*УДК 521.3*

*PACS number: 96.12.De*

# Доказательство замкнутости траектории N тел с начальной отрицательной энергией парного взаимодействия

**Е.Г. Якубовский**

*Санкт-Петербургский государственный Горный Университет*

*E-mail: Yakubovski@rambler.ru*

Поступила в редакцию .

*Уравнение движения 3 и более тел при решении в действительной плоскости допускают возможный уход на бесконечность одного или несколько тел. Но этот выброс траектории является особенностью численного счета. При численном счете необходимо ввести изменение знака скорости, которая переходит через ноль и возрастание координаты тела сменяется на ее убывание при неизменном значении второй производной от координаты по времени.*

*Ключевые слова: траектории тел солнечной системы, проблема движения многих тел, непериодические траектории движения*

## Введение

Тела солнечной системы взаимодействуют с помощью гравитационного поля и образуют периодические орбиты. Поэтому существовало мнение, что взаимодействие 3 и более тел является периодическим. В 1913 году была осуществлена попытка численного расчета траектории трех тел, имеющих отношение масс 3,4,5 находящихся в начальный момент времени в вершинах прямоугольного треугольника со стороной 3,4,5 см. [1]. Период вращения определить не удалось. В наше время был произведен расчет этой же задачи и при прошествии длительного времени счета произошел выброс тела с эллиптических орбит см. [2],[3]. Это явление стали называть эллиптично-гиперболическое движение. Но выброс из замкнутой системы нескольких тел после длительного вращения вызывает подозрение. В предлагаемой статье показано, что этот выброс является эффектом численного счета. Кроме того нарушаются условия существования и единственности решения. Производная от правой части у полученного уравнения в точке начала ветвления стремится к бесконечности. Т.е. скорость тела изменяет знак, проходя через ноль скорости. Но программа численного счета составлена не верно. Оказывается, что уравнения движения при разбиении на уравнение первого порядка имеют точку ветвления, см. уравнения (2.2) и (2.3). Для получения действительного конечного решения, при переходе скорости через ноль, надо изменять знак скорости в соответствии с переходом на другую ветвь решения. При этом возрастание радиуса, сменится на убывание радиуса при сохраняющей знак второй производной. При этом скорость является монотонной функцией, положительной при возрастании радиуса и отрицательной при его убывании. Т.е. стремление численного счета к бесконечности не связано с бесконечностью траектории тела, а определяет недостаток численного счета, не учет перехода на другую ветвь решения, при нарушении условия существования и единственности тождественно преобразованной задачи. Оказывается, что решение задачи движения $N$ тел имеет точку ветвления скорости движения.

1. Решение уравнений движения $N$ тел.

Система дифференциальных уравнений движения $N$ точечных тел в гравитационном поле имеет вид

$$\frac{d^2 y_l^k}{d\tau^2} = -\gamma \sum_{n=1, n\neq k}^{N} \frac{m_n (y_l^k - y_l^n)}{[\sum_{s=1}^{3} (y_s^k - y_s^n)^2]^{3/2}}. \qquad (1.1)$$

Систему дифференциальных уравнений (1.1) для движения произвольных $N$ тел можно представить в виде

$$\frac{d^2 u_l}{d\tau^2} = \mathrm{P}_l(u_1, ..., u_{3N}), l = 1, ..., 3N. \qquad (1.2)$$

Рассмотрим для простоты 3 тела. Определим координаты функции $\mathrm{P}_l(u_1, ..., u_9)$ равные $u_l = x_l, u_{l+3} = y_l, u_{l+6} = z_l, l = 1, ..., 3$. Введем функцию, не обращающуюся в ноль

$$\exp[H_l(u_1, ..., u_9)] = \frac{\mathrm{P}_l(u_1, ..., u_9)}{\prod_{s=1}^{S} (u_l - a_l^s)}, l = 1, ..., 9. \quad (1.3)$$

Где величина $\exp[H_l(u_1, ..., u_9)]$ в ноль не обращается, т.к. числитель и знаменатель правой части (1.3) обращаются в ноль одновременно, так как коэффициенты множителей $\prod_{s=1}^{S} (u_l - a_l^s)$ удовлетворяют $\mathrm{P}_l(a_1^s, ..., a_9^s) = 0, l = 1, ..., 9$. При этом для уравнения движения величина $\mathrm{P}_l(u_1,...,u_9)$ малая в силу малости гравитационного коэффициента $\gamma$. Значит, мала и величина $\exp[H_l(u_1,...,u_9)]$.

Вычислим координаты положения равновесия у системы уравнений для трех тел. Для этого запишем уравнения по определению положений равновесия для трех тел

$$\frac{M_z(x_l-z_l)}{[\sum_{k=1}^{3}(x_k-z_k)^2]^{3/2}}=-\frac{M_y(x_l-y_l)}{[\sum_{k=1}^{3}(x_k-y_k)^2]^{3/2}}$$

$$\frac{M_x(y_l-x_l)}{[\sum_{k=1}^{3}(y_k-x_k)^2]^{3/2}}=-\frac{M_z(y_l-z_l)}{[\sum_{k=1}^{3}(y_k-z_k)^2]^{3/2}}.$$

$$\frac{M_y(z_l-y_l)}{[\sum_{k=1}^{3}(z_k-y_k)^2]^{3/2}}=-\frac{M_x(z_l-x_l)}{[\sum_{k=1}^{3}(z_k-x_k)^2]^{3/2}}$$

При этом последнее уравнение является следствием первых двух. При этом получаем 6 независимых уравнений при 9 неизвестных координатах. При этом переменные выбраны с точностью до 3 констант, определяющих начало координат. Введем эти константы равные координате положения равновесия $z_l^0$, и получим 6 независимых уравнений

$$\frac{M_z(x_l-z_l^0)}{[\sum_{k=1}^{3}(x_k-z_k^0)^2]^{3/2}}=-\frac{M_y(x_l-y_l)}{[\sum_{k=1}^{3}(x_k-y_k)^2]^{3/2}}$$

$$\frac{M_x(y_l-x_l)}{[\sum_{k=1}^{3}(y_k-x_k)^2]^{3/2}}=-\frac{M_z(y_l-z_l^0)}{[\sum_{k=1}^{3}(y_k-z_l^0)^2]^{3/2}}$$

При этом определятся 6 координат положения равновесия $x_l^0$, $y_l^0$.

В случае произвольного количества тел, задача по нахождению положений равновесия решается аналогично.

Подставим значение функции $\mathrm{P}_l(u_1,...,u_9)$ из (1.3) в (1.2), получим уравнение

$$\frac{d^2u_l}{d\tau^2}=\exp[H_l(u_1,...,u_9)]\prod_{s=1}^{S}(u_l-a_l^s), l=1,...,9. \qquad (1.4)$$

Уравнение (1.2) тождественно преобразуется в уравнение (1.4), что следует из определения функции $\exp[H_l(u_1,...,u_9)]$. При этом величина $\exp[H_l(u_1,...,u_9)]$ малая, но не обращающаяся в ноль функция.

Уравнение (1.4) приведем к виду, для которого возможно интегрирование, для чего необходимо определить функцию $h_l$

$$\frac{d^2u_l}{dh_l^2} = \prod_{s=1}^{S} (u_l - a_l^s), l = 1,...,9 \quad (1.5)$$

Введем оператор

$$\exp[-H_l(u_1,...,u_9)]\frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{d^2}{dh_l^2}. \quad (1.6)$$

определим функцию $h_l(\tau)$. Известно тождество $\frac{du_l}{d\tau} = \frac{dh_l}{d\tau}\frac{du_l}{dh_l}$. Продифференцировав его по времени, получим

$$\frac{d^2u_l}{d\tau^2} = \frac{dh_l}{d\tau}\frac{d}{dh_l}(\frac{dh_l}{d\tau}\frac{d}{dh_l}u_l) = (\frac{dh_l}{d\tau})^2\frac{d^2u_l}{dh_l^2} \quad (1.7)$$

Значит, подействовав оператором (1.6) на функцию $u_l$ и используя (1.7) получим (1.8)

$$\frac{dh_l}{d\tau} = \exp\{H_l[u_1(\tau),...,u_9(\tau)]/2\} \quad (1.8)$$

Откуда определим малую величину $h_l$ в силу малости величины $\exp\{H_l[u_1(\tau),...,u_9(\tau)]/2\}$.

Умножая (1.5) на величину $2du_l/dh_l$ и интегрируя по $h_l$, получим

$$(\frac{du_l}{dh_l})^2 = \Omega_l(u_l) + \gamma_l. \quad (1.9)$$

Это дифференциальное уравнение можно представить в виде интеграла

$$\int_{y_l^0}^{y_l} \frac{du_l}{\sqrt{Q_l(u_l)}} = h_l - h_l^0. \quad (1.10)$$

$$Q_l(u_l) = \Omega_l(u_l) + \gamma_l$$

Где величина $\Omega(u_l)$ полином. Решение этой системы дифференциальных уравнений будет $u_l(h_l) = f_l(h_l)$. Т.е. существует много периодов, для которых выполняется $f_l(h_l) = f_l(h_l + T_{lk}), k = 1,...,\infty$ см. [4],[5],[6],[7]. В случае полинома третьей степени $\Omega(u_l)$ решение содержит два периода. Для полинома большей степени имеется большее количество периодов.

Как же вычислить монотонную функцию $h_l(\tau)$. Ее надо на первой итерации положить равной $\tau$, получив значения $u_l(\tau)$. Далее необходимо интегрировать систему (1.8), определяя зависимость $h_l = h_l(\tau)$ и подставить в уравнение (1.10), получив новые значения $u_l(\tau)$. В силу малости коэффициента $h_l$ выброс произошел бы через длительное время.

## 2. Интерпретация решений уравнения движения

При этом уравнение (1.10) можно записать в виде

$$\frac{du_l}{dh_l} = \sqrt{\Omega_l(u_l) + \gamma_l} = \sqrt{Q_l(u_l)}\,. \qquad (2.1)$$

Найдем координаты положения равновесия $\alpha_l^k$ правой части $Q_l(\alpha_l^k) = \Omega_l(\alpha_l^k) + \gamma_l = 0$. При этом величина под знаком квадратного корня должна сохранять знак. Иначе получится комплексное решение. Кроме того, нарушатся условия существования и единственности решения, которые требуют, чтобы производная от правой части дифференциального уравнения (2.1) по координате была непрерывна. При переходе функции $Q_l(u_l)$ через ноль, меняется знак квадратного корня, и решение остаются ограниченными. Т.е. ни о каком выбросе решения в бесконечно удаленную точку не может и быть речи. Траектория колеблется в строго определенных границах. Расчеты траекторий на ЭВМ оказались не корректными, так как не смогли учесть изменение знака квадратного корня у уравнения (2.1). В программе счета это соответствует изменению знака скорости, при переходе скорости через ноль. При этом уравнения движения Ньютона со второй производной по координате не изменятся. Докажем это.

Имеем формулу уравнение движения

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{d\tau} &= \mathbf{F(R)} \\ \frac{d\mathbf{R}}{d\tau} &= \mathbf{V} \end{aligned}\,. \qquad (2.2)$$

При условии $\mathbf{V} = 0$ координаты величины $\mathbf{V}$ могут изменить знак, при этом вторая производная от радиуса сохраняет знак. Т.е. уравнения (2.2) и уравнения (2.3) справедливы

$$
\begin{aligned}
-\frac{d\mathbf{V}}{d\tau} &= \mathbf{F}(\mathbf{R}) \\
\frac{d\mathbf{R}}{d\tau} &= -\mathbf{V}
\end{aligned}
\qquad (2.3)
$$

и при переходе скорости через ноль переходят одно в другое. При этом функция скорости имеет точку ветвления $\pm\mathbf{V}_l$. Эта точка ветвления соответствует квадратному корню для выражения для скорости, что и подтверждает формула (2.1). При этом при переходе через ноль одна ветвь решения действительная, а другая комплексная. Изменение знака ветви соответствует действительному решению. Поэтому при переходе координаты скорости через ноль меняется знак квадратного корня.

При этом численная схема у уравнений (2.2) и уравнения (2.3) разная. Приведем численную схему уравнения (2.3)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}_l &= \mathbf{V}_{l0} - \mathbf{F}_l(\mathbf{R})\Delta\tau \\
\mathbf{R}_l &= \mathbf{R}_{l0} - \mathbf{V}_l\Delta\tau
\end{aligned}
.
$$

Т.е. при переходе одной координаты скорости через нуль нужно менять численную схему интегрирования, изменяя знак скорости, и тогда не произойдет выброс тела на бесконечность. Но при расчете на ЭВМ не учитывалось изменение знака скорости, поэтому произошел выброс тела на бесконечность. Выбросу тела на бесконечность соответствует комплексная скорость в уравнении (2.1), и не корректный численный счет уравнения движения (1.1), приводящий к бесконечности решения.

Для того, чтобы покинуть границы вращения тела, телу необходимо извне добавить дополнительное количество кинетической энергии, чтобы оно обладало положительной энергией для образования гиперболической траектории. Замкнутая система, связанная гравитационным притяжением, только за счет энергии топлива в ракете, или сообщение удаляющимся частицам энергии за счет термоядерных реакций, например, на Солнце, способна покинуть систему по гиперболической траектории, получив кинетическую энергию из других источников, а не из гравитационного взаимодействия.

Гиперболической траектории соответствует координата точки, большая, или меньшая, чем координаты положения равновесия системы (2.1), определяющей значение скорости. Эта гиперболическая траектория определяется начальными условиями движения и в частности значение константы $\gamma_l$. В формуле (2.1).

Литература


1. Burrau, C., "Numerische Berechnung eines Spezialfalles des Dreikorperproblems" (A Numerical Solution to a Special Case of the Three-body Problem) *Publickationer og mindre Meddelelser fra Kobenhavns Observatorium*, No. 13 (1913)
2. Szebehely, V. 1967, "Burrau's Problem of Three Bodies", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 58, Issue 1, pp. 60-65,
3. Szebehely, V. & Peters, C. F. 1967, "Complete Solution of a General Problem of Three Bodies", The Astronomical Journal, vol. 72., No. 7, pp. 876-883
4. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. – М.: 2001г., 320с.
5. Davis H.T. Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equation. Dover, New York, 1962
6. Дж. Н. Ватсон Э. Т. Уиттекер Курс современного анализа. Ч.2. Трансцендентные функции. — Москва: Москва: УРСС, 2010
7. Zwillinger, D. Handbook of Differential Equations, 3rd ed. Boston, MA: Academic Press, 1997.