Еще один способ решения уравнения Навье-Стокса с заданной ошибкой

Салосин Е.Г.

e-mail salosinevgeniy@rambler.ru

Решение уравнения Навье-Стокса сводится к нелинейной системе дифференциальных уравнений, где правая часть - полином второй степени, относительно неизвестных функций см. [1], [2]. Общее решение этой системы нелинейных уравнений возможно только приближенное. Получим приближенное решение этой системы нелинейных уравнений с заданной ошибкой. Получена конечная формула для бесконечного числа членов ряда, т.е. получено точное решение уравнения Навье-Стокса.

Рассмотри полином второй степени, являющийся правой частью обыкновенного нелинейного уравнения, относительно коэффициентов безразмерного числа Рейнольдса потока $R_l = \sum_{n=1}^{N} x_{ln}\varphi_n(\boldsymbol{r}) + R_{l0}\, ; l = 1, \dots, 3$ см. [1], [2]. При этом скорость удовлетворяет условиям Галилея, скорость четырехмерная, в релятивистском случае для релятивистского уравнения Навье-Стокса. По поводу релятивистского уравнения Навье-Стокса см. [4]. Оно отличается от приведенных в ЛЛ6. Где Где $\varphi_n(\boldsymbol{r})$ на границе тела обращаются в ноль. В случае внешней задачи имеем R_{l0}=0 $\varphi_n(\mathbf{r}) = O(\frac{1}{r})$ для конечности кинетической энергии тела.

Подставив это решение в особым образом сделанное безразмерным см. [1], [2] уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности, и умножив уравнения на величину $\varphi_k(\boldsymbol{r})$ и усреднив решение по пространству, оно сводится к уравнению

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{p,q=1}^{N} F_{kpq} x_p x_q - R_{cr} \sum_{p=1}^{N} G_{kp} x_p + R_{cr} H_k; k = 1, \dots, N$$

Находим координаты положения равновесия этой системы нелинейных уравнений. Ламинарное решение линейной части этой системы уравнений имеет вид

$$x_{Lp0} = G_{pk}^{-1} H_k$$

Тогда ламинарное решение этого уравнения можно представить в виде, причем при комплексном турбулентном решении некоторые квадратные корни определяют мнимое решение. Если оставить знак минус перед квадратным корнем, то нужно дополнительно извлечь корень из мнимых частей. Это связано с тем, что дисперсия при шаге вперед и назад определяет квадратный корень из числа шагов $d = \sqrt{N}$, а мнимая часть произвольным образом меняет знак

$$x_p = R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - 2R_{cr} \sum_{n=0}^{K} x_{Lp\,n}} = R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - 2R_{cr} x_{Lp\,K}} =$$

$$= x_{LpK} - \sum_{s=2}^{3K-1} C_{\frac{1}{2}}^{s} \frac{\left(-2x_{LpK}\right)^{s}}{R_{cr}^{s-1}} =$$

$$= -\sum_{s=1}^{3K-2} C_{\frac{1}{2}}^{s} \frac{\left(-2x_{LpK}\right)^{s}}{R_{cr}^{s-1}} + \frac{0.5!}{(3K-1)!\,(0.5-3K)!} R_{cr}\lambda^{3K-1}$$

$$\Gamma(z+1) = \frac{\Gamma(z+1+k)}{(z+k)(z+k-1)\dots(z+1)} =$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n+k+1} + \int_1^{\infty} \exp(-t)\, t^{Z+k}\, dt}{(z+k)(z+k-1)\dots(z+1)};$$

$$z+k+1 = 0.5-3K+k \in [0,1]; k = 3K; z = -0.5-3K$$

Решение в виде ряда оказалось расходящимся, где использовали выведенную в дальнейшем формулу $x_{Lp} = \lambda G_{pk}^{-1} H_k + \frac{\lambda^2 F_{spq} G_{pk}^{-1} H_k G_{qk}^{-1} H_k}{R_{cr}^3[|1-\lambda^2 F_{spq} G_{pk}^{-1} H_k G_{qk}^{-1} H_k / R_{cr}^3| + \epsilon^2]}$, получим, что старший член, равный $R_{cr}\lambda^{3K-1}$ стремится к бесконечности при турбулентном режиме при $K \to \infty$, $\boldsymbol{\lambda}>1$, где $\boldsymbol{\lambda}$ увеличение давления относительно критического. В ламинарном режиме $x_{LpK} = \lambda G_{pk}^{-1} H_k$ и при условии $0<\boldsymbol{\lambda}<1$ ряд сходится и имеем действительное решение. При большом внешнем воздействии H_k получится комплексное решение при условии $R_{cr} = 2\sum_{n=0}^{K} x_{Lp}$. Это условие на значение внешнего давления. Начало комплексного, турбулентного решения получится при условии, что число Рейнольдса равно критическому $x_p = R_{cr}$. Можно получить линейное решение с произвольной точностью с помощью сходящегося ряда. Далее используем поправку к решению $H_k^{n+1} = H_k^n + F_{kpq} x_{Lpn} x_{Lqn} / R_{cr}$, получим поправку к ламинарному решению $x_{Lp(n+1)} = G_{pk}^{-1}(H_k^n + F_{kpq}x_{Lpn}x_{Lqn}/R_{cr})$. При счете по этой рекуррентной схеме поправка будет убывать в $1/R_{cr}^3$ раз. При K итерациях точность равна $\Delta x_{LpK} = O[\frac{(F_{spq}G_{pk}^{-1}H_kG_{qk}^{-1}H_k)^K}{R_{cr}^{3(K-1)+1}}]$. Ошибка вычисления значения координаты положения равновесия равна $\Delta x_{LpK} = \mathrm{O}[\frac{(F_{spq}G_{pk}^{-1}H_kG_{qk}^{-1}H_k)^K}{R_{cr}^{3(K-1)+1}}]$. У ламинарного решения сумма $G_{pk}^{-1}H_k$ сходится. Она сходится и при увеличении на множитель внешнего давления. Но решение в виде ряда расходится с ростом давления, больше критического. Но решение для величины давления x_{LpK} сходится, оно содержится в квадратном корне и определяет решение задачи гидродинамики. С ростом внешнего давления ошибка вычисления корня растет и становится равной в точке перехода из ламинарного в турбулентный режим $\mathrm{O}(\frac{2(F_{spq}G_{pk}^{-1}H_kG_{qk}^{-1}H_k)^K}{R_{cr}^{3(K-1)+2}})$. При увеличении давления в λ раз ошибка становится равной $\mathrm{O}(\frac{2(F_{spq}G_{pk}^{-1}H_kG_{qk}^{-1}H_k)^K\lambda^{2K}}{R_{cr}^{3K-1}})$, т.е. выполняется $\lambda(F_{spq}G_{pk}^{-1}H_kG_{qk}^{-1}H_k)2^{1/2K} < R_{cr}^{1.5-1/2K}$, т.е. метод вычисление $x_{LpK} = \sum_{n=0}^{K} x_{Lpn}$ работает и причем максимальная ошибка метода с использованием квадратного корня

$$\delta = \lambda_{cr}(F_{spq}G_{pk}^{-1}H_kG_{qk}^{-1}H_k)2^{1/2K}/R_{cr}^{1.5-1.5/K}.$$

При $\lambda > \lambda_{cr}$ хотя погрешность метода растет, но она растет с увеличением давления и сумму $x_{LpK} = \sum_{n=0}^{K} x_{Lp}$ можно использовать под знаком квадратного корня, просто возрастет роль последнего члена. Если бы каждый каждые члены суммы $x_{LpK} =$

$\sum_{n=0}^{K} x_{Lpn}$ имели бы одинаковую зависимость от давления, то это приводило бы к правильному росту влияния давления. Необходимо, чтобы рост давления определялся средним членом, тогда формулу можно использовать. Имеем формулу для роста давления

$$x_{LpK} = \lambda G_{pk}^{-1} H_k + \frac{\dfrac{\lambda^2 (F_{spq} G_{pk}^{-1} H_k G_{qk}^{-1} H_k)}{R_{cr}^{3-\frac{2}{K}}} - \dfrac{(F_{spq} G_{pk}^{-1} H_k G_{qk}^{-1} H_k)^K \lambda^{2K}}{R_{cr}^{3(K-1)+1}}}{1 - \lambda^2 (F_{spq} G_{pk}^{-1} H_k G_{qk}^{-1} H_k) / R_{cr}^{3-\frac{2}{K}}}$$

$$= \hat{L}_0 + \sum_{n=1}^{K-1} (\hat{K}\hat{L}\hat{L})^n = \hat{L}_0 + \frac{\hat{K}\hat{L}\hat{L} - (\hat{K}\hat{L}\hat{L})^K}{1 - \hat{K}\hat{L}\hat{L}} = \hat{L}_0 + \frac{\hat{K}\hat{L}\hat{L}}{1 - \hat{K}\hat{L}\hat{L}}$$

$$\lim_{\boldsymbol{K \to \infty}} (\hat{K}\hat{L}\hat{L})^K = \mathbf{0};\ \hat{K} = F_{spq}; \hat{L} = \frac{\lambda G_{pk}^{-1} H_k}{R_{cr}^{1.5-\frac{1}{K}}}; \hat{L}_0 = \lambda G_{pk}^{-1} H_k$$

и рост давления зависит от числа членов K поэтому должно выполняться $\frac{(F_{spq} G_{pk}^{-1} H_k G_{qk}^{-1} H_k)^K \lambda^{2K}}{R_{cr}^{3(K-1)+1}} < 1$. Но решение не зависит от количества членов ряда и можно получить решение при конечном $\boldsymbol{\lambda}$ при бесконечном количестве членов ряда

$$\lim_{K \to \infty} x_{LpK} = \lambda G_{pk}^{-1} H_k + \frac{\lambda^2 F_{spq} G_{pk}^{-1} H_k G_{qk}^{-1} H_k}{R_{cr}^3 [|1 - \lambda^2 F_{spq} G_{pk}^{-1} H_k G_{qk}^{-1} H_k / R_{cr}^3| + \epsilon^2]};$$

Решение получено в виде бесконечного ряда при ограниченном значении $\boldsymbol{\lambda}$. Аналитически продолжим это решение на бесконечное значение $\boldsymbol{\lambda}$. Ламинарное решение равно $x_p = \lambda G_{pk}^{-1} H_k; 0 \le \lambda \le 1$.

Справедливо равенство в критической точке перехода из ламинарного режима в турбулентный

$$R_{cr} = 2G_{pk}^{-1}H_k + \frac{2F_{spq}G_{pk}^{-1}H_kG_{qk}^{-1}H_k}{R_{cr}^3[|1-F_{spq}G_{pk}^{-1}H_kG_{qk}^{-1}H_k/R_{cr}^3|+\epsilon^2]}$$

Величина увеличения давления в разах относительно критической точки

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{R_{cr}^{1,5}}{F_{spq}G_{pk}^{-1}H_kG_{qk}^{-1}H_k} \sim \frac{\mathbf{4}}{\sum_{p,q=1}^{N} F_{spq}R_{cr}^{0.5}} < \mathbf{1}.$$

Точка бесконечности турбулентного режима находится вне области реализации турбулентного режима, и не реализуется. При этом наблюдается непрерывное решение, равное критическому числу Рейнольдса до линейного роста давления.

Получается физическое решение, не зависящее от количества членов, причем при большом перепаде давления решение пройдя через бесконечность решения остается комплексным, перепад давления сохраняет знак.

Решаем ту же самую рекуррентную схему

$$G_{kp}\alpha_p = \frac{F_{kpq}\alpha_p\alpha_q + R_{cr}H_k}{R_{cr}} \qquad (1)$$

Эта рекуррентная схема совпадает с предыдущей. При счете по этой рекуррентной схеме поправка будет убывать в $1/R_{cr}^3$ раз. Ошибка данного метода при K итерациях точность равна $\Delta\alpha_{LpK} = O\left[\frac{(F_{spq}G_{pk}^{-1}H_kG_{qk}^{-1}H_k)^K}{R_{cr}^{3(K-1)+1}}\right]$.

Введем новую переменную $y_p = x_p + \alpha_p$ и подставим ее в уравнение, получим уравнение

$$\sum_{p,q=1}^{N} F_{kpq}(x_p+\alpha_p)(x_q+\alpha_q) - R_{cr}\sum_{p=1}^{N} G_{kp}(x_p+\alpha_p) + R_{cr}H_k = 0$$

Учитывая уравнение (1), получим уравнение

$$\sum_{p=1}^{N}\left[\sum_{q=1}^{N} F_{kpq}(x_q+2\alpha_q) - G_{kp}\right]x_p = 0; \qquad (2)$$

$$F_{kpq}x_q\alpha_p = F_{kqp}x_p\alpha_q = F_{kpq}x_p\alpha_q$$

Использовалась симметрия коэффициентов по индексам p, q $F_{kpq} = F_{kqp}$.

Добиваемся равенства нулю определителя

$$\left|\sum_{q=1}^{N} F_{kpq}(x_q+2\alpha_q) - G_{kp}\right| = 0 \qquad (3)$$

При этом из уравнения (2) определяем его корни с точностью до множителя, считая матрицу (2) константой. Из уравнения (3) определяем множитель, он имеет N возможно комплексных значений. В результате итераций получим N совокупностей значений корня.

Теперь о границах применимости двух разных алгоритмов решения задачи уравнения Навье-Стокса. Ламинарное решение линейное и тут не должно быть никаких проблем. Турбулентное решение по первой схеме определяет действительную основную ветвь решения. Второе решение определяет все N ветвей решения, и в частности, основную ветвь решения. Но в принципе второй алгоритм решения надо применять, начиная с начала турбулентного комплексного решения, тогда определятся все ветви решения. Если же необходимо получить основную ветвь решения, то надо воспользоваться первым алгоритмом.

Возникает законный вопрос, ведь первым способом получено основное действительное решение уравнения Навье-Стокса. Применение второго способа приводит к комплексному решению. Но не все так просто, действительный ряд расходится при образовании комплексных координат см. [1], и только представив решение в комплексном виде получается сходимость. Между тем представив решением в виде квадратного корня, получим сходящееся решение. Был расходящийся в турбулентном режиме ряд по степеням z, а стал один квадратный корень из z. Имеется и другая причина расходимости действительного ряда, каждый член ряда изменяется по тангенсу в действительной плоскости, а в комплексной плоскости тангенс конечен см [1].

Литература

1. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION I. THE GENERAL SOLUTION OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 60-66. https://world-science.ru/pdf/2016/3/14.pdf
2. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION см.SOLUTION II. THE USE OF LAMINAR SOLUTIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 67-83.https://world-science.ru/pdf/2016/3/15.pdf

3. YAKUBOVSKIY, E. G. "STUDY OF NAVIER–STOKES EQUATION SOLUTION III. THE PHYSICAL SENSE OF THE COMPLEX VELOCITY AND CONCLUSIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 84-87. https://www.world-science.ru/pdf/2016/3/16.pdf
4. Салосин Е.Г. Вывод релятивистского уравнения Навье-Стокса для макротел, 2022, 2 стр. http://russika.ru/userfiles/1691_1649849236.pdf