Приближенное решение систем алгебраических уравнений

Салосин Е.Г.

e-mail salosinevgeniy@rambler.ru

Находим собственные значения и собственные векторы двух индексной матрицы. Далее вместо неизвестных используем произвольную константу и получаем уравнение относительно нее. Т.е. задачу с многими переменными свели к системе полиномов относительно одной переменной, которая легко решается численными методами. Имеются существенные упрощения, если матрица единичная. Можно зная одно решение решить задачу для определения всех ветвей корня. Метод приближенный, тем точнее, чем тензоры ближе к диагональным. При диагональных тензорах ошибка метода равна нулю.

Необходимо найти координаты положения равновесия этой системы нелинейных уравнений.

$$f_k(\alpha_1, \dots, \alpha_N) + \sum_{s,p,q=1}^{N} K_{kpqs}\alpha_p\alpha_q\alpha_s + \sum_{p,q=1}^{N} F_{kpq}\alpha_p\alpha_q -$$

$$-R_{cr}\sum_{p=1}^{N} G_{kp}\alpha_p + H_k = 0\,; k = 1, \dots, N \quad (1)$$

Найдем собственные векторы и собственные числа матрицы G_{kp}

$$\left(G_{kp} - \lambda_\alpha^1 \boldsymbol{\delta_{kp}}\right)\boldsymbol{g_{p\alpha}c_\alpha} = G_{kp}\Delta\boldsymbol{x_p} - \lambda_\alpha^1\Delta\boldsymbol{x_k} = \boldsymbol{0}; \Delta\boldsymbol{x_p} = \boldsymbol{g_{p\alpha}c_\alpha}; \Delta\boldsymbol{x_k} = \boldsymbol{g_{k\alpha}c_\alpha}$$

$$|G_{kp} - \lambda_\alpha^1\boldsymbol{\delta_{kp}}| = \boldsymbol{0}$$

Справедливо $\Delta x_p = g_{p\alpha}c_\alpha; p = 1, \dots, N$ при любых значениях c_α, и, значит, при любых значениях Δx_p**.** Экстремальными свойствами обладает диагональный элемент матрицы $\Delta x_\alpha = g_{\alpha\alpha}c_\alpha$. Но как же быть с равенством $\alpha_p = \sum_\alpha g_{p\alpha}c_\alpha$, где значение $c_\alpha = g_{\alpha p}^{-1}\alpha_p$ вычислено с точностью до множителя $g_{\alpha p}^{-1}$. Но также справедливо $c_\alpha = \frac{\alpha_p}{g_{p\alpha}}$. При этом собственные векторы нормированы $g_{k\alpha} \to \frac{g_{k\alpha}}{\sqrt{\sum_\alpha g_{k\alpha}^* g_{k\alpha}}}$. Основное равенство, полученное из этого уравнения, соответствует экстремальному свойству $c_\alpha = \frac{\alpha_\alpha}{g_{\alpha\alpha}}$. При условии диагональности тензоров ошибка равна нулю.

Приведем уравнение к уравнению относительно одной переменной

$$g_{\alpha k}^{-1} f_k(g_{1\alpha}c_\alpha, \dots, g_{N\alpha}c_\alpha) + \sum_{k,s,p,q=1}^{N} g_{\alpha k}^{-1} K_{kpqs} g_{p\alpha} g_{q\alpha} g_{s\alpha} c_\alpha^3 +$$

$$+ \sum_{k,p,q=1}^{N} g_{\alpha k}^{-1} F_{kpq} g_{p\alpha} g_{q\alpha} c_\alpha^2 - R_{cr} \sum_{k,p=1}^{N} g_{\alpha k}^{-1} G_{kp} g_{p\alpha} c_\alpha + g_{\alpha k}^{-1} H_k = 0\,;$$

$$g_{\alpha k}^{-1} f_k(g_{1\alpha}c_\alpha, \dots, g_{N\alpha}c_\alpha) = F_\alpha(c_\alpha);$$

На общем выражении я расписал, чему соответствует произведение тензоров

$$\sum_{k,s,p,q=1}^{N} g_{\alpha k}^{-1} K_{kpqs} g_{p\alpha} g_{q\alpha} g_{s\alpha} = \sum_{k,s,p,q=1}^{N} g_{\alpha k}^{-1} \lambda_\alpha^3 \delta_{kpqs} g_{p\alpha} g_{q\alpha} g_{s\alpha} = \lambda_\alpha^3$$

Справедливо $g_{\alpha k}^{-1} \lambda_\alpha^3 \delta_{kpqs} g_{p\alpha} g_{q\alpha} g_{s\alpha} = \lambda_\alpha^3$. В случае диагонального тензора, имеем

$$g_{\alpha k}^{-1} \lambda_\alpha^3 \delta_{kpqs} g_{p\alpha} g_{q\alpha} g_{s\alpha} \mathrm{c}_\alpha^3 = K_{kpqs} g_{\alpha\alpha} g_{\alpha\alpha} g_{\alpha\alpha} \mathrm{c}_\alpha^3 = \alpha_\alpha^3 g_{\alpha k}^{-1} \lambda_\alpha^3;$$

$$g_{\alpha\alpha} c_\alpha = \frac{\alpha_\alpha (g_{\alpha k}^{-1} \lambda_\alpha^3)^{\frac{1}{3}}}{K_{kpqs}^{\frac{1}{3}}} = \frac{\alpha_\alpha (g_{\alpha k}^{-1} \lambda_\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{F_{kpq}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\alpha_\alpha g_{\alpha k}^{-1} \lambda_\alpha^1}{G_{kp}};$$

$$K_{kpqs} = g_{\alpha k}^{-1} \lambda_\alpha^3 \frac{\delta_{kpqs} g_{p\alpha} g_{q\alpha} g_{s\alpha}}{g_{\alpha\alpha} g_{\alpha\alpha} g_{\alpha\alpha}}; \delta_{\alpha\alpha\alpha\alpha} = 1$$

Причем для точности метода должно выполняться $k = p = q = s = \alpha; g_{\alpha\alpha} c_\alpha = \alpha_\alpha$

В случае не диагонального тензора имеется погрешность.

$$\sum_{k,p,q=1}^{N} g_{\alpha k}^{-1} F_{kpq} g_{p\alpha} g_{q\alpha} = \lambda_\alpha^2\,; \sum_{k,p=1}^{N} g_{\alpha k}^{-1} G_{kp}\, g_{p\alpha} = \lambda_\alpha^1; g_{\alpha k}^{-1} H_k = \lambda_\alpha^0$$

Откуда получается уравнение относительно одной переменной, которое решается методом деления отрезка пополам, предварительно установив участки монотонности

$$F_\alpha(c_\alpha) + \lambda_\alpha^3 c_\alpha^3 + \lambda_\alpha^2 c_\alpha^2 - R_{CR}\lambda_\alpha^1 c_\alpha + \lambda_\alpha^0 = 0$$

$$\alpha_\alpha = g_{\alpha\alpha} c_\alpha$$

Причем результат счета с уравнением второго порядка, это основное решение уравнения Навье-Стокса. Имеются и другие решения, но в трубопроводе реализуется основное решение. При найденном одном решении остальные решения находятся по формуле $\beta_k = \alpha_k + z_k$, причем величина z_k удовлетворяет уравнению

$$A_{kp}(\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{Nk}, z_1, \dots, z_N) z_p = 0;$$

Чтобы имелось не нулевое решение определитель этой системы нелинейных уравнений должен равняться нулю

$$\left| A_{kp}(\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{Nk}, z_1, \dots, z_N) \right| = 0$$

Откуда определится L значений множителя перед z_q,q=1,…,N. При определителе равном нулю определятся значения z_p с точностью до множителя. Этот множитель определим из равенства нулю определителя. Определится NL значений $z_{kp}; k = 1, \dots, L, p$=1,…,N.

При условии $G_{kp} = \delta_{kp}$ имеем значение коэффициентов

$$F_\alpha(c_\alpha) = f_\alpha(c_\alpha); \lambda_\alpha^3 = K_{\alpha\alpha\alpha\alpha}; \lambda_\alpha^2 = F_{\alpha\alpha\alpha}; \lambda_\alpha^1 = G_{\alpha\alpha}; \lambda_\alpha^0 = H_\alpha$$

В этом случае $g_{p\alpha} = g_{p\alpha}^{-1} = \delta_{p\alpha}$ и все индексы надо приравнять α, а все переменные $x_k = c_\alpha$. Тогда для диагональных тензоров и функции, зависящей от одной переменной, получится точное решение, в противном случае получится приближенное решение.

При вычислении коэффициента сопротивления данной точности достаточно, так как решение складывается из модуля суммы комплексных коэффициентов турбулентного и ламинарного решения. Удается добиться точности 10%. Но для решения ряда данная методика работает отлично, так как при учете решения надо учитывать степень шероховатости, что приводит к приближениям. Для более точных расчетов других задач данная методика не справедлива.