Оценка решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно первой производной

Салосин Е,Г.
e-mail salosinevgeniy@rambler.ru

Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений разрешенных относительно первой производной оцениваются с большим трудом. Предлагается оценка первого интеграла. Для этого правую часть системы дифференциальных уравнений представляют в виде начального условия плюс первая производная, умноженная на приращение времени, и решают нелинейную систему уравнений относительно первой производной. В результате решения системы нелинейных уравнений получается его точное решение. Получается система нелинейных уравнения относительно первой производной, решаю которое получается одно из решений непрерывных ветвей решения. Можно продолжить аппроксимацию, продифференцировав уравнение по времени и получив неявную схему решения для первой и второй производной по времени. Причем так как производные зависят от времени, и не являются константами, возможно получение точного решения в виде полинома малой степени.

Запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = F_k(t, x_1, \dots, x_N)$$

Представим его в виде неявной схемы решения

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = F_k[t, x_{10} + \frac{dx_1(t)}{dt}(t - t_0), \ldots, x_{N0} + \frac{dx_N(t)}{dt}(t - t_0)] \quad (1)$$

Получаем неявную схему решения относительно $\frac{dx_k(t)}{dt}, k = 1, \ldots, N$ определяя возможно комплексное при больших значениях $(t - t_0)$ непрерывное решение. При этом получится точное решение дифференциального уравнения в виде

$$x_k(t) = x_{k0} + \frac{dx_k(t)}{dt}(t - t_0)$$

Решений в виде координат положения равновесия имеется множество в зависимости от начальных условий. Аналогично при большом $(t - t_0)$ имеется множество решений. Можно выбирать решение близкое к предыдущему решению и получится одно непрерывное решение. Причем можно определить и координату положения равновесия, определив решение в виде

$$a_k = x_{k0} + \frac{dx_k(t)}{dt}(t - t_0); \lim_{t - t_0 \to \infty} \frac{dx_k(t)}{dt}(t - t_0) = a_k - x_{k0}$$

Причем устойчивые координаты положения равновесия будут сходиться, а не устойчивые не будут иметь предела. Причем может реализоваться ситуация, когда часть координат сходится, а часть нет. Такая ситуация может возникнуть если расходящаяся часть $\frac{dx_k(t)}{dt}(t - t_0)$ образует решение задачи, но не константу. Вообще, в случае наличия первых интегралов, каждое уравнение может зависеть от одной переменной и каждое уравнение сходится независимо от других уравнений, и возможно одна из ветвей уравнения содержит не сходящееся к константе решение, а остальные решения стремятся к константе.

Если же считать начиная с большого значения $(t - t_0)$, то получим множество решений, как и множество решений координат положения равновесия.

Причем так как используется зависимость $\frac{dx_k(t)}{dt}$, а не $\frac{dx_k(t)}{dt}|_{t=t_0}$ решение в виде полинома является точным, получается точное удовлетворение дифференциальному уравнению.

Можно повысить точность решения, продифференцировав уравнение

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} = \frac{\partial F_k(t, x_1, \dots, x_N)}{\partial t} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial F_k(t, x_1, \dots, x_N)}{\partial x_n} F_n(t, x_1, \dots, x_N)$$

И искать решение в виде

$$x_k(t) = x_{k0} + \frac{dx_k(t)}{dt}(t - t_0) + \frac{d^2x_k(t)}{dt^2}(t - t_0)^2/2$$

Из расширенной системы дифференциальных уравнений.

Принципиально нет ограничений на расширение системы нелинейных уравнений и получается все более точные первые интегралы.

Причем в целях сокращения размерности системы нелинейных уравнений можно воспользоваться решением в виде

$$x_k(t) = x_{k0} + \frac{dx_k(t)}{dt}|_{t=t_0}(t - t_0) + \frac{d^2x_k(t)}{dt^2}(t - t_0)^2/2$$

$$\frac{dx_k(t)}{dt}|_{t=t_0} = F_k(t_0, x_{10}, \dots, x_{N0})$$

А можно не заморачиваться с решением системы нелинейных уравнений и дифференцировать нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, если оно достаточно гладкое и считать коэффициенты полинома решения по начальным условиям. Но тогда автономное дифференциальное уравнение с комплексными координатами положения равновесия не будет считаться, пример - дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2; \frac{dx}{1 + x^2} = dt; arctgx = arctgx_0 + t - t_0$$

$$x = tg(arctgx_0 + t - t_0)$$

Это уравнение имеет комплексные координаты положения равновесия $x = \pm i$ и поэтому решение быстро стремится к бесконечности. Его надо решать в комплексной плоскости с комплексными начальными условиями, учитывающими мнимую шероховатость поверхности $x_0 \to x_0(1 + i\delta)$ и тогда решение будет комплексное, турбулентное конечное с особенностью $\frac{1}{\frac{\pi}{2} - arct \quad {}_0 - t + t_0 - \pi k + \frac{ix_0\delta}{1+x_0^2}}; k \in [-\infty, \infty]$, причем чем степень шероховатости больше, тем особенность решения меньше, чем начальные условия более комплексные, тем решение задачи имеет меньшую амплитуду.

Отмечу, что неявная схема решения переходит в комплексное решение и у неявной схемы решения нет особенности.

Но как получить из первого интеграла (1) решение. Рекуррентное соотношение в действительной плоскости приводит к решению только при действительных координатах положения равновесия. В случае комплексных координатах положения равновесия рекуррентная схема определяет действительное решение, которое даже при малых значениях $t - t_0$ определяет бесконечное решение. Определяется вместо комплексного решения действительное решение, что приводит к бесконечности рекуррентной схемы. Необходимо использовать в случае комплексных координат положения равновесия комплексные начальные условия. Тогда получится максимальное комплексное решение с амплитудой $const + \frac{-i(1+x_{k0}^2)}{x_{k0}\delta} = x_{k0}(1 + i\delta) + \frac{dx_k(t)}{dt}(t - t_0)$, поэтому степень мнимой шероховатости надо делать большой или быть готовым к получению большой, но конечной, мнимой части решения.

Имеется глубокая связь между решением систем обыкновенных дифференциальных уравнений и решением нелинейного уравнения. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений я свел к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Докажем обратное, система алгебраических уравнений сводится к решению дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему алгебраических уравнений, зависящих от времени

$$F_k[t, x_1(t), \dots, x_N(t)] = 0; k = 1, \dots, N$$

Продифференцируем эту систему нелинейных уравнений по времени, получим

$$-\frac{\partial F_k[t, x_1(t), \dots, x_N(t)]}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial F_k[t, x_1(t), \dots, x_N(t)]}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \qquad (2)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = -\sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{\partial F_k[t, x_1(t), \dots, x_N(t)]}{\partial x_n} \right\}^{-1} \frac{\partial F_k[t, x_1(t), \dots, x_N(t)]}{\partial t} \qquad (3)$$

Используя частное решение системы (2), получим начальные условия для системы дифференциальных уравнений (3). Решая систему дифференциальных уравнений (3), получим все решения системы (2). При этом определитель

$$\left| \frac{\partial F_k[t_1, x_1(t_1), \dots, x_N(t_1)]}{\partial x_n} \right| = 0$$

Не должен равняться нулю, иначе решение системы уравнений (2) имеет разрывное логарифмическое решение на отрезке

$t \in [t_1 - \varepsilon. t_1 + \varepsilon]$

$$\frac{dx_n}{dt} = -\frac{a_n}{t - t_1}; x_n - x_{n0} = -a_n \ln(|t - t_1|)$$

Выводы

Приведение уравнения к неявной схеме решения позволяет получить конечное турбулентное, комплексное решение, если имеются комплексные координаты положения равновесия. Решение задачи по определению первой или второй производной приводит к решению дифференциального уравнения. Можно продифференцировать дифференциальное уравнение по времени, и получим разложение решения в ряд. Для сходимости этого ряда необходимо, чтобы начальные условия были комплексные, при действительных начальных условиях и наличии комплексных координат положения равновесия ряд быстро расходится, а при комплексных начальных условиях сходится. Причем чем больше мнимая часть начальных условий, тем сходимость ряда лучше. Но надо пересчитывать комплексное, турбулентное решение в действительное, для этого существуют формулы см [1].

Литература

1. Якубовский Е.Г. Кинематика описания турбулентного потока с помощью комплексной скорости «Энциклопедический фонд России», 2020, 7 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1653688592.pdf