pi]$. Где величина момента равна $\mathbf{M}_{kn} = m_{kn}[\mathbf{R}_{kn}, \dot{\mathbf{R}}_{kn}]$, энергия тела приведенной массы равна $E_{kn} = \frac{m_{kn}\dot{\mathbf{R}}_{kn}^2}{2} - \frac{\gamma m_k m_n}{r}$. В случае положительной приведенной энергии координаты изменяются по закону

$$x_k - x_n = r_{kn}\cos\varphi = a_{kn}(e_{kn} - \cosh\xi)$$
$$y_k - y_n = r_{kn}\sin\varphi = a_{kn}\sqrt{e_{kn}^2 - 1}\sinh\xi$$
$$r_{kn} = \sqrt{(x_k - x_n)^2 + (y_k - y_n)^2} = a_{kn}(e_{kn}\cosh\xi - 1), \tau = \sqrt{\frac{m_{kn}a_{kn}^3}{\gamma m_k m_n}}(e_{kn}\sinh\xi - \xi)$$
$$r_{kn} = \frac{p_{kn}}{1 + e_{kn}\cos\varphi}, a_{kn} = \frac{p_{kn}}{e_{kn}^2 - 1}$$

При повороте плоскости $\theta = 0$ на сферический угол θ имеем

$$\begin{aligned} r'_{kn} &= r_{kn}\cos\theta + (z_k - z_n)\sin\theta \\ x'_k - x'_n &= r'_{kn}\cos\varphi = r'_{kn}(x_k - x_n)/r_{kn} \\ y'_k - y'_n &= r'_{kn}\sin\varphi = r'_{kn}(y_k - y_n)/r_{kn} \\ z'_k - z'_n &= -r_{kn}\sin\theta + (z_k - z_n)\cos\theta \end{aligned}.$$

Штрихованные траектории соответствуют относительному расстоянию $(R_{kn})_x = x'_k - x'_n; (R_{kn})_y = y'_k - y'_n; (R_{kn})_z = z'_k - z'_n$. Зная величину $\mathbf{R}_{kn}$, траектория каждого тела определится по формуле

$$\mathbf{r}_0^k(\tau) = \sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{\sum_{s=1}^{N} m_s} \mathbf{R}^{kn}(\tau)$$

Отметим, что вычисленные траектории взаимодействующих тел являются стационарными в описании поля по законам Ньютона. В случае использования ОТО траектории тел не стационарны. В случае отличия целого числа, описывающего ветвь логарифма, который содержится в решении, начальное и текущее состояние отличаются, и между ними может произойти излучение энергии. Дело в том, что решение задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения со второй производной во времени имеет вид см. [7] формула (1.3.14)

$$\prod_{s=1}^{S} \frac{(\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s})^{\lambda_l^s(\sqrt{c_l}/\sqrt{\alpha_l^s}-1)} (\sqrt{c_l^0} + \sqrt{\alpha_l^s})^{\lambda_l^s(\sqrt{c_l^0}/\sqrt{\alpha_l^s}+1)}}{(\sqrt{c_l} + \sqrt{\alpha_l^s})^{\lambda_l^s(\sqrt{c_l}/\sqrt{\alpha_l^s}+1)} (\sqrt{c_l^0} - \sqrt{\alpha_l^s})^{\lambda_l^s(\sqrt{c_l^0}/\sqrt{\alpha_l^s}-1)}} \times$$

$$\times \exp[\frac{2\pi i \lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}(\sqrt{c_l} - \sqrt{c_l^0})\Delta n_l] = \exp[(h_l - h_l^0)^2/2] = \quad .$$

$$= \exp\{[\int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{\Phi_l[c_1(\tau),...,c_N(\tau)]}{\prod_{s=1}^{S}[c_l(\tau) - \alpha_l^s]}} d\tau]^2/2\}$$

Где имеем дифференциальное уравнение $\frac{dc_l}{dt} = \Phi_l[c_1(t),...,c_N(t)], l = 1,...,N$,

и величина Δn_l в решении соответствует изменению ветви логарифма.

Литература

1. *Г.А. Чеботарев* Аналитические и численные методы небесной механики. М.: «Наука», 1965г., 368с.
2. *М.Ф. Субботин* Введение в теоретическую астрономию. М.: «Наука», 1978г., 1968г.

3. *Г.Н. Дубошин* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: «Наука», 1978г., 456с.
4. *А.П. Маркеев* Точки либраций в небесной механике и космодинамике. М.: «Наука», 1978г., 312с.
5. *Д. Брауэр, Дж. Клеменс.* Методы небесной механики. М.: «Мир», 1964г., 516с.
6. *Шарлье К.* Небесная механика М.: 1966, 623с.
7. *Якубовский Е.* Решение нелинейных уравнений в частных производных. Комплексное турбулентное и действительное ламинарное решение. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015, 181с.