

## По поводу проблемы описания многих тел

Северо-Западный Государственный Заочный Технический Университет

Санкт-Петербург, Миллионная, д.5,

E-mail [Yakubovski@rambler.ru](mailto:Yakubovski@rambler.ru)

Расчет траектории большого количества тел, это сложная вычислительная задача. В статье предлагается система координат, которая сводит эту задачу к расчетам движения одного тела в заданном потенциале сил. В частности задача может быть применена для расчета траекторий планет Солнечной системы или влияния многих тел на траекторию космического аппарата. Рассчитав траектории каждой пары тел, с учетом запаздывания в квадратурах, получим возможность рассчитывать с помощью итерационной схемы траектории отдельных тел. Причем в силу итерационного характера алгоритма будет учтено взаимодействие с помощью решения одного парного уравнения, между всеми телами в предыдущих итерациях. Уже на втором шаге итераций учитывает тройное мгновенное взаимодействие. Каждый новый шаг итерации добавляет новый элемент мгновенного взаимодействия. При решении задачи движения трех тел, определится большое количество периодов их движения. Заметим, что уравнение движения парного взаимодействия двух тел, должно быть приведено к безразмерному виду, причем не зависящему от выбора пары.

В случае описания  $N$  тел необходимо  $3N$  уравнений. В частности необходимо  $3N$  уравнений Лагранжа. Причем учесть запаздывания гравитационного поля для задачи многих тел практически невозможно. Предлагается использовать систему координат, описывающую  $N$  тел. Т.е. обратная функция преобразования координат содержит  $N$  ветвей. Т.е. формула преобразования координат имеет вид

$$x_l = f_l(y_1, y_2, y_3), l = 1, \dots, 3. \quad (1)$$

Где величина  $y_1, y_2, y_3$  имеет  $N$  совокупностей значений, соответствующих одной левой части (1). Тогда можно подсчитать кинетическую и потенциальную энергию этой системы уравнений. Уравнения Лагранжа запишутся в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_k} - \frac{\partial L}{\partial y_k} = 0.$$

Где для величины функции Лагранжа имеем следующую формулу

$$L = m \sum_{k=1}^3 \frac{\dot{x}_k^2}{2} - U(x_1, x_2, x_3).$$

При этом для учета разных масс тел, определим новые переменные системы для  $N$  тел по формуле (2), где  $k$  тело взаимодействует с  $n$  телом

$$u_l = y_l \gamma(m_k + m_n) \alpha / c^2, t = \tau \gamma(m_k + m_n) \alpha^{3/2} / c^3$$

$$u_l^{kn} = y_l^{kn} \gamma(m_k + m_n) \alpha / c^2 \quad (2)$$

Где  $u_l^{kn}$  декартовы координаты  $k$  тела,  $m_k$  масса покоя  $k$  тела. Безразмерные координаты  $y_l, \tau$  строятся относительно гравитационного радиуса тела массы  $M$ , равного в общей теории относительности величине  $r_g = 2\gamma M / c^2$ , где  $c$  это скорость света, величина  $\gamma$  это гравитационная постоянная.

Величина гравитационного радиуса и полученного характерного времени, малая по сравнению с размерами тел Солнечной системы и характерным периодом орбиты, поэтому необходимо ее увеличить, введя большой множитель  $\alpha$ . Причем, чтобы записывать дифференциальное уравнение без дополнительных множителей необходимо выбрать такие степени  $\alpha$  в выражении (2) для длины и времени. В частности величину  $\alpha$  можно выбрать из условия  $t = 1 \text{ year} = 3.16 \cdot 10^7 \text{ sec}$ , при массе, равной массе Солнца при условии  $\tau = 1$ .

Причем решаемое уравнение надо представить в безразмерном виде, тогда оно будет общим для каждого из  $N$  тел.

Так как уравнения движения в гравитационном поле имеют вид

$$\frac{m_n m_k}{m_n + m_k} \frac{d^2 x_l}{dt^2} = -\gamma \frac{m_n m_k x_l}{\left(\sum_{s=1}^3 x_s^2\right)^{3/2}}$$

Это дифференциальное уравнение в новых координатах  $x_l = z_l \gamma(m_k + m_n) \alpha / c^2$  имеет вид

$$\frac{d^2 z_l}{d\tau^2} = -\frac{z_l}{\left(\sum_{s=1}^3 z_s^2\right)^{3/2}}$$

Причем, зная координату  $z_l$  для  $k$  тела можно определить декартову координату этого тела. Не смотря на то, что используется одно уравнение движения, в результате итерационного расчета определяется движение  $N$  взаимодействующих тел, где на предыдущем шаге используются уравнения движения остальных тел. Причем учет движения остальных тел происходит уже при первом определении траекторий. Решим задачу движения каждого из двух тел с учетом запаздывания потенциала. Поле в точке  $\mathbf{Y}_1$  в момент времени  $\tau$  определяется состоянием второго тела в предшествующий момент времени  $\tau'$ , для которого время распространения поля из точки  $\mathbf{Y}_2(\tau')$  в точку нахождения второго тела  $\mathbf{Y}_1$  совпадает с разностью  $\tau - \tau'$ . Тогда момент времени  $\tau'$  определяется из уравнения

$$\tau - \tau' = |\mathbf{Y}_1(\tau) - \mathbf{Y}_2(\tau')| \quad (3)$$

В формуле для гравитационного взаимодействия необходимо использовать радиус  $\mathbf{Y}_1(\tau) - \mathbf{Y}_2(\tau')$ . Считая зависимости радиуса от времени величиной известной из предыдущего решения, определим связь между  $\tau' = g(\tau)$ .

Вспомогательная интерполяционная формула имеет вид

$$P_{\alpha\beta}(y_1, y_2, y_3) = \prod_{l=1}^3 \frac{(y_l - y_l^{11}) \dots (y_l - y_l^{(\alpha-1)(\beta-1)}) \dots (y_l - y_l^{(\alpha+1)(\beta+1)}) \dots (y_l - y_l^{NN})}{(y_l^{\alpha\beta} - y_l^{11}) \dots (y_l^{\alpha\beta} - y_l^{(\alpha-1)(\beta-1)}) \dots (y_l^{\alpha\beta} - y_l^{(\alpha+1)(\beta+1)}) \dots (y_l^{\alpha\beta} - y_l^{NN})} \quad (4)$$

При этом обобщенная относительная координата имеет вид

$$z_l = \sum_{k,n=1}^N (y_l^{kn} - y_l^{nk}) \frac{4}{\pi} \arctan[P_{kn}(y_1, y_2, y_3)]. \quad (5)$$

При этом при подстановке  $y_l = y_l^{kn}$  получим  $z_l$ , а при подстановке  $y_l = y_l^{nk}$  получим  $-z_l$ , так как индекс у функции  $P_{kn}(y_1, y_2, y_3)$  будет переставлен.

Записывая дифференциальные уравнения Лагранжа для движения относительно центра двух тел, получим

$$\sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial z_l}{\partial y_k} \frac{d^2 y_k}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 z_l}{\partial y_k \partial \tau} \frac{dy_k}{d\tau} \right) + \frac{\partial^2 z_l}{\partial \tau^2} + \sum_{k,s=1}^3 \frac{\partial^2 z_l}{\partial y_k \partial y_s} \frac{dy_k}{d\tau} \frac{dy_s}{d\tau} = - \frac{z_l}{\left( \sum_{s=1}^3 z_s^2 \right)^{3/2}}. \quad (6)$$

Где  $z_k$  определяется по формуле (5). На первом шаге надо определить скорость в формуле (6) равной нулю. Зафиксируем значения  $y_l^{kn}$  в формулах (4) и (5), задав вместо них начальные значения. Получим решение  $y_l = g_l(\tau), \dot{y}_l = h_l(\tau)$ . Т.е. начальные значения для решения можно определить без учета запаздывания. Имеем зависимость  $\tau' = g[g_l^{-1}(y_l)]$ , где имеем  $\tau' = g(\tau)$ , полученное из уравнения (3) с учетом известного уравнения движения двух тела. Подставляя это значение в формулы для скорости и для координаты, получим  $\dot{y}_l = h_l[\tau'(y_l)]$ ,  $y_l^{nk}(t) = y_l^{nk}[\tau'(y_l)]$ . На следующем шаге в результате интегрирования дифференциального уравнения, получим другую зависимость  $y_l = g_l(\tau), \dot{y}_l = h_l(\tau)$ . Далее строим алгоритм, как для первого шага.

Т.е. дифференциальное уравнение (6) можно представить в виде

$$\frac{d^2 y_l}{dt^2} = P_l(y_1, y_2, y_3). \quad (7)$$

Значит, правую часть (7) можно представить в виде

$$\frac{d^2 y_l}{dt^2} = \exp[H_l(y_1, y_2, y_3)] \prod_{s=1}^S (y_l - a_l^s). \quad (8)$$

Где коэффициенты множителей удовлетворяют  $P_l(a_1^s, a_2^s, a_3^s) = 0, l = 1, \dots, 3$ . Причем имеем формулу

$$\exp[H_l(y_1, y_2, y_3)] = \frac{P_l(y_1, y_2, y_3)}{\prod_{s=1}^S (y_l - a_l^s)}. \quad (9)$$

Где величина  $\exp[H_l(y_1, y_2, y_3)]$  в ноль не обращается, т.к. числитель и знаменатель правой части (9) обращаются в ноль одновременно.

Вводя оператор

$$\exp[-H_l(y_1, y_2, y_3)] \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d^2}{d\tau^2}. \quad (10)$$

Известно тождество

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dh}{d\tau}.$$

Продифференцировав его по времени, получим

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = \left( \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} h = \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 \frac{d^2 h}{d\tau^2} \quad (11)$$

Значит, подействовав оператором (10) на функцию  $h$  и используя (11), имеем

$$\frac{d\tau}{dt} = \exp\{H_l[y_1(t), y_2(t), y_3(t)]/2\}$$

Откуда определим величину  $\tau$ , являющуюся, монотонной функцией  $t$ . Т.е. получим уравнение

$$\frac{d^2 y_l}{d\tau^2} = \prod_{s=1}^S (y_l - a_l^s) = \sum_{s=1}^S b_{ls} y_l^s$$

Умножая на величину  $2dy_l / d\tau$  и интегрируя по  $\tau$ , получим

$$\left(\frac{dy_l}{d\tau}\right)^2 = \Omega(y_l) + \alpha_l.$$

Это дифференциальное уравнение можно представить в виде интеграла

$$\int_{y_l^0}^{y_l} \frac{dy_l}{\sqrt{\Omega(y_l) + \alpha_l}} = \tau - \tau_0. \quad (12)$$

Где величина  $\Omega(y_l)$  полином высокой степени. Решение этого уравнения  $y_l(t) = f_l(t)$  для всех тел, функция, имеющая много периодов. Т.е. существует много периодов, для которых выполняется  $f_l(t) = f_l(t + T_k), k = 1, \dots, \infty$  см. [1]. В этой книге для полинома третьей степени  $\Omega(y_l)$  утверждается, что решение содержит два периода. Для полинома большей степени имеется большое количество периодов, что доказано для интегралов функций

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\sum_{n=0}^N a_n x^n}} = \tau - \tau_0.$$

Функция  $x = x(\tau)$  имеет много периодов. В силу аналитического характера решения этой задачи удастся на каждой итерации получить формулу много периодического движения для функции  $x_k(t)$  и значит, для каждой траектории отдельных тел.

Не обращающийся в ноль множитель определяется по формуле

$$\begin{aligned} \exp[H_l(y_1, y_2, y_3)] &= \frac{P_l(y_1, y_2, y_3)}{\prod_{s=1}^S (y_l - a_l^s)} = \\ &= \frac{Q_l(y_1, y_2, y_3, t) + F(y_1, y_2, y_3, t)\dot{y}_l + \sum_{k=1}^3 Z_k(y_1, y_2, y_3, t)\dot{y}_k \dot{y}_l}{\prod_{s=1}^S (y_l - a_l^s)} \end{aligned}$$

Тогда уравнение (12) запишется в виде

$$\begin{aligned} \int_{y_l^0}^{y_l} \frac{dy_l}{\sqrt{\Omega(y_l) + \alpha_l}} &= \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{Q_l(y_1, y_2, y_3, t) + F(y_1, y_2, y_3, t)\dot{y}_l + \sum_{k=1}^3 Z_k(y_1, y_2, y_3, t)\dot{y}_k \dot{y}_l}{\prod_{s=1}^S (y_l - a_l^s)}} dt \\ \frac{1}{\sqrt{\Omega(y_l) + \alpha_l}} \frac{dy_l}{dt} &= \sqrt{\frac{Q_l(y_1, y_2, y_3, t) + F(y_1, y_2, y_3, t)\dot{y}_l + \sum_{k=1}^3 Z_k(y_1, y_2, y_3, t)\dot{y}_k \dot{y}_l}{\prod_{s=1}^S (y_l - a_l^s)}} \end{aligned}$$

Решив уравнение Лагранжа, получаем зависимость  $y_l(t)$  для траектории движения тел с учетом запаздывания при начальных условиях, соответствующих

одному из пары тел. Таким образом, получаем решение для всех парных тел, подставляя начальные условия, соответствующие новой паре.

При этом решение  $y_i$  должно быть таково, чтобы  $\Omega(y_i) + \alpha_i > 0$  в формуле (12). В случае отрицательного выражения  $\Omega(y_i) + \alpha_i$ , время будет умножаться на мнимую единицу, и решение становится возрастающим в силу периодичности решения (например, справедлива формула  $\sin(it) = \sinh t$ ). Это решение соответствует нестационарной орбите, т.е. удалению от Солнечной системы.

По полученным траекториям пар решений составим новые пары функций  $y_i^{kn}(t), y_i^{nk}(t)$ . Снова решим задачу двух тел, но уже с уточненными опорными траекториями, учитывающими  $N$  мерное взаимодействие с запаздыванием.

Процесс итераций надо продолжать до тех пор, пока вычисленные траектории не совпадут с вычисленными траекториями на предыдущем шаге. Т.е. аппроксимации итерационной схемы доказана. Она следует из вида интерполяционной формулы (5), т.е. из совпадения правых частей формулы (5) при разных итерациях. Процессы сходимости итераций с учетом всех взаимодействий первоначально реализуется в окрестности начальной точки. По мере продолжения итераций сходимость будет наблюдаться на увеличивающемся расстоянии от начальной точки.

Уже на втором шаге итераций, точно учитывается парное мгновенное взаимодействие тел. На следующем шаге, это приведет к учету мгновенного взаимодействий трех тел, через парные взаимодействия, которые учитываются плюс добавочное тело. На следующей итерации учитывается мгновенное взаимодействие четырех тел, и так далее до учета мгновенного взаимодействия всех тел. Т.е. основная часть итераций расходуется на точный эффект запаздывания.

Возможно использование преобразование координат, которое будет выражено формулой (4), для описания множества одинаковых электронов, вращающихся в атоме.

Известна нормированная волновая функция  $\psi_{nlm}$  и энергия  $E_n$  отдельных электронов в поле ядра с учетом приведенной массы, равной для двух частиц  $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ . Т.е. водородоподобное приближение. Строим по аналогии формулы (4) функции

$$\psi(E^0, \psi^0) = \sum_{n=1}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^l \psi_{nlm} \frac{4}{\pi} \arctan[P_{nlm}(\psi^0)P_n(E^0)]. \quad (13)$$

Нормированная волновая функция для одного электрона в поле ядра имеет вид  $\psi_{nlm} = A_{nlm} \rho^l \exp(-\rho/2) L_{n+l}^{2l+1}(\rho) Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , где  $\rho$  это безразмерный радиус электрона,  $\rho^l \exp(-\rho/2) L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$  это обобщенный полином Лагерра,  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  сферическая функция. Величина  $\psi^0, E^0$  это волновая функция и уровень энергии электронов в много электронном атоме. Выполняется соотношения для полиномов в формулах (13) и (14)  $P_{nlm}(\psi_{nlm}) = 1, P_{nlm}(\psi_{pqm}) = 0, n, l, m \neq p, q, s, P_n(E_n) = 1, P_n(E_m) = 0, n \neq m$ . Кроме того, значение энергии считается по формуле

$$E(E^0, \psi^0) = \sum_{n=1}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^l E_n \frac{4}{\pi} \arctan[P_{nlm}(\psi^0)P_n(E^0)]. \quad (14)$$

Причем величины  $\psi, E$  в частности удовлетворяют ближайшему к ядру электрону, на который внешние электроны не действуют, и уровень энергии определяется как водородоподобный

$$\psi = \psi_{100} = A_{100} \exp(-\rho/2)L_1^1(\rho)$$

$$E = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2}$$

Это один из существующих уровней энергии и волновая функция, которые можно определить. Подставляя эти выражения в левую часть (13) и (14) определим одно из возможных состояний электрона. Тогда корни правой части интерполяционных функций (13) и (14) определяют другие состояния электрона. Интерполяционные функции (13) и (14) устроены таким образом, что в возможных состояниях правой части, получают соответствующее возможное состояние левой части. Тогда при одном реализуемом возможном состоянии, являющейся левой частью (13) и (14), определяются возможные корни правой части, описывающие состояние сложного атома.

Величина изменения  $n$  в формуле для энергии  $E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2n^2}$ , уже при условии  $n=10$ , определяет ошибку измерения энергии 1%. Тогда определится  $N=10$  уровней энергии и  $N$  волновых функций сложного атома по формулам (13) и (14).

Решать систему нелинейных уравнений надо, сводя ее к дифференциальному уравнению. Для выбора ветви составим функцию

$$E(t) = E_n + (E - E_n)t,$$

$$\psi(t) = \psi_{nlm} + (\psi - \psi_{nlm})t \quad 0 \leq t \leq 1$$

Продифференцируем (13) и (14) по  $t$ , считая, что справедливо  $\psi^0(t), E^0(t)$ . Тогда получим систему дифференциальных уравнений

$$E - E_n = \frac{\partial E(E^0, \psi^0)}{\partial \psi^0} \frac{d\psi^0}{dt} + \frac{\partial E(E^0, \psi^0)}{\partial E^0} \frac{dE^0}{dt}$$

$$\psi - \psi_{nlm} = \frac{\partial \psi(E^0, \psi^0)}{\partial \psi^0} \frac{d\psi^0}{dt} + \frac{\partial \psi(E^0, \psi^0)}{\partial E^0} \frac{dE^0}{dt} \quad (15)$$

Разрешив систему (15) относительно неизвестных  $\frac{dE^0}{dt}, \frac{d\psi^0}{dt}$  и проинтегрировав по отрезку  $t \in [0,1]$ , получим значение энергии и волновой функции с индексами  $n, l, m$ . Используя вычисленные значения энергии и волновой функции, продолжим процесс вычисления с уточненными данными. На первом шаге будет учитываться парное взаимодействие частиц. Следующий шаг итераций учтет тройное взаимодействие. Процесс будет продолжаться до тех пор, пока не будут учтены все взаимодействия. Процесс движения электронов в атоме описан без учета запаздывания. Описание запаздывания усложнило бы процесс описания движения электронов в атоме. Особенно это сказывается на описании взаимодействия между вращающимися электронами. В принципе эта задача разрешимая, но выходит за пределы предлагаемой статьи. Кроме того, на малых расстояниях уравнения Максвелла не справедливы, что следует из другого закона излучения электрона. Потенциалы Лиенара-Вихерта не являются электромагнитным полем на малых расстояниях. Это означает, что статический закон потенциальной энергии  $U = e/r$  одиночного заряда на малых расстояниях не справедлив. Имеются минимумы электростатической энергии на расстояниях, соответствующих радиусам Бора, образующие устойчивый атом. Именно поэтому аппроксимация статического закона, дает экспериментально подтвержденные уровни энергии излучения для водородоподобных атомов. В случае более сложных атомов статический закон взаимодействия  $U = e/r$  не справедлив на малых расстояниях. Совершенно аналогично гравитационное взаимодействие образует черные дыры при малых радиусах и имеется понятие гравитационного

радиуса. «Статическое» гравитационное поле не имеет особенностей в нуле, а образует решение Шварцшильда. Скажу более, гравитационное поле образует волновое уравнение с поправками см. [2], и, следовательно, модуль поля может иметь минимумы при приближении к центру тела. При взятии модуля поля на определенной частоте уходит зависимость от времени и остается чисто пространственная составляющая, которая может иметь минимумы.

Если значение энергии не будет совпадать с вычисленным значением энергии в предыдущем шаге, то нужно продолжить процесс аппроксимации, используя полученные формулы для энергии состояния и волновой функции. Процесс должен продолжаться до совпадения значения энергии с вычисленными значениями энергии на предыдущем шаге.

#### Список литературы

1. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. \_М.: Эдиториал УРСС, 2001г.,320с.
2. В.Г.Писаренко Проблемы релятивистской динамики многих тел и нелинейная теория поля «Наукова думка», Киев, 1974г